电子社考研权威辅导丛书

小鑫考研嘚吧嘚
考研数学复习全书
（数学二）

潘鑫　著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书按照教育部考试中心公布的考研大纲要求编写，内容涵盖研究生考试数学二全部知识点，突出三个非常：**语言非常通俗，逻辑非常清晰，例题非常丰富**，这三个特色使得本书区别于市场上的同类图书。本书对传统课本中的重点、难点、疑点及最容易被忽视的一些潜在要点进行了全新的诠释，作者总结了自身在考研数学培训生涯中的诸多经验，将其独创的考研数学学习套路毫无保留地奉献给读者。

图书在版编目（CIP）数据

小鑫考研嘚吧嘚：考研数学复习全书. 数学二 / 潘鑫著. —北京：电子工业出版社，2015.3

（电子社考研权威辅导丛书）

ISBN 978-7-121-25439-0

Ⅰ. ①小… Ⅱ. ①潘… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 012311 号

策划编辑：齐　岳
责任编辑：徐　静　齐　岳
文字编辑：万子芬　刘真平　李　蕊　韩玉宏
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编　100036
开　　本：880×1 230　1/16　印张：37.25　字数：1490 千字
版　　次：2015 年 3 月第 1 版
印　　次：2015 年 3 月第 1 次印刷
定　　价：78.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　言

考研是一场艰苦的战斗，为了帮助广大备考的同学，尤其是基础相对薄弱的同学在短时间内掌握考研数学的考点，取得理想的分数，夺取考研这场战役的胜利，我精心编写了本书，希望可以在考研的道路上助大家一臂之力。

➩ 本书定位

本书是一本适合读者自学的考研数学辅导书籍。与传统教材不同，本书的**语言通俗，逻辑清晰，例题丰富**，书中所涉及的知识点，无论多简单，都有举例，这“三板斧”使得您完全不用担心有看不懂的知识点。所以，本书定位为“零基础”考研数学自学用书，也是广大考生在考研数学复习阶段应看的第一本书。

所谓教材，是指老师上课时所使用的书籍，大多数教材不会把每个知识点都讲解得非常细，目的是要在课堂上给学生留有充分的思考空间，锻炼同学们的思维能力；而教辅书，顾名思义，是教材辅助的书籍，教辅书不能脱离教材，如果一个基础很薄弱的学生直接看教辅书会使学习变得很吃力。本书既非教材，也非教辅，是一本十分“纯正”的自学用书。为了能让读者实现真正的自学，我在写作过程中重视每个细节，每个知识点和例题都配有通俗易懂的解释，这样一来就可以保证“零基础”的读者也能够看懂本书。知识被“掰开揉碎”地讲解，内容编排符合考生的思维习惯，语言风格轻松活泼，相信广大考生阅读本书后会有一种爱不释手的感觉。

➩ 本书特色

1. 语言通俗

大部分考研数学类书籍都摆脱不了语言晦涩难懂、内容体系“模式化”、文字叙述与读者思维不同步，极易出现断档的弊病，读者需要逐字去琢磨文字的意思，一旦在某个知识点卡住，会耗费大量的时间。我认为考研数学类书籍最高级的表达方式就是用最通俗的文字，去讲解最难理解的知识，不需要读者费时费力地反复琢磨，而这正是本书的最大亮点。本书的所有文字，从定义、定理的解释，到例题的解析，再到每章习题的解析，都非常轻松活泼、通俗易懂，让考生抛弃掉考研复习的沉重心情。这样一来，读者在轻松看懂本书内容的同时，又能发现学习的乐趣，更可贵的是可以连贯、高效地复习，节省了宝贵的时间。

2. 逻辑清晰

本书的编排合理，逻辑非常清晰。具体来说，本书的所有题目的解析中绝对不会出现任何一个书中没有讲到的知识点，并且每一步解答都详细注明了知识点来源。众所周知，做一道题可能会同时用

到很多不同章节的知识点，很多考研辅导书中都存在这样一种现象：讲完一个知识点，然后下面有配套的例题，但此例题中会用到还未讲解的知识点且没有向读者说明。这样一来，许多读者就不明白了，思考了很长时间，以为是某个复习过的知识点自己忘了，反复看才发现该题用到的是后续的知识点，白白浪费了时间。多年的教学经验以及自身的考研经验让我在这一点上极其重视，避免了上述现象的发生。

总的来说，本书“逻辑清晰”的特点体现在以下三个方面：

（1）书中例题解析涉及的知识点在对应章节都有详细的讲解。

（2）书中例题的每一步解答都详细注明了知识点来源。

（3）书中例题均与知识点完全对应。

3. 例题丰富

本书的例题非常丰富，甚至是一些十分简单的知识点对应的例题，按理说没有必要再举例，但本书还是写了。这是为什么呢？因为我在教学的过程中发现了这样一种现象：就算知识点再简单，讲解得再明白，不举例的话，学生心里多少还是会有一些不踏实，不会将知识点运用到实际做题中。基于此，本书所涉及的知识点都有配套的例题。

我是一个标准的“90 后”，痴迷于大学阶段数学类课程，在本科阶段我便利用课余时间给同学们办讲座，帮助他们渡过“期末考试”的难关，在研究生入学考试中，我考出了接近满分的成绩。我在平时的学习和备战考研的过程中总结了一套独有的学习方法，研究生阶段边学习边在各大考研机构讲课、录制视频，希望把自己的学习方法教给更多的人，帮助他们顺利考上研究生。

本书的写作过程耗时两年，可以说贯穿了我研究生学习生涯。面对着繁重的学习、授课压力，我挤出时间研究同类书籍、独立编写例题、反复修改书稿、广泛征求意见，终于使得本书顺利出版。谨以此书献给所有需要考研的同学们！

凤凰鸣九天，需烈火涅槃；蛟龙纳明珠，需深潜寒潭。春日那“深巷梨花轻闭门，风袅篆烟系柳丝”需要冬日那一季枯老，秋日那“冲天香阵透长安，满城尽带黄金甲”需要夏日那暴雨骄阳。祝同学们考研成功！

潘　鑫

2015 年 1 月于北京

目 录

第一部分 线性代数

第一部分

线性代数

- 行列式
- 矩阵
- 向量
- 解线性方程组
- 特征值、特征向量、相似矩阵
- 二次型

第1章

行　列　式

1.1　行列式的标志

行列式共有两个标志，接下来要给大家讲这两个标志。在讲之前先跟大家说明一点，即只有**同时满足**这两个标志才是行列式。

行列式的第一个标志：双竖线。大家注意，千万不能写成圆括号“()”或者方括号“[　]”。

我们来看一个例子。

例. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$和$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$这两个式子都不是行列式，因为外面没有用双竖线，而是用方扩号、圆括号。

行列式的第二个标志：行数=列数。换句话说，就是有几行就有几列，行数和列数绝对不可以不相等。

我们还是来看例子。

例. $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 13 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$就不是行列式，因为行数$\neq$列数（大家看，$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 13 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$有三行两列，小学生都知道$3 \neq 2$）。

以上给大家介绍了行列式的两个标志，即“双竖线”和“行数=列数”，简单吧！但是再次强调：这两个标志必须同时满足才是行列式，只满足其中一条是不行的。

再来看以下几个例子。

例. $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 19 \\ 2 & 4 & 7 \\ 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$不是行列式，因为它不满足行列式的第一个标志。

例. $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \\ 3 & 78 \end{pmatrix}$不是行列式，因为它既不满足行列式的第一个标志，也不满足行列式的第二个标志。

例. $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 9 & 76 \\ 1 & 23 \end{vmatrix}$不是行列式，因为它不满足行列式的第二个标志。

例. $\begin{vmatrix} 4 & 50 \\ 1 & 32 \end{vmatrix}$是行列式，因为它同时满足行列式的第一个标志和第二个标志。

例. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$不是行列式，因为它不满足行列式的第一个标志。

好，通过本节的讲解，相信大家对行列式已经有了很直观的认识，下面看第二节。

1.2　行列式的本质

本节给大家讲的是行列式的本质，其实本节的内容就一句话：**行列式的本质是<u>一个</u>数**。

大家注意：在这句话中，强调的是“一个”。

我们来看例子。

例. $\begin{vmatrix}5&6\\32&12\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}5&3&4\\2&43&45\\9&1&6\end{vmatrix}$都是行列式。第一个行列式在双竖线内有 4 个数，第二个行列式在双竖线内写有 9 个数，但是它们的本质都只是“一个”数。

大家现在明白了吧，这就是本节想要告诉大家的，此时肯定有不少同学想问：行列式所表示的那个数到底是什么？这个问题会在 1.3 节中讲解。

1.3　行列式的基本计算方法

在第二节中我们已经知道了行列式的本质是一个数，那么这个数究竟是多少？这就涉及行列式的基本计算方法，归纳如下：

- 行列式的基本计算方法
  - 特殊行列式的计算
    - 上三角行列式的计算
    - 下三角行列式的计算
    - 对角行列式的计算
    - 反对角行列式的计算
  - 一般行列式的计算
    - 两行两列行列式的计算
    - 三行三列行列式的计算
    - 大于三行三列行列式的计算

1.3.1　特殊行列式的计算

1．上三角行列式的计算

先给大家介绍一下什么叫“对角线”。不说专业术语，用最通俗易懂的话来说，对角线是指行列式中从左上到右下的那条斜线。

例. $\begin{vmatrix}3&7&28\\4&8&92\\12&3&4\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}2&7&5&3\\1&12&43&54\\11&43&6&67\\54&32&4&8\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}3&1\\4&2\end{vmatrix}$

在这三个行列式中，对角线分别为“$\begin{matrix}3&&\\&8&\\&&4\end{matrix}$”、“$\begin{matrix}2&&&\\&12&&\\&&6&\\&&&8\end{matrix}$”、“$\begin{matrix}3&\\&2\end{matrix}$”。

注意：对角线是指行列式中从左上到右下的斜线，千万别记成从右上到左下的斜线。

再来看什么叫“上三角行列式”。**上三角行列式是指对角线下侧的所有数都为 0 的行列式。**

例. $\begin{vmatrix}7&4&5\\0&32&5\\0&0&4\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}34&0&3&4\\0&8&7&0\\0&0&7&12\\0&0&0&24\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}11&2\\0&3\end{vmatrix}$都是上三角行列式。

需要注意：在判断一个行列式是否为上三角行列式时，只需要关注对角线下侧，对角线下侧的所有数都为 0 的行列式就是上三角行列式，至于对角线本身的数及对角线上侧的数中有没有 0 都无所谓。

例. $\begin{vmatrix}0&5&2\\0&0&0\\0&0&9\end{vmatrix}$和$\begin{vmatrix}0&0&0\\0&7&6\\0&0&8\end{vmatrix}$都是上三角行列式。

那么，上三角行列式的计算方法是什么？很简单：**直接将对角线上的数相乘即可。**

例. $\begin{vmatrix}4&2&7\\0&1&3\\0&0&8\end{vmatrix}=4\times1\times8=32$，$\begin{vmatrix}4&43&9&55\\0&1&15&22\\0&0&2&54\\0&0&0&3\end{vmatrix}=4\times1\times2\times3=24$，$\begin{vmatrix}5&1\\0&4\end{vmatrix}=5\times4=20$

2．下三角行列式的计算

下三角行列式是指对角线上侧的所有数都为 **0** 的行列式。

下三角行列式的计算方法：直接将对角线上的数相乘（和上三角行列式的计算方法完全一样）。

例． $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 4\times1\times3 = 12$，$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\times5 = 5$，$\begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 0 \\ 1 & 32 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 8\times2\times10\times1 = 160$

3．对角行列式的计算

对角行列式是指除对角线上的数以外所有数都为 **0** 的行列式。换言之，对角行列式是上三角行列式和下三角行列式的结合。注意：对角线本身的数中有没有 **0** 无所谓，只要除对角线以外的所有数都为 **0** 的行列式就是对角行列式。

对角行列式的计算方法：直接将对角线上的数相乘（和上三角、下三角行列式的计算方法完全一样）。

例． $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\times0 = 0$，$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\times3\times2 = 18$，$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1\times2\times9\times10 = 180$

再次提醒注意：

- 在判断某行列式是否为上三角行列式时，只需判断对角线下侧的数是否全为 0 即可，至于对角线本身的数及对角线上侧的数中有没有 0 则根本不需要关注。
- 在判断某行列式是否为下三角行列式时，只需判断对角线上侧的数是否全为 0 即可，至于对角线本身的数及对角线下侧的数中有没有 0 则根本不需要关注。
- 在判断某行列式是否为对角行列式时，只需判断对角线上侧及下侧是否全为 0 即可，至于对角线本身的数中有没有 0 则根本不需要关注。

只要某行列式是上三角行列式、下三角行列式或对角行列式，那么计算该行列式的方法就是直接把对角线上的数相乘。

4．反对角行列式的计算

先来介绍“反对角线”的概念，反对角线是指行列式中从右上到左下的斜线。

例． $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 13 \\ 1 & 43 & 43 \\ 45 & 13 & 14 \end{vmatrix}$两个行列式中“$\begin{matrix} & 7 \\ 2 & \end{matrix}$”和“$\begin{matrix} & & 13 \\ & 43 & \\ 45 & & \end{matrix}$”分别为各自的反对角线。

那么，反对角行列式是怎样的行列式?反对角行列式是指除了反对角线上的数以外的所有数都为 **0** 的行列式（反对角线上的数中有没有 **0** 不需要关注）。

例． $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$都是反对角行列式。

反对角行列式的计算方法：设反对角行列式为$\begin{vmatrix} 0 & & a_1 \\ & a_2 & \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_n & & 0 \end{vmatrix}$，则该反对角行列式的值为$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$，其中 n 为该反对角行列式的行数（或列数）。

例． 计算$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

解： 此行列式为反对角行列式，如果想计算此行列式的值，需要套用刚才讲过的公式$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$。由于这是四阶（四行四列）行列式，所以 $n=4$。又因为在此题中，$a_1=2,\ a_2=1,\ a_3=3,\ a_4=4$，所以此行列式的值为$(-1)^{\frac{4(4-1)}{2}}\times2\times1\times3\times4=24$。

1.3.2　一般行列式的计算

1．两行两列行列式的计算

两行两列的行列式又被称为二阶行列式，可以直接利用公式来计算，公式为：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

例． 计算$\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

解： $\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6\times 3 - 1\times 2 = 16$

例． 计算$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$

解： $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 7\times 8 - 3\times 2 = 50$

2．三行三列行列式的计算

三行三列的行列式又称为三阶行列式，与二阶行列式类似，可以直接利用公式来计算，公式为：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

这公式并不难记，记忆方法如下：等式右侧共有六项，前三项为正，后三项为负，大体上要这么记：

□+□+□−Δ−Δ−Δ

那么，三个□中的每一个□该如何记？很简单：第一个□为对角线上的三个数相乘。对角线是“$\begin{matrix} a & & \\ & e & \\ & & i \end{matrix}$”，所以第一个□为 aei；那么第二个□和第三个□该如何记？也很简单：首先，从行列式中去掉对角线，也就是说，从行列式中去掉“$\begin{matrix} a & & \\ & e & \\ & & i \end{matrix}$”，则行列式变为$\begin{vmatrix} & b & c \\ d & & f \\ g & h & \end{vmatrix}$，只剩六个数了，然后从这六个数中找出三个不同行、也不同列的数相乘就是第二个□；剩下的三个数相乘就是第三个□。

那么，三个Δ中的每一个Δ又该如何记？第一个Δ为反对角线上的数字相乘。反对角线是“$\begin{matrix} & & c \\ & e & \\ g & & \end{matrix}$”，所以第一个Δ为 ceg；至于第二个Δ和第三个Δ的记忆方法，也很简单：首先，从行列式中去掉反对角线，即从行列式中去掉“$\begin{matrix} & & c \\ & e & \\ g & & \end{matrix}$”，则行列式变为$\begin{vmatrix} a & b & \\ d & & f \\ & h & i \end{vmatrix}$，只剩下六个数。然后从这六个数中找出三个不同行、也不同列的数相乘就是第二个Δ；剩下的三个数相乘就是第三个Δ。

自己试试默写此公式：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

默写完公式后，再看看下面的例题：

例．

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 1\times 5\times 9 + 2\times 6\times 7 + 3\times 4\times 8 - 3\times 5\times 7 - 1\times 6\times 8 - 2\times 4\times 9 \\ &= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 \\ &= 0 \end{aligned}$$

3．大于三行三列的行列式计算

通过前面的介绍，我们已经知道了二阶行列式和三阶行列式可以通过公式来计算。那么，如果是四阶（四行四列）的行列式该怎么计算？如果是五阶（五行五列）的行列式又该怎么计算？如果还想知道相应的公式，只能很遗憾地告知：**大于三阶的行列式就没有计算公式了。但是不要失望！虽然没有公式，但是有办法计算！**我们一起开动脑筋想想，大于三阶的行列式虽然没有计算公式，但是二阶行列式和三阶行列式是有计算公式的，如果可以将四阶行列式、五阶行列式化为二阶的行列式或三阶的行列式，就可以套公式了，事实就是如此。

下面介绍**大于三行三列的行列式的计算方法：降阶法（也叫按行列展开法）。**

降阶法有两个步骤：

（1）从行列式中任意选择一行或一列。

（2）设我们选择的那一行数从左往右依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$（如果选择的是列，就设选择的那一列数从上往下依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$），然后设 x_i 为 a_i 的行标（比如 a_1 处于行列式中的第三行，那么 x_1 就是 3），设 y_i 为 a_i 的列标（比如 a_1 处于行列式中的第二列，那么 y_1 就是 2）。最后，再设 $|A_i|$ 为原行列式中去掉 a_i 所在行和所在列后剩下的数所组成的行列式，则行列式的值 $=a_1\times(-1)^{x_1+y_1}\times|A_1|+a_2\times(-1)^{x_2+y_2}\times|A_2|+\cdots+a_n\times(-1)^{x_n+y_n}\times|A_n|$。

以上就是降阶法（也叫按行列展开法）的两个步骤。由于步骤（2）设的东西很多，所以可能会觉得这个方法很难，降阶法其实非常简单。只不过如此简单的方法如果要用规范化的语言描述起来还真是比较麻烦，所以在步骤（2）才设这么多。现在看下面的这道例题，看完就会恍然大悟：哦！原来此方法如此简单啊。

例．计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$

解：前面已经提过了，降阶法是用于计算大于三阶的行列式的方法，而本题是三阶行列式，应该用公式法来计算啊，肯定有很多同学会这么想。**现在告诉大家：三阶行列式既能用公式法计算，也能用降阶法计算，但是大于三阶的行列式只能用降阶法计算（除非是特殊的行列式）。**由于要举例说明降阶法的使用，所以这道例题就用降阶法来计算。

我们严格按照上述两个步骤来做。

（1）从行列式中任意选择一行或一列，此时有六种选法：可以选择第一行 $1\quad 2\quad 3$，可以选择第二行 $4\quad 5\quad 6$，可以选择第三行 $7\quad 8\quad 9$，可以选择第一列 $1\quad 4\quad 7$，可以选择第二列 $2\quad 5\quad 8$，可以选择第三列 $3\quad 6\quad 9$。从这六种选法中任意选择一种都可以，因为无论选的是哪一种，最后的答案都是一样的。如我们就选择第一行，即 $1\quad 2\quad 3$。

（2）$D=1\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}+3\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}=0$

为什么会这样呢？因为“−1”是公式中有的，记住就行了。由于 1 在第一行第一列，所以是 1+1；2 在第一行第二列，所以是 1+2；3 在第一行第三列，所以是 1+3。然后 $\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}$ 分别为行列式去掉 1，2，3 所在行和所在列后剩下的行列式。请看下面的详细解释。

$\begin{vmatrix}\boxed{1}&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$ 去掉 $\boxed{1}$ 所在的行和列，即去掉第一行和第一列，剩下的数所组成的行列式为 $\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}$；$\begin{vmatrix}1&\boxed{2}&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$ 去掉 $\boxed{2}$ 所在的行和列，即去掉第一行和第二列，剩下的数所组成的行列式为 $\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}$；$\begin{vmatrix}1&2&\boxed{3}\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$ 去掉 $\boxed{3}$ 所在的行和列，即去掉第一行和第三列，剩下的数所组成的行列式为 $\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}$。

这道题就做完了，最后的答案是 0。

倘若在步骤（1）选择的不是第一行而是第二行、第三行、第一列、第二列、第三列，那么最后的答案也是一样的，我们不妨试试。如果选择的是第二行 $4\quad 5\quad 6$，则

$$D=4\times(-1)^{2+1}\times\begin{vmatrix}2&3\\8&9\end{vmatrix}+5\times(-1)^{2+2}\times\begin{vmatrix}1&3\\7&9\end{vmatrix}+6\times(-1)^{2+3}\times\begin{vmatrix}1&2\\7&8\end{vmatrix}=0$$

可见用两种不同的选法来做，结果是一样的。同样还可以选择第三行、第一列、第二列、第三列来做，结果也一样。

注意：这道题是采用降阶法来做的，把三阶的行列式降成三个二阶行列式，然后用二阶行列式的公式去做。此题可以直接用公式法，因为三阶行列式本来就有公式。但是如果要计算四阶或四阶以上的行列式，就必须用降阶法了。计算四阶的行列式要将其化为四个三阶行列式相加的形式，然后用三阶行列式的公式去计算。当然，如果认为三阶行列式的公式麻烦，完全可以再将每个三阶行列式降为三个二阶行列式，然后用二阶行列式的公式去计算。

至此，本节已经讲完，最后给两点温馨提示。

温馨提示 1：在进行降阶法的步骤（1）（从行列式中任意选择一行或一列）时，**要尽量选取有 0 的行或列**，因为 0 的那一项肯定是 0，不用乘了，简化了步骤（2）。

温馨提示 2：特殊行列式完全可以用一般行列式的计算方法来计算。如 $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$ 是特殊行列式中的下三角行列式，直接把对角线上的数字相乘即可，$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2\times 4 = 8$。而如果把它看成是一般行列式中的两行两列行列式，则 $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2\times 4 - 0\times 5 = 8$，答案是一样的。

1.4　行列式的五条性质

1.3 节给大家讲的知识已经足够计算一个行列式了，然而，为了计算的方便与快捷，以下五条行列式的性质也务必掌握（再次说明：这不属于行列式的基本计算方法，只是性质，通过这些性质可以更快捷地计算一个行列式，务必掌握）。

性质 1

一个行列式的转置等于它本身。

先来说一下什么叫转置。把一个 n 行 n 列的行列式，第一行变成第一列，第二行变成第二列……第 n 行变为第 n 列后所得到的新行列式称为原行列式的转置。假设原行列式记为 D，则它的转置记作 D^{T}。

例. $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$，求 D 的转置 D^{T}。

解：把它的第一行 $2\quad 3\quad 5$ 变为第一列 $\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}$，把它的第二行 $1\quad 6\quad 8$ 变为第二列 $\begin{matrix} 1 \\ 6 \\ 8 \end{matrix}$，把它的第三行 $3\quad 2\quad 1$ 变为第三列 $\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$，得到转置矩阵 $D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix}$。

以上只是告诉大家什么是转置，现在来说一下性质 1。性质 1（一个行列式的转置等于它本身）的意思就是 $D^{\mathrm{T}} = D$。

例. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix}$，如果分别计算这两个行列式，会发现它们的值是一样的。

性质 2

互换两行，行列式变号。

例. $\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 23 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 23 & 1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 54 \\ 8 & 7 & 12 \\ 43 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 7 & 12 \\ 1 & 3 & 54 \\ 43 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

性质 2 有一个推论：**如果某行列式有两行相同，就不用费精力去计算了，这个行列式的值一定为 0**，这个推论是怎么得出来的？下面说明这个推论的推导过程。

如 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ a & b & c \end{vmatrix}$，根据性质 2，将第一行与第三行进行互换，行列式变号，即 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ a & b & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ a & b & c \end{vmatrix}$。那么，什么数的相反数等于它本身，只有 0。

性质 2 讲完了，练一道题。

例. 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix}$

解：由于其中有两行相同，所以$\begin{vmatrix}1&7&5\\2&3&8\\1&7&5\end{vmatrix}=0$。

性质 3

如果行列式的某一行的数含有公因子，则可将此公因子提到行列式之外。

例. 计算$\begin{vmatrix}1&3&5\\2&6&10\\9&17&42\end{vmatrix}$

解：其中第二行 2 6 10 含有公因子 2，可以将这个 2 提到行列式之外，因此

$\begin{vmatrix}1&3&5\\2&6&10\\9&17&42\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&3&5\\1&3&5\\9&17&42\end{vmatrix}$。根据性质 2 的推论可知$\begin{vmatrix}1&3&5\\1&3&5\\9&17&42\end{vmatrix}=0$，$2\begin{vmatrix}1&3&5\\1&3&5\\9&17&42\end{vmatrix}=0$，所以$\begin{vmatrix}1&3&5\\2&6&10\\9&17&42\end{vmatrix}=0$。

再来看一个例子。

例. 计算$\begin{vmatrix}4&8&12\\\frac{1}{8}&\frac{2}{8}&\frac{3}{8}\\1&6&5\end{vmatrix}$

解：$\begin{vmatrix}4&8&12\\\frac{1}{8}&\frac{2}{8}&\frac{3}{8}\\1&6&5\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1&2&3\\\frac{1}{8}&\frac{2}{8}&\frac{3}{8}\\1&6&5\end{vmatrix}=\frac{4}{8}\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&6&5\end{vmatrix}=\frac{4}{8}\times0=0$

下面说一点要注意事项：既然行列式中某行的公因子可以提到行列式外面，那么行列式外面的数自然也可以乘到行列式中，并且可以乘到任何一行。

例.

$$\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\2&4&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\2\times1&2\times2&2\times3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\1&2&3\end{vmatrix}=\begin{cases}\begin{vmatrix}2&8&14\\2&5&8\\1&2&3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&4&7\\4&10&16\\1&2&3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\2&4&6\end{vmatrix}\end{cases}$$

上例中行列式外面的 2 是从原行列式的第三行提到行列式外面的，但是再乘到行列式中时，可以乘到任意一行。

与性质 2 一样，**性质 3 也有一个推论：如果行列式有两行对应成比例，那么此行列式就不用费力去计算了，其值一定为 0**，证明过程如下：

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\ka&kb&kc\\d&e&f\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a&b&c\\a&b&c\\d&e&f\end{vmatrix}=k\times0=0$$

现在来看一道例题。

例. 计算$\begin{vmatrix}1&4&2\\1&9&2\\9&36&18\end{vmatrix}$

解：由于第一行和第三列对应成比例（第三行是第一行的 9 倍），所以$\begin{vmatrix}1&4&2\\1&9&2\\9&36&18\end{vmatrix}=0$。

要注意：性质 2、性质 3 推论的结论都是行列式的值为 0。只不过前者说的是若行列式有两行相同，则值为 0;

后者说的是若行列式有两行对应成比例，则值为 0。

性质 4

行列式的某一行的每个数都可以写成两个数相加的形式，因此一个行列式可以化为两个行列式相加的形式。

例. $\begin{vmatrix}1&4&9\\2&13&4\\3&5&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&9\\1&2&1\\3&5&7\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&4&9\\1&11&3\\3&5&7\end{vmatrix}$

第一行和第三行都不变，把第二行拆为$1+1$，$2+11$，$1+3$，其实有无数种拆法，如

$$\begin{vmatrix}1&4&9\\2&13&4\\3&5&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&9\\0&7&1\\3&5&7\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&4&9\\2&6&3\\3&5&7\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&4&9\\2&13&4\\3&5&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&9\\1&8&2\\3&5&7\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&4&9\\1&5&2\\3&5&7\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&4&9\\2&13&4\\3&5&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&9\\1&4&1\\3&5&7\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&4&9\\1&9&3\\3&5&7\end{vmatrix}$$

可以拆任意一行，而每一行又有无数种拆法。

比如拆第二行，那么：

$$\begin{vmatrix}1&4&9\\2&13&4\\3&5&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&9\\a&b&c\\3&5&7\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&4&9\\d&e&f\\3&5&7\end{vmatrix}$$

只需满足$a+d=2$，$b+e=13$，$c+f=4$即可。

再比如拆第三行，那么：

$$\begin{vmatrix}1&4&9\\2&13&4\\3&5&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&9\\2&13&4\\a&b&c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&4&9\\2&13&4\\d&e&f\end{vmatrix}$$

只需满足$a+d=3$，$b+e=5$，$c+f=7$即可。

性质 5

把行列式的某一行乘以 k（k 为任意常数）后，加到另外一行，行列式的值不变。

此性质是行列式 5 条性质中最常用的。请看下面的例题。

例. $\begin{vmatrix}1&4&8\\1&2&3\\4&8&9\end{vmatrix}$

现在将第一行乘以-2（可以乘以任何数，乘以-2 只是举一个例子）。

$1\times(-2)=-2$

$4\times(-2)=-8$

$8\times(-2)=-16$

然后将$-2\quad -8\quad -16$加到第二行：

$1+(-2)=-1$

$2+(-8)=-6$

$3+(-16)=-13$

此时第二行由$1\quad 2\quad 3$变为$-1\quad -6\quad -13$。

则必有$\begin{vmatrix}1&4&8\\1&2&3\\4&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&8\\-1&-6&-13\\4&8&9\end{vmatrix}$。

行列式的 5 条性质讲完了，以上 5 条“行”的性质完全可以应用到“列”上。

1.5 克拉默法则

一个新的名词出现了，大家不要被它的名字吓倒，因为这实际上是一个非常容易的解题法则。

在正式介绍克拉默法则之前，首先应当了解这个法则是干什么用的，换句话说就是：什么时候可以用这个法则，下面具体介绍。

克拉默法则是解方程组用的，所以大家千万别把它当作行列式的一种计算方法。行列式的计算方法在 1.3 节中已经讲过了。一定要记住：克拉默法则是解方程组用的。只有解方程组时才能用克拉默法则，只是应用此法则时要用到一些行列式的知识而已。

那么，是解任何方程组都可以用克拉默法则吗？不是。克拉默法则只能用于解**特定**的方程组。那么，到底怎样的方程组可以用克拉默法则求解？下面具体介绍。

对于一个给定的方程组，按如下步骤判断该方程组是否可以用克拉默法则进行求解：

（1）看所给方程组中每一个方程的形式。具体来说，就是当所给方程组中每一个方程的形式都是 $\boldsymbol{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b}$（其中 $\boldsymbol{a_1,a_2,\cdots,a_n,b}$ 为任意常）时，进行第（2）步；否则，此方程组不能用克拉默法则进行求解。

（2）看所给方程组包含的方程个数与未知数个数。具体来说，就是当所给方程组包含的方程个数等于未知数个数时，进行第（3）步；否则，此方程组不能用克拉默法则进行求解。

（3）看所给方程组对应的系数行列式 $\boldsymbol{D}$。具体来说，就是当系数行列式 $\boldsymbol{D\neq 0}$ 时，此方程组可以用克拉默法则进行求解；否则，此方程组不能用克拉默法则进行求解。

下面举例。

例. 判断如下方程组是否可以用克拉默法则来求解。

$$\begin{cases}4x_1+7x_2-2x_3+2x_4=14\\2x_1^2-7x_2-8x_4=23\\x_2-4x_3+2x_4=-1\\12x_1+3x_2-2x_3+5x_4=0\end{cases}$$

解： 先来进行第（1）步。

此方程组所包含的第一个方程 $4x_1+7x_2-2x_3+2x_4=14$ 是 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 的形式（其中 $a_1=4,a_2=7,a_3=-2,a_4=2,b=14$）。

此方程组所包含的第二个方程 $2x_1^2-7x_2-8x_4=23$ 中出现了 x_1^2，因此该方程不是 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 的形式。

此方程组所包含的第三个方程 $x_2-4x_3+2x_4=-1$ 是 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 的形式（其中 $a_1=0,a_2=1,a_3=4,\ a_4=2,b=-1$）。

最后，此方程组所包含的第四个方程 $12x_1+3x_2-2x_3+5x_4=0$ 是 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 的形式（其中 $a_1=12,a_2=3,a_3=-2,a_4=5,b=0$）。

综上所述，此方程组所包含的四个方程并非都是 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 的形式，实际上判断到第二个方程后**根本不用再进行下面的判断，就可以断定此方程组不能用克拉默法则求解。**

例.判断如下方程组是否可以用克拉默法则来求解。

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-2x_3+9x_4=6\\2x_1-2x_2-x_4=8\\-x_2-4x_3+6x_4=-1\end{cases}$$

解： 先进行第 1 步。

此方程组所包含的第一个方程 $3x_1+2x_2-2x_3+9x_4=6$ 是 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 的形式（其中 $a_1=3,a_2=2,a_3=-2,a_4=9,b=6$）。

此方程组所包含的第二个方程 $2x_1-2x_2-x_4=8$ 是 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 的形式（其中 $a_1=2,a_2=-2,\ a_4=-1,b=8$）。

此方程组所包含的第三个方程 $-x_2-4x_3+6x_4=-1$ 是 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 的形式（其中 $a_1=0,a_2=-1,a_3=-4,a_4=6,b=-1$）。

故此方程组所包含的三个方程都是 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 的形式。

现在需要进行第 2 步。

此方程组有三个方程，含四个未知数，$3\neq 4$，**所以不用再进行第 3 步了，可以断定此方程组不能用克拉默法则求解。**

例.判断如下方程组是否可以用克拉默法则来求解。

$$\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8\\x_1-3x_2-6x_4=9\\2x_2-x_3+2x_4=-5\\x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0\end{cases}$$

解：先进行第 1 步。

此方程组所包含的第一个方程 $2x_1+x_2-5x_3+x_4=8$ 是 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 的形式（其中 $a_1=2,a_2=1,a_3=-5,a_4=1,b=8$）。

此方程组所包含的第二个方程 $x_1-3x_2-6x_4=9$ 也是 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 的形式（其中 $a_1=1,a_2=-3,a_3=0,a_4=-6,b=9$）。

此方程组所包含的第三个方程 $2x_2-x_3+2x_4=-5$ 还是 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 的形式（其中 $a_1=0,a_2=2,a_3=-1,a_4=2,b=-5$）。

此方程组所包含的第四个方程 $x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0$ 仍然是 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 的形式（其中 $a_1=1,a_2=4,a_3=-7,a_4=6,b=0$）。

综上所述，此方程组所包含的四个方程都是 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 的形式。

现在进行第 2 步。

此方程组含四个方程，也含四个未知数，$4=4$。

现在进行第 3 步。

看此方程组对应的系数行列式 D 到底是不是 0，首先需要把系数行列式 D 写出来。

所谓系数行列式，就是把方程组中每个方程等式左侧所有未知数的系数写在一起所组成的行列式（与等式右侧的常数无关）。

第一个方程 $2x_1+x_2-5x_3+x_4=8$

系数为 2　1　−5　1

第二个方程 $x_1-3x_2-6x_4=9$

系数为 1　−3　0　−6（其中没有 x_3 这一项，所以 x_3 的系数就是 0）

第三个方程 $2x_2-x_3+2x_4=-5$

系数为 0　2　−1　2（其中没有 x_1 这一项，所以 x_1 的系数就是 0）

第四个方程 $x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0$

系数为 1　4　−7　6

因此，所有未知数的系数所组成的行列式为：

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}$$

利用 1.3 节所讲的方法，计算得出 $D=27$（计算过程省略）。

由于 $D\neq0$，所以此方程组可以用克拉默法则求解。

前面只是告诉大家怎样的方程组可以使用克拉默法则求解，但是克拉默法则到底应该如何使用？现在就结合一道题来具体讲解。

例．解方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8\\x_1-3x_2-6x_4=9\\2x_2-x_3+2x_4=-5\\x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0\end{cases}$

解：由于此方程组满足克拉默法则的使用条件，因此可以使用克拉默法则来求解。

第 1 步：计算方程组对应的系数行列式 D（这一步其实就是“判断某方程组是否可以用克拉默法则求解”的第 3 步）。

此题第一个方程是 $2x_1+x_2-5x_3+x_4=8$

系数为 2　1　−5　1

第二个方程是 $x_1-3x_2-6x_4=9$

系数为 1　−3　0　−6（其中没有 x_3 这一项，所以 x_3 的系数就是 0）

第三个方程是 $2x_2-x_3+2x_4=-5$

系数为 0　2　−1　2　（其中没有 x_1 这一项，所以 x_1 的系数就是 0）

第四个方程是 $x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0$

系数为 1　4　−7　6

因此，所有未知数的系数所组成的行列式为：

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}$$

利用 1.3 节所讲的方法，计算得出 D=27（计算过程省略）。

第 2 步：用方程右侧的常数分别代替系数行列式 D 的第一列、第二列……最后一列，得到行列式 $D_1,D_2,\cdots,D_n$。

此题方程右侧的常数为 $\begin{pmatrix}8\\9\\-5\\0\end{pmatrix}$

用 $\begin{pmatrix}8\\9\\-5\\0\end{pmatrix}$ 代替第一列，得出：$D_1=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=81$

用 $\begin{pmatrix}8\\9\\-5\\0\end{pmatrix}$ 代替第二列，得出：$D_2=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}=-108$

用 $\begin{pmatrix}8\\9\\-5\\0\end{pmatrix}$ 代替第三列，得出：$D_3=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}=-27$

用 $\begin{pmatrix}8\\9\\-5\\0\end{pmatrix}$ 代替第四列，得出：$D_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}=27$

第 3 步：$x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},\cdots,x_n=\dfrac{D_n}{D}$

此题解 $\begin{cases}x_1=\dfrac{81}{27}=3\\x_2=\dfrac{-108}{27}=-4\\x_3=\dfrac{-27}{27}=-1\\x_4=\dfrac{27}{27}=1\end{cases}$

1.6　矩阵

按理说 1.6 节应该在第 2 章讲，而不是在第 1 章讲，但是由于这第 1 章有很多习题涉及矩阵最基本的知识，所以把它放在第 1 章讲。

矩阵用（　）或[　]来表示，如 $\begin{pmatrix}2&4\\7&8\end{pmatrix},\begin{bmatrix}5&1\\9&2\end{bmatrix},\begin{pmatrix}7&13&6\\25&11&4\end{pmatrix},\begin{bmatrix}66&3&12\\7&8&4\end{bmatrix}$ 等。

一个矩阵的行数和列数可以不相等。换句话说，一个矩阵有 m 行 n 列，m 不一定等于 n（当然也可以 $m=n$）。

我们知道，行列式用双竖线“||”表示，行列式的本质是一个数，而矩阵表示的可不是一个数，（　）或[　]内写

了几个数它就表示几个数的组合，如矩阵$\begin{pmatrix}1 & 7 & 4\\ 2 & 3 & 8\end{pmatrix}$表示 1，7，4，2，3，8 这六个数按照第一行从左到右放 1，7，4，第二行从左到右放 2，3，8 组成的数的组合。

1.7 矩阵的运算

由于行列式的本质是一个数，所以行列式是可以进行计算的，如$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2$，而矩阵就不同了，矩阵的本质是$m\times n$个数排成的 m 行 n 列的“长方形”，不存在“一个矩阵的值是多少”这种说法。

矩阵的运算共有三种，下面分别介绍。

1.7.1 矩阵与矩阵相加

例. 计算$\begin{pmatrix}3 & 8\\ 9 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

解：因为 3+1=4，8+2=10，9+3=12，4+4=8，所以

$$\begin{pmatrix}3 & 8\\ 9 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 10\\ 12 & 8\end{pmatrix}$$

注意：只有行数和列数均相同的矩阵才能相加。如$\begin{pmatrix}7 & 9\\ 12 & 14\\ 51 & 62\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}5 & 7\\ 8 & 1\end{pmatrix}$，这两个矩阵列数相同，都是两列，但行数不同，$\begin{pmatrix}7 & 9\\ 12 & 14\\ 51 & 62\end{pmatrix}$有三行，$\begin{pmatrix}5 & 7\\ 8 & 1\end{pmatrix}$有二行，所以不能相加。而$\begin{pmatrix}7 & 9\\ 12 & 14\\ 51 & 62\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}12 & 5\\ 4 & 4\\ 76 & 2\end{pmatrix}$这两个矩阵行数和列数都相同（都是三行二列），所以可以相加。

矩阵相加的原则：两个矩阵中对应位置的数字相加。

例. 计算$\begin{pmatrix}1 & 7\\ 21 & 9\\ 51 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 3\\ 9 & 11\\ 19 & 12\end{pmatrix}$

因为 1 对应 3，7 对应 3，21 对应 9，9 对应 11，51 对应 19，6 对应 12，

所以$\begin{pmatrix}1 & 7\\ 21 & 9\\ 51 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 3\\ 9 & 11\\ 19 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 10\\ 30 & 20\\ 70 & 18\end{pmatrix}$

1.7.2 数字与矩阵相乘

数字与矩阵相乘最简单，只需用数字乘以矩阵中的每一个数即可。

例. 计算$2\times\begin{pmatrix}7 & 4\\ 13 & 24\\ 9 & 1\end{pmatrix}$

解：$2\times\begin{pmatrix}7 & 4\\ 13 & 24\\ 9 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 8\\ 26 & 48\\ 18 & 2\end{pmatrix}$

1.7.3 矩阵与矩阵相乘

$\boldsymbol{A}_{a\times b}$表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 a 行 b 列。

如果两个矩阵满足$\boldsymbol{A}_{a\times b}$，$\boldsymbol{B}_{b\times c}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以乘以矩阵 $\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 存在。

解释：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同时，就可以用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 乘以矩阵 $\boldsymbol{B}$（矩阵 $\boldsymbol{A}$ 写在乘号左侧）。

例. 判断下列矩阵是否可以相乘。

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$　　$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\\9&10\end{pmatrix}$

解：先看 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 是否存在。$\boldsymbol{A}$ 有三行两列，列数是2。$\boldsymbol{B}$ 也有三行两列，行数是3，由于 $2\neq3$，所以 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 不存在。

再来看 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ 是否存在，看 $\boldsymbol{B}$ 的列数与 $\boldsymbol{A}$ 的行数是否一致。$\boldsymbol{B}$ 有两列，$\boldsymbol{A}$ 有三行，由于 $2\neq3$，所以 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ 也不存在。

（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}_{4\times1}$　　$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&4&5\end{pmatrix}_{1\times3}$

解：先看 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 是否存在。$\boldsymbol{A}$ 有四行一列，列数是 1。$\boldsymbol{B}$ 有一行三列，行数是 1。由于 1=1，所以 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 存在，可以乘，至于结果是多少，我们一会儿再讨论。

再来看 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ 是否存在。$\boldsymbol{B}$ 有 3 列，$\boldsymbol{A}$ 有四行，由于 $4\neq3$，所以 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ 不存在。

通过以上两个例子可以知道，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ 不一定相等（有可能一个存在而另一个不存在）。

第一个能乘还是不能乘的问题讨论完了，接下来讨论乘完后得什么，这个问题又分两个阶段讨论。

先来讨论 $\boldsymbol{A}_{a\times b}\times\boldsymbol{B}_{b\times c}$，乘完后得到的新矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是一个几行几列的矩阵。**告诉大家：以乘号左侧矩阵的行数作为新矩阵的行数，以乘号右侧矩阵的列数作为新矩阵的列数。**

例. 判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 乘以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 后，得到一个几行几列的矩阵。

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}_{3\times2}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\6&7&8&9&10\end{pmatrix}_{2\times5}$

解：$\boldsymbol{A}$ 的列数是 2，$\boldsymbol{B}$ 的行数是 2，因为 2=2，所以 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 存在。由于 $\boldsymbol{A}$ 的行数是 3，$\boldsymbol{B}$ 的列数是 5，所以 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}_{3\times5}$。即 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 得到的是一个三行五列的矩阵。

而 $\boldsymbol{B}$ 的列数是 5，$\boldsymbol{A}$ 的行数是 3，因为 $5\neq3$，所以 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ 根本不存在。

（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}_{4\times1}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&4&5\end{pmatrix}_{1\times3}$

解：$\boldsymbol{A}$ 的列数是 1，$\boldsymbol{B}$ 的行数是 1，因为 1=1，所以 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 存在。由于 $\boldsymbol{A}$ 的行数是 4，$\boldsymbol{B}$ 的列数是 3，所以 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}_{4\times3}$。即 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 得到的是一个四行三列的矩阵。

而 $\boldsymbol{B}$ 的列数是 3，$\boldsymbol{A}$ 的行数是 4，因为 $3\neq4$，所以 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ 根本不存在。

再来讨论如何求出具体的值，我们还是用一道例题来讲解。

例. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$。

解：$\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}_{2\times3}$，$\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{B}_{3\times2}$，因为 3=3，所以 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 可以乘，且 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}_{2\times2}$。

已经知道 $\boldsymbol{C}$ 是一个两行两列的矩阵，所以 $\boldsymbol{C}$ 中一共有四个数。现在就要把这四个数求出来，暂且用以下矩阵代替。

$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}_{2\times2}$

注意：c_{mn} 中的 m 代表该数处于矩阵中的第 m 行，c_{mn} 中的 n 代表该数处于矩阵中的第 n 列，所以 c_{mn} 代表矩阵中处于第 m 行第 n 列的那个数。

下面开始求 $\boldsymbol{C}$，注意看：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}$$

c_{11}：用 $\boldsymbol{A}$ 的第一行数字乘以 $\boldsymbol{B}$ 的第一列对应数字，然后相加。

$\boldsymbol{A}$ 的第一行为 $(1\quad2\quad3)$

$\boldsymbol{B}$ 的第一列为$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$c_{11}=1\times1+2\times2+3\times3=14$

c_{12}：用 $\boldsymbol{A}$ 的第一行数字乘以 $\boldsymbol{B}$ 的第二列对应数字，然后相加。

$\boldsymbol{A}$ 的第一行为$(1\quad 2\quad 3)$

$\boldsymbol{B}$ 的第二列为$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

$c_{12}=1\times3+2\times2+3\times1=10$

c_{21}：用 $\boldsymbol{A}$ 的第二行数字乘以 $\boldsymbol{B}$ 的第一列对应数字，然后相加。

$\boldsymbol{A}$ 的第二行为$(3\quad 2\quad 1)$

$\boldsymbol{B}$ 的第一列为$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$c_{21}=3\times1+2\times2+1\times3=10$

c_{22}：用 $\boldsymbol{A}$ 的第二行数字乘以 $\boldsymbol{B}$ 的第二列对应数字，然后相加。

$\boldsymbol{A}$ 的第二行为$(3\quad 2\quad 1)$

$\boldsymbol{B}$ 的第二列为$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

$c_{22}=3\times3+2\times2+1\times1=14$

所以 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}_{2\times2}=\begin{pmatrix}14&10\\10&14\end{pmatrix}_{2\times2}$

为了巩固知识，再来看一道例题。

例． $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&4\\1&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ 。

解：这道题的解题方法与上题完全一致，只不过是再巩固一下而已。

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&4\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}$

$c_{11}=-2\times2+4\times(-3)=-16$

$c_{12}=-2\times4+4\times(-6)=-32$

$c_{21}=1\times2+(-2)\times(-3)=8$

$c_{22}=1\times4+(-2)\times(-6)=16$

所以 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-16&-32\\8&6\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&4\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}$

$c_{11}=2\times(-2)+4\times1=0$

$c_{12}=2\times4+4\times(-2)=0$

$c_{21}=(-3)\times(-2)+(-6)\times1=0$

$c_{22}=-3\times4+(-6)\times(-2)=0$

所以 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

1.8　矩阵的转置

矩阵 $\boldsymbol{A}$ ，它的转置记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 。

例. $A=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$ 求 A^{T}。

解：$A^{T}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$

1.9 方阵、对角矩阵、单位矩阵、逆矩阵

1.9.1 方阵

方阵：行数等于列数的矩阵称为方阵。

例. $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&3&0&9\\5&8&9&4\\0&4&2&2\\7&8&3&0\end{pmatrix}$都是方阵。

1.9.2 对角矩阵

对角线上的数有没有 0 无所谓，但除了对角线以外其他位置的数全是 0 的方阵叫对角矩阵。

注意：对角矩阵一定是方阵，并且是特殊的方阵。

例. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}$，　$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$都是对角矩阵。

切记：类似$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&4&0\\9&0&0\end{pmatrix}$这样的矩阵不是对角矩阵。因为对角线指的是从左上到右下的斜线，而不是从右上到左下的斜线，所以$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&4&0\\9&0&0\end{pmatrix}$不是对角矩阵，但它是方阵，因为行数=列数。

1.9.3 单位矩阵

对角线上的数全为 1 的对角矩阵称为单位矩阵。

注意：单位矩阵一定是方阵，也一定是对角矩阵，并且是特殊的方阵、特殊的对角矩阵。

例. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$等都是单位矩阵，$n$ 阶单位矩阵用 E_n 表示。例如：

$E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，　　$E_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

总结：前面讲到的三种矩阵是逐步递进的关系，对角矩阵是特殊的方阵，而单位矩阵又是特殊的对角矩阵，更是特殊的方阵。

1.9.4 逆矩阵

设 A 为 n 阶方阵（意思是 n 行 n 列的矩阵），B 也是 n 阶方阵，E 为 n 阶单位矩阵，若有：

$AB=E$（或 $BA=E$），则称 B 是 A 的逆矩阵，记作 $B=A^{-1}$。

记住，只有方阵才有逆矩阵，但是并不是只要是方阵都有逆矩阵。即矩阵 A 有逆矩阵，可以推出矩阵 A 一定是方阵，但是矩阵 A 是方阵却推不出矩阵 A 有逆矩阵。

那么 A^{-1} 到底该怎么去求？用公式法求 A^{-1}。公式是 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\times A^{*}$，即 A 的逆矩阵 A^{-1} 等于 A 的行列式的倒数再乘

以 $\boldsymbol{A}^*$。现在知道为什么只有方阵才有逆矩阵了吧，因为求逆的公式中有 $|\boldsymbol{A}|$ 这一项，$|\boldsymbol{A}|$ 指的是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的行列式。如果 $\boldsymbol{A}$ 不是方阵，怎么可能有对应的行列式呢（行列式的行数和列数一定相等，所以只有方阵才有对应的行列式）。

那么 $\boldsymbol{A}^*$ 又是什么呢，$\boldsymbol{A}^*$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵。不过光知道 $\boldsymbol{A}^*$ 叫什么名字是不够的，还得知道 $\boldsymbol{A}^*$ 如何去求。告诉大家，$\boldsymbol{A}^*$ 中的数是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的所有元素的代数余子式组成的矩阵再转置。如果不懂，来看一道例题。

例. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

解：用公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\times\boldsymbol{A}^*$

先来算 $|\boldsymbol{A}|$，$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{vmatrix}=2$ (计算过程省略)

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{2}\times\boldsymbol{A}^*$

现在要计算 $\boldsymbol{A}^*$ 了。$\boldsymbol{A}$ 中包含 9 个数，所以要算 9 次。还记得降阶法吗？是任意选中一行或一列，现在不选了，这 9 个数都要用。与降阶法不同的是这九个数自身不用在最前面乘了，但有一项（−1）还必须乘，即

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\2&-5\end{vmatrix}=-5,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&0\\-3&-5\end{vmatrix}=10,\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&1\\-3&2\end{vmatrix}=7$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&1\\2&-5\end{vmatrix}=2,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&1\\-3&-5\end{vmatrix}=-2,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}=2,\qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}=1$$

记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&10&7\\2&-2&-2\\-1&2&1\end{pmatrix}$

则 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-5&2&-1\\10&-2&2\\7&-2&1\end{pmatrix}$

则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\times\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5&2&-1\\10&-2&2\\7&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&1&-\frac{1}{2}\\5&-1&1\\\frac{7}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

此题就完成了。

介绍两个名词，务必记住。

名词 1：A_{mn} 称为 a_{mn} 的代数余子式。计算 A_{mn} 的方法是“$A_{mn}=(-1)^{m+n}\times$原行列式去掉第 m 行和第 n 列后剩下的行列式”，如上例中的 A_{11} 就是 a_{11} 的代数余子式。代数余子式是一个数。

名词 2：M_{mn} 称为 a_{mn} 的余子式。计算 A_{mn} 与计算 A_{mn} 的区别就是不用乘以前面的 $(-1)^{m+n}$。如上例中 a_{11} 的代数余子式为 $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\2&-5\end{vmatrix}=-5$，而 a_{11} 的余子式为 $M_{11}=\begin{vmatrix}1&0\\2&-5\end{vmatrix}=-5$。元素 a_{mn} 的代数余子式 A_{mn} 与余子式 M_{mn} 之间有如下转换关系：

$A_{mn}=(-1)^{m+n}M_{mn}$ 或 $M_{mn}=(-1)^{m+n}A_{mn}$

1.10　矩阵的向量表示法

例. $A=\begin{pmatrix}\vec{\alpha}&\vec{\beta}&\vec{\gamma}\end{pmatrix}$，其中 $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$、$\vec{\beta}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$、$\vec{\gamma}=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$。

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以用三个列向量 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$、$\vec{\gamma}$ 表示。$\begin{pmatrix}\vec{\alpha} & \vec{\beta} & \vec{\gamma}\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\2 & 5 & 8\\3 & 6 & 9\end{pmatrix}$ 是一样的，只不过换了一种表示方法而已。

当然，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可以用三个行向量表示：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\vec{\alpha}\\\vec{\beta}\\\vec{\gamma}\end{pmatrix}，其中\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\end{pmatrix}、\vec{\beta}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 8\end{pmatrix}、\vec{\gamma}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\end{pmatrix}。$$

关于向量有两点要注意：

- 向量分为行向量、列向量。行向量是行数为 **1**，列数为 $\boldsymbol{n}$ 的矩阵；列向量是行数为 $\boldsymbol{n}$,列数为 **1** 的矩阵。
- 用于表示向量的字母上方必须加“→”。如 $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，而不能写成 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$。

1.11 关于代数余子式的三句话

1.11.1 第一句话

改变行列式的一行，行列式的值变了，但新行列式中该行每个元素的代数余子式与原行列式中该行每个元素的代数余子式对应相等。

我们来验证一下第一句话。

例. $D_1=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{vmatrix}$

其中 1 的代数余子式是 $(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5 & 6\\8 & 9\end{vmatrix}$，2 的代数余子式是 $(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 6\\7 & 9\end{vmatrix}$，3 的代数余子式是 $(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & 5\\7 & 8\end{vmatrix}$

现在把第一行的三个数 1、2、3 改成任意三个数，比如 90、91、92，即

$D_2=\begin{vmatrix}90 & 91 & 92\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{vmatrix}$。

其中 90 的代数余子式是 $(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5 & 6\\8 & 9\end{vmatrix}$，91 的代数余子式是 $(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 6\\7 & 9\end{vmatrix}$，92 的代数余子式是 $(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & 5\\7 & 8\end{vmatrix}$

原行列式第一行 1，2，3 变为 90，91，92，虽然导致变换前后行列式的值发生了改变（$D_1\neq D_2$），但是 1 和 90，2 和 91，3 和 92 的代数余子式是一样的。这就是“第一句话”想告诉大家的。

1.11.2 第二句话

一个行列式某行的每个数分别乘以自己的代数余子式后相加，就是行列式的值；一个行列式某行的每个数分别乘以其他任意一行与其同列数的代数余子式后相加，等于 **0**。

例. $A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{vmatrix}$

$$则必有\begin{cases}1A_{11}+2A_{12}+3A_{13}=A\\4A_{21}+5A_{22}+6A_{23}=A\\7A_{31}+8A_{32}+9A_{33}=A\\4A_{11}+5A_{12}+6A_{13}=0\\7A_{11}+8A_{12}+9A_{13}=0\\1A_{21}+2A_{22}+3A_{23}=0\\7A_{21}+8A_{22}+9A_{23}=0\\1A_{31}+2A_{32}+3A_{33}=0\\4A_{31}+5A_{32}+6A_{33}=0\end{cases}$$

1.11.3 第三句话

对于任意 n 阶行列式来说，$X_1A_{m1}+X_2A_{m2}+\cdots+X_nA_{mn}$ 的值就是把原行列式的第 m 行变为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 后新行列式的值。

第三句话是由前两句话推出来的，它也是三句话中最重要的一句话。

例. 对于任意三行三列的行列式来说，$A_{11}+A_{12}+A_{13}$ 的值就是把原行列式的第一行变为 1，1，1 后新行列式的值。

如 $A=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$，则 $A_{11}+A_{12}+A_{13}=\begin{vmatrix}1&1&1\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$

例. 对于任意三行三列的行列式来说，$3A_{11}+4A_{12}+5A_{13}$ 的值就是把原行列式的第一行变为 3，4，5 后新行列式的值。

如 $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$，$3A_{11}+4A_{12}+5A_{13}=\begin{vmatrix}3&4&5\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$

例. 对于任意三行三列的行列式来说，$3A_{21}+4A_{22}+5A_{23}$ 的值就是把原行列式的第二行变为 3，4，5 后新行列式的值。

如 $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$，$3A_{21}+4A_{22}+5A_{23}=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&4&5\\7&8&9\end{vmatrix}$

例. 对于任意四阶行列式来说，$8A_{31}+9A_{32}+46A_{33}+2A_{34}$ 的值就是把原行列式的第三行变为 8，9，46，2 后新行列式的值。

如 $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{vmatrix}$，$8A_{31}+9A_{32}+46A_{33}+2A_{34}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\8&9&46&2\\13&14&15&16\end{vmatrix}$

有一个很重要的知识点需要注意，那就是：**给出的加法式子中的项数必须与行列式的阶数相同才行，否则的话需要补 0，来看下面例子。**

例. $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{vmatrix}$，计算 $1A_{21}+2A_{22}+3A_{23}$。

有的同学这样做：$1A_{21}+2A_{22}+3A_{23}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{vmatrix}$，然后由于有两行相同，故答案为 0。**这种做法完全错误，**之所以错误，是因为题目中所给的行列式是一个四行四列（四阶）的行列式，而计算的加法式子只含三项，所以不能这么做。

正确的做法：将所求的式子 $1A_{21}+2A_{22}+3A_{23}$ 改写为 $1A_{21}+2A_{22}+3A_{23}+0A_{24}$，然后：

$$1A_{21}+2A_{22}+3A_{23}+0A_{24}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&0\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{vmatrix}$$

本节讲完了，下面来看相应的考研题。

$\boxed{\text{考研题 1.1}}$ 设 $|A|=\begin{vmatrix}-2&2&-2&2\\1&2&3&4\\1&1&1&1\\2&-1&3&5\end{vmatrix}$，计算：（1）$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$ （2）$M_{31}+M_{32}+M_{33}+M_{34}$

解：

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=1A_{41}+1A_{42}+1A_{43}+1A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix}-2&2&-2&2\\1&2&3&4\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0$$

（2）由 1.9 节可知，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

故 $M_{31}+M_{32}+M_{33}+M_{34}=A_{31}-A_{32}+A_{33}-A_{34}$

$$=\begin{vmatrix}-2&2&-2&2\\1&2&3&4\\1&-1&1&-1\\2&-1&3&5\end{vmatrix}$$

$=0$（因为此行列式的第一,三行成比例）

考研题 1.2 设 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\5&5&5&3&3\\3&2&5&4&2\\2&2&2&1&1\\4&6&5&2&3\end{vmatrix}$，求：（1）$A_{31}+A_{32}+A_{33}$ （2）$A_{34}+A_{35}$

解：把这道题的两问一起做。

$$5A_{31}+5A_{32}+5A_{33}+3A_{34}+3A_{35}$$

$$=5\left(A_{31}+A_{32}+A_{33}\right)+3\left(A_{34}+A_{35}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\5&5&5&3&3\\5&5&5&3&3\\2&2&2&1&1\\4&6&5&2&3\end{vmatrix}=0$$

$$2A_{31}+2A_{32}+2A_{33}+1A_{34}+1A_{35}$$

$$=2\left(A_{31}+A_{32}+A_{33}\right)+1\left(A_{34}+A_{35}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\5&5&5&3&3\\2&2&2&1&1\\2&2&2&1&1\\4&6&5&2&3\end{vmatrix}=0$$

把上面两个式子写在一起：

$$\begin{cases}5\left(A_{31}+A_{32}+A_{33}\right)+3\left(A_{34}+A_{35}\right)=0\\2\left(A_{31}+A_{32}+A_{33}\right)+1\left(A_{34}+A_{35}\right)=0\end{cases}$$

设 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=x,\quad A_{34}+A_{35}=y$，则有：

$\begin{cases}5x+3y=0\\2x+y=0\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$

所以 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=0,\quad A_{34}+A_{35}=0$。

1.12 克拉默法则的推论

在 1.5 节中讲了克拉默法则，本节讲克拉默法则的推论，具体来说就是四个充分必要条件。在正式介绍之前，要强调很重要的一点，那就是：**四个充分必要条件中都会出现“方程组”一词，其意是指同时满足如下两个条件的方程组。**

（1）方程组中每个方程的形式都是 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$（其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b$ 为任意常）。

（2）方程组包含的方程个数等于未知数个数。

下面开始介绍四个充分必要条件。

齐次方程组

① 系数行列式 $\boldsymbol{D}=\mathbf{0} \Leftrightarrow$ 该齐次方程组有无穷多组解（非唯一解）（非零解）。

② 系数行列式 $\boldsymbol{D}\neq\mathbf{0} \Leftrightarrow$ 该齐次方程组有唯一零解。

非齐次方程组

③ 系数行列式 $\boldsymbol{D}=\mathbf{0} \Leftrightarrow$ 该非齐次方程组有无穷多组解（非唯一解）或无解。

④ 系数行列式 $\boldsymbol{D}\neq\mathbf{0} \Leftrightarrow$ 该非齐次方程组有唯一解（用 **1.5** 节讲的方法去计算）。

下面逐一详细解释四个充分必要条件。

首先对“$\Leftrightarrow$”、“系数行列式 D”、“齐次方程组和非齐次方程组”三者做一下解释。

（1）四个充分必要条件中都出现了“$\Leftrightarrow$”，符号“$A \Leftrightarrow B$”的意思是 A 与 B 互为充分必要条件。

（2）“系数行列式 D”是什么意思？下面举例说明。

例如，在方程组

$$\begin{cases} 8x_1+6x_2 \qquad\qquad +5x_4=0 \\ 9x_1+7x_2+4x_3 \quad -2x_4=0 \\ 3x_1-8x_2-12x_3 \quad +15x_4=0 \\ 6x_1 \qquad\quad -8x_3 \quad +9x_4=0 \end{cases}$$
中，D 为
$$\begin{vmatrix} 8 & 6 & 0 & 5 \\ 9 & 7 & 4 & -2 \\ 3 & -8 & -12 & 15 \\ 6 & 0 & -8 & 9 \end{vmatrix}。$$

（3）为了解释“非齐次方程组”一词，先来给大家举两个例子。

例.
$$\begin{cases} 8x_1+6x_2 \qquad\qquad +5x_4=0 \\ 9x_1+7x_2+4x_3 \quad -2x_4=0 \\ 3x_1-8x_2-12x_3 \quad +15x_4=0 \\ 6x_1 \qquad\quad -8x_3 \quad +\ 9x_4=0 \\ 2x_1-4x_2+6x_3 \quad -7x_4=0 \end{cases}$$
就是一个齐次方程组。

例.
$$\begin{cases} 18x_1+3x_2 \qquad\qquad -4x_4=2 \\ 5x_1+6x_2+\ 7x_3 \quad +8x_4=0 \\ 6x_1-14x_2+9x_3 \quad -10x_4=3 \\ 7x_1 \ \ -9x_2 \qquad\qquad +\ 6x_4=0 \end{cases}$$
就是一个非齐次方程组。

通过以上两个例子，引出齐次方程组和非齐次方程组的定义：**若某方程组中所有方程等式右侧的常数全为 0，则该方程组称为齐次方程组，否则，该方程组为非齐次方程组。**

接下来给大家逐个介绍四个充分必要条件。

1.12.1　第一个充分必要条件

先看第一个充分必要条件“**系数行列式 $\boldsymbol{D}=\mathbf{0} \Leftrightarrow$ 该齐次方程组有无穷多组解（非唯一解）（非零解）**”。这句话的意思是：计算齐次方程组系数行列式 D 的值，如果 D 的值为 0，则说明该齐次方程组有无穷多组解。什么叫“无穷多组解”。$\begin{cases} x_1=a_1 \\ x_2=a_2 \\ x_3=a_3 \\ x_4=a_4 \end{cases}$，这叫 x_1、x_2、x_3、x_4 的**一组**取值，如果这组取值能使方程组成立，那么这组取值就称为该方程组的**一组**解。

所谓某方程组有无穷多组解，指的是 x_1,x_2,x_3,x_4 有无穷多组取值都可以让该方程组成立。现在明白了吧，由于是充分必要条件，所以若某齐次方程组有无穷多组解，那么也能由此推出该齐次方程组的系数行列式 D 的值为 0。

至此，第一个充分必要条件还没有讲完，现在继续讲。对于齐次方程组来说，有无穷多组解和有非唯一解是一个意思，因为对于齐次方程组而言，要不就只有唯一的一组解，要不就肯定有无穷多组解，**不可能**出现**只有**两组解、三组解等的情况。所以说对于齐次方程组来说，有无穷多组解和有非唯一解是一个意思。正因为如此，才在后面写了个括号，括号里是“非唯一解”。

另外，对于齐次方程组来说，有无穷多组解和有非零解也是同一个意思。因为对于齐次方程组而言，如果它有唯一的一组解，一定就是零解（所有未知数全取 0）。所以某齐次方程组有非零解意味着该齐次方程组有非唯一解，刚才已经告诉大家了，齐次方程组有非唯一解和有无穷多解是一个意思，所以，齐次方程组有非零解与有无穷多解也是一个意思。

综上所述，对于齐次线性方程组来说：有无穷多解、有非唯一解、有非零解的意思完全一样。

现在第一个充分必要条件**“系数行列式 $D=0 \Leftrightarrow$ 该齐次方程组有无穷多组解（非唯一解）（非零解）”**已经解释完了。

1.12.2 第二个充分必要条件

现在再来看第二个充分必要条件“**系数行列式 $D\neq 0 \Leftrightarrow$ 该齐次方程组有唯一零解**”的意思。千万别忘了，第一个充分必要条件和第二个充分必要条件针对的都是齐次方程组。第二个充分必要条件的意思是：计算出齐次方程组的系数行列式 D 的值，如果 D 的值不为 0，则说明该齐次方程组只有唯一的一组解。对于齐次方程组而言，有“唯一解”和有“唯一零解”意思完全一样，因此用的词是“唯一零解”。另外，由于是充分必要条件，所以若某齐次方程组有唯一零解，那么也能由此推出该齐次方程组的系数行列式 D 的值一定不为 0。

第二个充分必要条件**“系数行列式 $D\neq 0 \Leftrightarrow$ 该齐次方程组有唯一零解”**给大家解释完了。

到目前为止，四个充分必要条件的前两个已经给大家解释完了，接下来看第三和第四个充分必要条件。

1.12.3 第三个充分必要条件

第三个充分必要条件“**系数行列式 $D=0 \Leftrightarrow$ 该非齐次方程组有无穷多组解（非唯一解）或无解**”是针对非齐次方程组的，其中的 D 仍然指的是方程组中所有未知数的系数所组成的行列式，其含意是：计算非齐次方程组系数行列式 D 的值，如果 $D=0$，则说明该非齐次方程组有无穷多组解或无解。由于是充分必要条件，反之也成立。

值得注意的是，无论齐次方程组是怎样的，都不可能无解，因为所有未知数全取 0 一定是齐次方程组的一组解，但非齐次方程组有可能无解。另外，由于非齐次方程组也不可能出现只有两组或三组解的情况，所以某非齐次方程组有无穷多组解和有非唯一解的意思是一样的，因此在“无穷多组解”后面括号里，加了“非唯一解”。

关于第三个充分必要条件“**系数行列式 $D=0 \Leftrightarrow$ 该非齐次方程组有无穷多组解（非唯一解）或无解**”的解释到此结束。

1.12.4 第四个充分必要条件

最后来看第四个充分必要条件“**系数行列式 $D\neq 0 \Leftrightarrow$ 该非齐次方程组有唯一解（用前面 1.5 节讲的方法去计算）**”，其含意是：计算出非齐次方程组系数行列式 D 的值，如果 $D\neq 0$，则说明该非齐次方程组有唯一解。怎么把这“唯一解”求出来呢？用之前 1.5 节所讲的方法，明白了吧。

好，本节已经讲完了，下面我们来看相应的考研题。

考研题 1.3 问 λ 取何值时，齐次线性方程组：

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0\\ 2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0\end{cases}$$

有非零解。

解：根据第一个充分必要条件得出：

此方程组有非零解 $\Leftrightarrow D=0$。

所以 $\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$

解出 λ 即可，求解过程如下：

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\text{（利用1.4节中讲的性质5，第三行}\times 2\text{以后加到第一行）}$$

$$=\begin{vmatrix}3-\lambda & 0 & 6-2\lambda\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\text{（利用1.4节中讲的性质5，第一列}\times -2\text{以后加到第三列）}$$

$$=\begin{vmatrix}3-\lambda & 0 & 0\\ 2 & 3-\lambda & -3\\ 1 & 1 & -\lambda-1\end{vmatrix}\text{（利用1.3节，选择第一行使用降阶法）}$$

$$=(3-\lambda)(\lambda-2)\lambda$$

$$=0$$

解得 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=3$

这道题做完了，但是需要注意的是：此题求解行列式的过程是我的做法，一百个人可能有一百种不同的求解行列式的方法，但是最后的答案肯定是一样的。

考研题 1.4　设：

$$\vec{\xi}=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)^{\mathrm{T}},\quad \vec{\xi}^{\mathrm{T}}\vec{\xi}=\sum_{i=1}^{n}a_i^2=1$$

证明 $\left|E-\vec{\xi}\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\right|=0$

解：先把这道题翻译一下。$\vec{\xi}$ 是一个列向量，注意，它是列向量而不是行向量，因为右上角有转置符号“T”。接着看 $\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\vec{\xi}=1$，1 是一个数，两个向量相乘怎么会得到一个数呢？一点儿也不奇怪，现在就来帮大家分析一下“$\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\vec{\xi}=\sum_{i=1}^{n}a_i^2=1$”的意思。

根据题意 $\vec{\xi}=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$

所以，$\vec{\xi}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$

所以，$\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\vec{\xi}=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)\times\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$

这是矩阵与矩阵相乘，一行 n 列的矩阵乘以 n 行一列的矩阵，最后得到的一定是一个一行一列的矩阵。一行一列的矩阵就是一个数，明白了吧。

也就是说，就算题中没告诉我们 $\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\vec{\xi}=\sum_{i=1}^{n}a_i^2=1$ 这句话，也能知道如下两点：

- $\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\vec{\xi}$ 的结果是一个数字。
- $\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\vec{\xi}=a_1\times a_1+a_2\times a_2+\cdots+a_n\times a_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$

这句话的目的就是想告诉我们：这个数字是 1，仅此而已。

再来看最后要证明的是什么。

$$\left|E-\vec{\xi}\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\right|=0$$

先来看 $\vec{\xi}\vec{\xi}^{\mathrm{T}}$ 是什么？$\vec{\xi}=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$，$\vec{\xi}^{\mathrm{T}}=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$，所以 $\vec{\xi}\vec{\xi}^{\mathrm{T}}$ 等于 $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}_{n\times1}\times\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)_{1\times n}$。一个 n 行一列的矩阵乘以一个一行 n 列的矩阵，最后得到的一定是一个 n 行 n 列的矩阵。由此可知，$\boldsymbol{E}$ 这个单位矩阵也是 n 行 n 列的，否则没法减。当然，$\boldsymbol{E}-\vec{\xi}\vec{\xi}^{\mathrm{T}}$ 得到的仍然是一个 n 行 n 列的矩阵。现在要证明的就是，这个矩阵所对应行列式的值为 0，即 $\left|\boldsymbol{E}-\vec{\xi}\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\right|=0$。

这道题考的就是四个充分必要条件的第一个。只要构造一个齐次方程组，把此题中的 $\left|\boldsymbol{E}-\vec{\xi}\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\right|$ 作为该方程组的系数行列式 D。根据四个充分必要条件的第一个，要证明 $D=0$，只需证明我们构造的这个齐次方程组有非零解即可。

我们应该这样构造这个齐次方程组：

$$\left(\boldsymbol{E}-\vec{\xi}\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\right)\vec{X}=\vec{0}$$

同学们，看到这里是否觉得奇怪，$\left(\boldsymbol{E}-\vec{\xi}\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\right)\vec{X}=\vec{0}$ 怎么是一个齐次方程组呢？印象中的齐次方程组应该是下面这个样子的：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\2x_1+9x_2-4x_3+8x_4=0\\5x_1-6x_2+10x_3=0\\6x_1-5x_2-9x_4=0\end{cases}$$

那么现在要告诉大家，以上这个方程组还有另外一种写法 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&9&-4&8\\5&-6&10&0\\6&-5&0&-9\end{pmatrix},\quad \vec{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\quad \vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

现在把 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 展开：

$\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$

即 $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&9&-4&8\\5&-6&10&0\\6&-5&0&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

根据矩阵乘法，有 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\2x_1+9x_2-4x_3+8x_4=0\\5x_1-6x_2+10x_3=0\\6x_1-5x_2-9x_4=0\end{cases}$

发现了吧，与想象中的方程组是一样的，所以以后记住：齐次方程组可以用 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 表示（同理，非齐次方程组可以用 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{\beta}$ 表示）。

现在回到此题，我们构造齐次方程组 $\left(\boldsymbol{E}-\vec{\xi}\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\right)\vec{X}=\vec{0}$，由于 $\left(\boldsymbol{E}-\vec{\xi}\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\right)\vec{\xi}\overset{☆}{=}\vec{\xi}-\vec{\xi}\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\vec{\xi}\overset{☆}{=}\vec{\xi}-\vec{\xi}\left(\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\vec{\xi}\right)=\vec{\xi}-\vec{\xi}\times1=\vec{\xi}-\vec{\xi}=\vec{0}$

好，现在我们只看式中最左侧和最右侧，可得：$\left(\boldsymbol{E}-\vec{\xi}\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\right)\vec{\xi}=\vec{0}$

这说明什么？说明 $\vec{\xi}$ 是齐次方程组 $\left(\boldsymbol{E}-\vec{\xi}\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\right)\vec{X}=\vec{0}$ 的解。

而 $\vec{\xi}$ 不是零向量（如果是零向量的话，意味着 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都为 0，那么 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ 就肯定是 0，而不会是 1，所以 $\vec{\xi}$ 不是零向量），说明 $\left(\boldsymbol{E}-\vec{\xi}\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\right)\vec{X}=\vec{0}$ 这个齐次方程组有非零解。再根据第一个充分必要条件，可得 $\left|\boldsymbol{E}-\vec{\xi}\vec{\xi}^{\mathrm{T}}\right|=0$。

此题做完了，不难。但是要提醒一下，上面有两处画了☆，第一处☆意思是说该处利用了矩阵乘法对矩阵加减法的分配律，第二处☆意思是说该处利用了矩阵乘法的结合律，这两个算律在第 2 章会讲到，但这题用到了，怕大家看不懂，所以在这里提醒一下。

$\boxed{\text{考研题 1.5}}$ 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$，证明 $|\boldsymbol{A}|=0$。

解： $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n\right)$

$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$

$\Rightarrow \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$（注意，$\boldsymbol{O}$的意思是零矩阵，不是数0，因为两个矩阵相减肯定还是矩阵）

$\Rightarrow \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$（任何矩阵乘以单位矩阵$\boldsymbol{E}$都等于它本身，所以$\boldsymbol{A}$可以写成$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{E}$）

$\overset{\Delta}{\Rightarrow} A(A-E)=O$（Δ处利用了矩阵乘法对于矩阵加减法的分配律，第2章会讲）

好，现在我们关注这个式子 $A(A-E)=O$，把矩阵 $A-E$ 用列向量表示，即矩阵，把等式右侧的零矩阵也用列向量表示，即矩阵 $O=\left(\vec{0},\vec{0},\cdots,\vec{0}\right)$，则 $A(A-E)=O$ 这个等式可以根据矩阵的乘法拆成 n 个等式：

$A\vec{a}_1=\vec{0}$（此 $\vec{0}$ 为零矩阵中最左侧的零向量）

$A\vec{a}_2=\vec{0}$（此 $\vec{0}$ 为零矩阵中从左向右数第二个零向量）

……

$A\vec{a}_n=\vec{0}$（此 $\vec{0}$ 为零矩阵中从左向右数最后一个零向量）

而这些等式中的 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 正是齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的各组解。又根据题意 $A\neq E$，说明 $A-E$ 不是零矩阵，而我们把矩阵 $A-E$ 分成了 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 这些列向量，所以 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 列向量中至少有一个列向量不是零向量，即 $A\vec{X}=\vec{0}$ 有非零解，根据本节中的第一个充分必要条件，得 $|A|=0$。

1.13 关于行列式的两种计算题

1.13.1 抽象行列式的计算

先来给大家解释一下什么叫抽象行列式的计算。所谓抽象行列式的计算，指的是题中并没有告知某行列式每行每列的具体数值是多少，但是却让我们计算该行列式的值，这种题就叫做抽象行列式的计算题。

那么，该如何去计算抽象行列式呢？可以利用以下七个公式（这七个公式一定要背下来），其中矩阵 A、矩阵 B 均为 n 阶方阵。

公式① $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ **（此公式其实就是可逆矩阵的定义式）**

公式② $|A|\times|A^{-1}|=1$

公式③ $|A^*|=|A|^{n-1}$

公式④ $(kA)^*=k^{n-1}\times A^*$（其中k为任意常数）

$|kA|=k^n\times|A|$（其中k为任意常数）

公式⑤ $|AB|=|BA|=|A|\times|B|=|B|\times|A|$

公式⑥ $AA^*=A^*A=|A|\times E$

公式⑦ $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

下面来看相应的考研题。

考研题 1.6 设 A 为 3×3 矩阵，B 为 4×4 矩阵，且 $|A|=1$，$|B|=-2$，则 $\left||B|\times A\right|=?$

解：

$\left||B|\times A\right|$（直接把$|B|$换为题中所给的-2）

$=|-2\times A|$（根据刚讲的七个公式的公式④）

$=(-2)^3\times|A|$（直接把$|A|$换为题中所给的1）

$=-8\times1$

$=-8$

考研题 1.7 设 A 是三阶方阵且 $|A|=2$，则 $\left|-|A|\times A\right|=?$

解：

$\left|-|A|\times A\right|$（直接把$|A|$换为题中所给的2）

$=|-2\times A|$（根据刚讲的七个公式的公式④）

$=(-2)^3\times|A|$（直接把$|A|$换为题中所给的2）

$=-8\times2$

$=-16$

考研题 1.8 设 A 为三阶方阵，A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵，$|A|=\dfrac{1}{8}$，计算 $\left|\left(\dfrac{1}{3}A\right)^{-1}-8A^*\right|$。

解：根据 1.9 节可知：$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，　则 $A^*=A^{-1}|A|=\frac{1}{8}A^{-1}$

所以：

$$\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-8A^*\right|$$

$$=\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-8\times\frac{1}{8}\times A^{-1}\right|$$

$=\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-A^{-1}\right|$（注意：接下来的等号用到了第2章的公式$(AB)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}$，

即$\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}=A^{-1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=A^{-1}\times 3=3A^{-1}$）

$=\left|3A^{-1}-A^{-1}\right|$

$=\left|2A^{-1}\right|$（根据刚讲完的七个公式的公式④）

$=2^3\left|A^{-1}\right|$（根据刚讲完的七个公式的公式②）

$=8\times\frac{1}{|A|}$（直接把$|A|$换为题中所给的$\frac{1}{8}$）

$$=8\times\frac{1}{\frac{1}{8}}$$

$=64$

1.13.2　具体行列式的计算

先来给大家解释一下什么叫具体行列式的计算。所谓具体行列式，指的是题中告诉了我们某行列式每行每列的数值是多少，求该行列式的值，这种题就称为具体行列式的计算题。

具体行列式的计算题又分为两种题型。

第一种题型，给的是一个不带省略号的行列式。

例如，计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}$

第二种题型：给的是一个带有省略号的行列式。

例如，计算行列式$\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\2&2&2&\cdots&n\end{vmatrix}$

接下来就开始拆解这两种不同的出题形式并分别介绍各自的解题方法。

第一种题型

计算不带省略号的行列式（共六种方法）。

方法 1：利用之前讲过的 1.3 节+1.4 节。

考研题 1.9 计算行列式：

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{5}{2}&\frac{1}{5}&\frac{1}{2}\\1&-1&\frac{3}{5}&\frac{3}{2}\\\frac{2}{3}&\frac{9}{2}&-\frac{2}{5}&\frac{5}{2}\\-\frac{1}{7}&\frac{2}{7}&-\frac{1}{7}&\frac{3}{7}\end{vmatrix}$$

解：对原行列式的第四行使用 1.4 节中的性质 3，得：

$$\frac{1}{7}\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{3}{5} & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{9}{2} & -\frac{2}{5} & \frac{5}{2} \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

再对现在的这个行列式的第一、二、三、四列分别使用 1.4 节中的性质 3，得：

$$\frac{1}{7}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 9 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

利用 1.4 节中的性质 5，第一行×（−3）后加到第二行，得：

$$\frac{1}{7}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -13 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

利用 1.3 节中所讲的降阶法，选取第二行（因为第二行中的 0 比较多），得：

$$\frac{13}{420}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \\ -3 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

利用 1.3 节中所讲的三阶行列式计算公式，得 $-\frac{13}{14}$。

方法 2：利用范德蒙行列式。

注意：范德蒙行列式是解决不带省略号行列式计算题的第二种方法，但是并不是所有不带省略号的题都可以用范德蒙行列式来做，范德蒙行列式只能用于特定的题型。

范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & \cdots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \cdots & \cdots & a_n^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$=(a_2-a_1)\times(a_3-a_2)(a_3-a_1)\times(a_4-a_3)(a_4-a_2)(a_4-a_1)\times\cdots\times(a_n-a_{n-1})(a_n-a_{n-2})\cdots(a_n-a_1)$$

考研题 1.10　计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$

解：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}=(3-2)\times(4-3)\times(4-2)=2$

考研题 1.11　计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 16 & 9 & 25 \\ 8 & 64 & 27 & 125 \end{vmatrix}$

解：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 16 & 9 & 25 \\ 8 & 64 & 27 & 125 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2^2 & 4^2 & 3^2 & 5^2 \\ 2^3 & 4^3 & 3^3 & 5^3 \end{vmatrix}$

$$=(4-2)\times(3-4)\times(3-2)\times(5-3)\times(5-4)\times(5-2)$$
$$=2\times(-1)\times1\times2\times1\times3$$
$$=-12$$

方法 3：利用定义法。

所谓利用定义法，指的就是利用行列式的定义来计算，那么首先应该了解行列式的定义是什么，才能用行列式的定义去计算。在本章前面，只是告诉大家行列式长什么样，但没有讲行列式定义是什么，并非忘记了，而是要留到现在介绍，现在介绍行列式定义的好处是：介绍完之后就可以趁热打铁介绍利用行列式的定义来计算行列式。

要想知道行列式的定义，首先来看一下逆序数的定义。

逆序数：在一个由 n 个元素所组成的排列中，如果一个较大的数排在一个较小数的左侧，就称这两个数构成一个逆序。一个排列中逆序的总数，称为这个排列的逆序数。

例. 排列 5　4　2　1　3　的逆序数是多少？

解： 首先从 5 开始往右看。5-4 是一个逆序，5-2 是一个逆序，5-1 是一个逆序，5-3 是一个逆序，所以从 5 开始一共有四个逆序。

我们再从 4 开始往后看。4-2 是一个逆序；4-1 是一个逆序；4-3 是一个逆序，所以从 4 开始一共有三个逆序。

接着，从 2 往右看。2-1 是一个逆序；2-3 不是逆序，因为 2 比 3 小，所以从 2 开始一共有一个逆序。

最后，我们从 1 开始开始往后看。1-3 不是逆序，因为 1 比 3 小，所以从 1 开始没有逆序。

故排列 5　4　2　1　3 的逆序数为 4+3+1+0=8。

知道了逆序数的概念后，我们来看 n 阶行列式的定义：

由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3,\cdots,n)$ 组成的 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为 n 阶行列式。D 的值是所有取自不同列也不同行的 n 个元素乘积的代数和，但是各项的前面都要乘一个 $(-1)^{\text{行标的逆序数+列标的逆序数}}$。

也许大家看了上面这段话后，仍然不太理解行列式的定义，没有关系，我带着你们用行列式的定义来推导二阶行列式的计算公式。相信在推导完之后，你对行列式的定义会彻底明白，下面开始推导。

由 1.3 节中的“两行两列行列式的计算”可知，二阶行列式的计算公式为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，当时我说记住就行了，不过现在，为了让你们明白行列式的定义，我要利用行列式的定义来推导此公式。

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 是二阶的行列式。根据定义，让这四个数中不同行也不同列的数相乘，一共有两项，即 $a_{11}a_{22}$ 和 $a_{12}a_{21}$，然后，分别确定这两项的正负号。

（1）先确定 $a_{11}a_{22}$ 的正负号，确定方法如下：

a_{11}　　a_{22}

行标的排列为 1　2，逆序数为 0。

列标的排列为 1　2，逆序数为 0。

$(-1)^{0+0}a_{11}a_{22}=a_{11}a_{22}$，符号确定完了，由于 $(-1)^{0+0}=1$，所以取“＋”号。

注意：行标的排列之所以是 1　2，是因为 a_{11} 处于行列式中的第一行，a_{22} 处于行列式中的第二行。列标同理。

这时，有的同学可能会提出质疑，$a_{11}a_{22}$ 和 $a_{22}a_{11}$ 是一回事，如果按照 $a_{22}a_{11}$ 算逆序数，结果会不会有变化？我们来看一下：

a_{22}　　a_{11}

行标的排列为 2　1，逆序数为 1。

列标的排列为 2　1，逆序数为 1。

$(-1)^{1+1}a_{22}a_{11}=a_{22}a_{11}$，看见了吧，一样，符号还是正的。

（2）确定 $a_{12}a_{21}$ 的符号，确定方法如下：

a_{12}　　a_{21}

行标的排列为 1　2，逆序数为 0。

列标的排列为 2　1，逆序数为 1。

$(-1)^{0+1}a_{12}a_{21}=a_{12}a_{21}$，符号确定完了，由于 $(-1)^{0+1}=-1$，所以取“－”号。

最后把这两项相加，$a_{11}a_{22}+(a_{12}a_{21})=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，看见了吧，我们已经用定义推导出了二阶行列式的计算公式了。为了检测你是否真的掌握了行列式的定义，可推导一下三阶行列式的计算公式。

三阶行列式的计算公式推导过程：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

首先找出所有不同行、不同列的数相乘：$a_{11}a_{22}a_{33}$、$a_{12}a_{21}a_{33}$、$a_{13}a_{22}a_{31}$、$a_{11}a_{23}a_{32}$、$a_{12}a_{23}a_{31}$、$a_{13}a_{21}a_{32}$，一共有六项，然后确定每项的正负号，确定方法如下所述。

$a_{11}a_{22}a_{33}$

行标 1　2　3，逆序数为 0。

列标 1　2　3，逆序数为 0。

所以 $(-1)^{0+0}=1$。

$a_{12}a_{21}a_{33}$

行标 1　2　3，逆序数为 0。

列标 2　1　3，逆序数为 1。

所以 $(-1)^{0+1}=-1$。

$a_{13}a_{22}a_{31}$

行标 1　2　3，逆序数为 0。

列标 3　2　1，逆序数为 3。

所以 $(-1)^{0+3}=-1$。

$a_{11}a_{23}a_{32}$

行标 1　2　3，逆序数为 0。

列标 1　3　2，逆序数为 1。

所以 $(-1)^{0+1}=-1$。

$a_{12}a_{23}a_{31}$

行标 1　2　3，逆序数为 0。

列标 2　3　1，逆序数为 2。

所以 $(-1)^{0+2}=1$。

$a_{13}a_{21}a_{32}$

行标 1　2　3，逆序数为 0。

列标 3　1　2，逆序数为 2。

所以 $(-1)^{0+2}=1$。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

相信大家已经了解行列式的定义了，下面来看几道考研题。

考研题 1.12　在五阶行列式中，项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号是什么？

解：此题虽然没有给出一个完整的五行五列的行列式让我们计算，但是也要用行列式的定义来做，下面我把此题阐述得更清楚一些。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \boxed{a_{25}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & \boxed{a_{43}} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & \boxed{a_{54}} & a_{55} \end{vmatrix}$$

这是一个五阶行列式，如果直接计算这个行列式的话，会十分麻烦，因为其不同行、不同列的数组成的乘积项共有 $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$ 项，此题要的就是这 120 项的其中一项“$a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$”的符号。

我们现在开始正式做这道题。

行标的排列为1　3　5　4　2，逆序数为 4。

列标的排列为2　1　4　3　5，逆序数为 2。

$(-1)^{4+2}=1$

所以 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号应该取正。

题就做完了。这种题一般的做法是首先将所给项的内部换一下顺序，把行标换为从小到大的顺序，这样就只算列标的逆序数即可，很简单。例如，此题可将 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 变为 $a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54}$，行标按从小到大的顺序排列，这样行标的逆序数一定为 0，就不用算了，只算列标的逆序数，然后符号为 $(-1)^{\text{列标的逆序数}}$。

$\boxed{\text{考研题 1.13}}$ 在四阶行列式中，求带负号且包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项。

解： 由行列式的定义，我们知道在四阶行列式中包含 a_{23} 和 a_{31} 的项有两项，分别为 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ 和 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$。题中要求符号是负的，我们来看一下。

$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$

行标 1　2　3　4，逆序数为 0。

列标 2　3　1　4，逆序数为 2。

$(-1)^{0+2}=1$

所以不是 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ 这项，而是 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$。

$\boxed{\text{考研题 1.14}}$ 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$

解： 定义法对于这种含 0 比较多的行列式计算题尤为适用，原因就是很多项都可以消掉。此题一看 0 比较多，于是想到用定义法。这个行列式有四行四列，$4!=4\times3\times2\times1=24$，说明不同行、不同列的乘积共有 24 项，但由于其中有很多 0，所以不用把这 24 项都写出来。通过用眼睛观察，很容易就会发现，在这 24 个乘积项中不为 0 的项其实一共只有四项，它们是 $a_1a_2a_3a_4, a_1b_2b_3a_4, b_1b_2b_3b_4, b_1a_2a_3b_4$，接下来要做的就是分别确定这四项中每一项的正负号。

$a_1a_2a_3a_4$

行标 1　2　3　4，逆序数为 0。

列标 1　2　3　4，逆序数为 0。

$(-1)^{0+0}=1$，所以此项符号为正。

$a_1b_2b_3a_4$

行标 1　2　3　4，逆序数为 0。

列标 1　3　2　4，逆序数为 1。

$(-1)^{0+1}=-1$，所以此项符号为负。

$b_1b_2b_3b_4$

行标 1　2　3　4，逆序数为 0。

列标 4　3　2　1，逆序数为 6。

$(-1)^{0+6}=1$，所以此项符号为正。

$b_1a_2a_3b_4$

行标 1　2　3　4，逆序数为 0。

列标 4　2　3　1，逆序数为 5。

$(-1)^{0+5}=-1$，所以此项符号为负。

综上所述，此题答案为 $a_1a_2a_3a_4-a_1b_2b_3a_4+b_1b_2b_3b_4-b_1a_2a_3b_4$。

方法 4：利用分块行列式。

先来说一下分块行列式的两个公式：

① $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{n\times n} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_{m\times m} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{n\times n} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_{m\times m} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{n\times n} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}_{m\times m} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

② $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{n\times n} \\ \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{n\times n} \\ \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}_{n\times n} \\ \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

$\boxed{\text{考研题 1.15}}$ 计算$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 11 & 12 \end{vmatrix}$

解：设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为$\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{O}$ 为$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$（注意：只有全 0 的矩阵才能设为 $\boldsymbol{O}$）。

则：
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{vmatrix} &= (1\times6-5\times2)\times(9\times12-10\times11) \\ &= -4\times(-2) \\ &= 8 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{考研题 1.16}}$ 计算$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

解：设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{O}$ 为$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

则：
$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}|$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -2\times1$$
$$= -2$$

注意：无论是几阶的单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，其所对应行列式的值都是 1。

方法 5：观察一次因式法。

$\boxed{\text{考研题 1.17}}$ 计算 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$

解：观察一下该行列式的第一、二行。第一行为 1，1，2，3，第二行为 1，$2-x^2$，2，3。当 $2-x^2=1$ 时，该行列式的前两行就一样了。也就是说，当 $2-x^2=1$ 即 $x=\pm1$ 时，该行列式的值为 0，所以可以得出如下结论：

设 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = \boxed{}$

则 $\boxed{}$ 中一定会含有 $(x-1)(x+1)$。

我们再来观察一下该行列式的第三、四行。第三行为 2，3，1，5，第四行为 2，3，1，$9-x^2$。当 $9-x^2=5$ 时，该行列式的第三行和第四行相同。也就是说，当 $9-x^2=5$，即 $x=\pm2$ 时，该行列式的值为 0。再结合刚才提到的“当 $x=\pm1$ 时，该行列式的值为 0”，我们可以知道 $\boxed{}$ 中一定含有 $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$。由于 D_4 中关于 x 的最高次数为 4，所以 $D_4 = k(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$，其中 k 为待确定的常数。

① 根据定义法可知，D_4 中含 x^4 的项为：

$1\times(2-x^2)\times1\times(9-x^2)-2\times(2-x^2)\times2\times(9-x^2)$

② 比较上述两式中 x^4 的系数，得 $k=-3$，

故 $D_4=-3(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

方法 6：当所给行列式的每行所有数字之和均相等时，完成以下步骤。

第一步，除了第一列以外的所有列都乘以 **1** 加到第一列，然后将第一列提到行列式之外，使得新行列式的第一列都变成 **1**。

第二步，把第一行乘以-**1** 加到除第一行以外的各行上，此时得到的一定是一个上/下三角行列式。

第三步，把对角线上的数相乘即可。

注意：

- 只有每行（或每列）所有元素之和均相等的行列式才能用此方法去计算，其他情况则不能用。
- 并不是只要每行（或每列）所有元素之和均相等的行列式就能用此方法计算，但是如果把范围限制在考研真题来看，一旦出现每行（或每列）所有元素之和均相等的行列式，就可以用方法 **6** 去计算。

$\boxed{\text{考研题 1.18}}$ 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$

解： 此行列式中每行所有元素之和均相等（都是 $3b+a$），所以可以用方法 6 进行计算。

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 3b+a & b & b & b \\ 3b+a & a & b & b \\ 3b+a & b & a & b \\ 3b+a & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$=(3b+a)\times\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$=(3b+a)\times\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$=(3b+a)\times(a-b)^3$$

第二种题型

计算带有省略号的行列式（共七种方法）。

方法 1：利用范德蒙行列式（与不带省略号行列式的计算方法 **2** 一样）。

$\boxed{\text{考研题 1.19}}$ 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

解： 原行列式为

$$(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})\cdots(x_n-x_1)$$

$$(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_{n-3})\cdots(x_{n-1}-x_1)$$

$$\cdots$$

$$(x_2-x_1)$$

$$=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)$$

注：$\prod$ 的意思是连乘，它只是一个数学符号而已，正如 $\sum$ 的意思是连加。

方法 2：利用定义法（与不带省略号的行列式的计算方法 **3** 一样）。

考研题 1.20 计算 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1997 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1998 \end{vmatrix}$

解：以上这个行列式共有 1998 行 1998 列，属于带有省略号的行列式。讲定义法时说过，定义法用于计算 0 比较多的行列式，而此题所给的行列式明显有很多 0，因此，采用定义法来计算。

在此行列式中，由不同行、不同列的数组成的且不为 0 的乘积项只有一项，它是

$1\times2\times3\times\cdots1998=1998!$

接下来要做的就是确定这一项的正负号。

行标 1　2　3　4　⋯　1998

所以行标的逆序数为 0。

列标 1997　1996　1995　⋯　1　1998

所以列标逆序数为 $(1998-2)+(1998-3)+\cdots+1=\dfrac{(1998-1)(1998-2)}{2}$

由于 $(-1)^{0+\frac{(1998-1)(1998-2)}{2}}=(-1)^{\frac{1997\times1996}{2}}$

所以此题的答案为 $(-1)^{\frac{1997\times1996}{2}}1998$。

下面的这道计算题用定义法来计算，只给出答案，计算过程仿照上例完成。

考研题 1.21 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$

本题答案为 $a^n+(-1)^{n-1}b$ 。

方法 3：当所给行列式每行所有数字之和均相等时，完成以下步骤。

第一步，除了第一列以外的所有列都乘以 **1** 加到第一列，然后将第一列提出到行列式之外，使得新行列式的第一列都变成 **1**。

第二步，把第一行乘以**-1** 加到除第一行以外的各行上，此时得到的一定是一个上/下三角行列式。

第三步，把对角线上的数相乘即可（与不带省略号的行列式的计算方法中方法 **6** 一致）。

注意：

- 只有每行（或每列）所有元素之和均相等的行列式，才能用此方法去计算，其他情况则不能用。
- 并不是只要每行（或每列）所有元素之和均相等的行列式就能用此方法去计算。但是如果把范围限定在考研真题来看，一旦出现每行（或每列）所有元素之和均相等的行列式，就可以用方法 **3** 去计算。

考研题 1.22 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

解：此行列式中每行所有元素之和均相等（都是 $a+(n-1)b$ ），所以此行列式可以用方法 3 来进行计算。那么现在完全按照方法 3 所讲的步骤来计算这道题，不要觉得死板，以后这种题就是生搬硬套。

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix}1 & b & b & \cdots & b\\1 & a & b & \cdots & b\\1 & b & a & \cdots & b\\\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\1 & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}$$

$$=\left[a+(n-1)b\right]\underbrace{\begin{vmatrix}1 & b & b & \cdots & b\\0 & a-b & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & a-b & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & a-b\end{vmatrix}}_{\text{这是上三角行列式，因为对角线下方都是0}}$$

$$=\left[a+(n-1)b\right]\times(a-b)^{n-1}$$

到此为止，带有省略号行列式的计算方法（共七种方法）中方法 1、方法 2 及方法 3 都讲完了。这三种方法其实在不带省略号的行列式的计算方法中也有。下面要讲的四种方法则是带省略号行列式的专用计算方法。

方法 4：某行（或某列）加上其余各行（或各列）的一定倍数。

注意：此方法适用于完成这种变换后，行列式立即呈上（或下）三角行列式的情况。

考研题 1.23 计算: $D_n=\begin{vmatrix}a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\1 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1}\end{vmatrix}$，其中 $a_1\cdots a_{n-1}\neq 0$

解： 第一列 $+\left(-\dfrac{1}{a_1}\right)\times$ 第二列 $+\left(-\dfrac{1}{a_2}\right)\times$ 第三列 $+\cdots+\left(-\dfrac{1}{a_{n-1}}\right)\times$ 第 n 列

$$D_n=\begin{vmatrix}a_0-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1\\0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\end{vmatrix}$$

这时的行列式已经是上三角行列式了。

$$=\left(a_1a_2\cdots a_{n-1}\right)\left(a_0-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}\right)$$

方法 5：各行（或各列）加减同一行（或同一列）的一定倍数。

注意： 方法 5 与方法 4 正好相反。方法 4 是把所有行（列）的一定倍数都加到某行（列）上去，而方法 5 则是所有行（列）都加减某行（列）的一定倍数。

方法 5 适用于完成这种变换后行列式立即或再经过其他方法可以呈上（或下）三角行列式的情形。也就是说，用完方法 5 不一定立即（但也有可能立即）呈现上/下三角行列式（这与方法 4 不同，方法 4 是用完后行列式一定立即就会呈上/下三角行列式）。

因此，方法 5 的使用是七种方法里最难判别的一种，为什么这么说呢？其实方法 4 和方法 5 何时使用都属于比较难判别的，因为它们都要根据完成此变换后行、列式变成什么样来判断。

拿方法 4 来举例，当判断一道计算行列式的题用不用方法 4 来计算时，需要判断这道题假设用方法 4 之后的结果，如果能立即变为上/下三角行列式，则说明应该用方法 4 计算——等于说需要倒着想。而一道行列式的计算题是否使用方法 5 计算就更加难判别，因为可能需要往后想两步而不是一步。想想如果这步用了方法 5，下一步再用某种方法后能不能将原行列式变为上/下三角行列式。如果能，则这步就用方法 5（当然了，也有可能用完方法 5 后的行列式立即变为上/下三角行列式。如果这样的话，就和方法 4 一样，往后想一步就可以了）。

但是，所谓的“难”是对初学者而言。熟能生出百巧来，当做题做多，熟练了之后，会发现实际上很容易。

考研题 1.24　计算 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\2&2&2&\cdots&n\end{vmatrix}$

解：利用方法 5，第二列乘以−1 后加到各列，得

$$D_n=\begin{vmatrix}-1&2&0&\cdots&0\\0&2&0&\cdots&0\\0&2&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&2&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}$$

再用 1.3 节中的降阶法（选取第一列，因为第一列只有一个非 0 的数，因此选择第一列，降阶时会非常方便）。

$$D_n=(-1)\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}\underbrace{\begin{matrix}2&0&\cdots&0\\2&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\2&0&\cdots&n-2\end{matrix}}_{\text{这是一个下三角行列式}}\end{vmatrix}$$

$$=-2(n-2)!$$

方法 6：加边法。

加边法的公式是：

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&*&*&\cdots&*\\0&a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

其中，*处的值可以任意添加，因此，要仔细观察行列式，添加适当的数。

考研题 1.25　计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1+x_1^2&x_1x_2&\dots&x_1x_n\\x_2x_1&1+x_2^2&\dots&x_2x_n\\\dots&\dots&\dots&\dots\\x_nx_1&x_nx_2&\dots&1+x_n{}^2\end{vmatrix}$

解：采用加边法，将 D_n 加一行一列构成 D_{n+1}。

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1^2&x_1x_2&\dots&x_1x_n\\x_2x_1&1+x_2^2&\dots&x_2x_n\\\dots&\dots&\dots&\dots\\x_nx_1&x_nx_2&\dots&1+x_n{}^2\end{vmatrix}=D_{n+1}=\begin{vmatrix}1&x_1&x_2&\dots&x_n\\0&1+x_1^2&x_1x_2&\dots&x_1x_n\\0&x_2x_1&1+x_2^2&&x_2x_n\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&x_nx_1&x_nx_2&\dots&1+x_n^2\end{vmatrix}\qquad(1\text{-}1)$$

式（1-1）的右侧就是使用了方法 6（加边法）所得到的新行列式，然后，使用方法 5 将第 1 行乘 $-x_i$ 后加到第 i+1 行（i=2,3,⋯,n+1），得

$$\begin{vmatrix}1&x_1&x_2&\dots&x_n\\-x_1&1&0&\dots&0\\-x_2&0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\-x_n&0&0&\dots&1\end{vmatrix}$$

最后，使用方法 4，将 i 列乘 x_{i-1}（i=2,3,⋯,n+1）加到第一列，得

$$\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2&x_1&\dots&x_n\\0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{vmatrix}\text{（这是一个上三角行列式）}$$

$=1+\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

这是考研中难度较大的一道计算题。通过这道题我们应该了解计算行列式的这些方法并不是孤立的。换言之，有可能在同一道题中用到不止一种方法。

方法 7：递推公式法。

若行列式同时满足以下两个条件，则用此方法求解。

条件 1：在行列式的任意一行和任意一列中，最多只有三个非 0 的数。

条件 2：去掉行列式的最后一行和最后一列后，行列式的形式保持不变，只不过是少了一行一列而已。

下面结合一道考研题来给大家讲解递推公式法。

考研题 1.26 计算 $D_n=\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & a\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a\end{vmatrix}_{n\times n}$

解：此行列式同时满足上述的条件 1 和条件 2，所以使用方法 7 来计算。记住，只要同时满足条件 1 和条件 2 的行列式，一般都可以用方法 7 来计算。

递推公式法到底怎么使用呢？现在就来详细说明。

递推公式法有四个步骤。

第 1 步：将 D_n 化为 $D_n=pD_{n-1}+qD_{n-2}$。方法是先按第一列展开（也就是选取第一列进行降阶），然后再将展开后得到的第二个行列式按第一行展开，就可以得到 $D_n=pD_{n-1}+qD_{n-2}$ 了（注意：只要能用方法 7 的题，第一步都是这样做的）。

此题的第一步为：

$$D_n \overset{\text{按第一列}}{\underset{\text{展开}}{=}} (1-a)\times\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & a\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$+(-1)\times(-1)^{2+1}\times\begin{vmatrix}a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1-a & a\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=(1-a)\times D_{n-1}+1\times\begin{vmatrix}a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1-a & a\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$\overset{\text{按第一行}}{\underset{\text{展开}}{=}} (1-a)\times D_{n-1}+1\times a\times\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & a\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a\end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$$

$$=(1-a)\ D_{n-1}+aD_{n-2}$$

第 1 步做完了，原行列式 D_n 已经被成功地改写为 $D_n=pD_{n-1}+qD_{n-2}$，其中 $p=1-a$，$q=a$（注意：不是说任何一个行列式都可以当成 D_{n-1} 和 D_{n-2} 的。D_{n-1} 是指形式与 D_n 相同，只是比 D_n 少一行一列；D_{n-2} 是指形式与 D_n 相同，只是比 D_n 少两行两列）。

第 2 步：解方程 $\lambda^2-p\lambda-q=0$，解出 λ_1 和 λ_2。

由于 $p=1-a, q=a$

所以 $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - (1-a)\lambda - a = 0$

解得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -a$

第 3 步：分类讨论。

若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则把 D_n 写为 $D_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$

若 $\lambda_1 = \lambda_2$，则把 D_n 写为 $D_n = c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_2^n$

由于 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = -a$，$\lambda_1 \neq \lambda_2$

所以 $D_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = c_1 + c_2(-a)^n$

第 4 步：取 n=1,n=2 代入 D_n 中，解出 c_1、c_2 后，将 c_1、c_2 代入第 3 步的式子中，即得最后答案。

由于刚才在第 3 步中已经把 D_n 写为 $D_n = c_1 + c_2(-a)^n$，

所以当 n=1 时，$D_1 = c_1 + c_2 \times (-a)$　　　　（1）

当 n=2 时，$D_2 = c_1 + c_2 \times (-a)^2 = c_1 + c_2 \times a^2$　　　　（2）

（1）（2）两式联立，可解出 c_1 和 c_2，即

$$\begin{cases} D_1 = c_1 + c_2 \times (-a) \\ D_2 = c_1 + c_2 \times a^2 \end{cases}$$

D_1, D_2 是什么？

D_1 是行列式的第一行第一个数 $1-a$。

D_2 是行列式中第一行的第一、二个数，第二行的第一、二个数所组成的行列式：

$$\begin{vmatrix} 1-a & a \\ -1 & 1-a \end{vmatrix} = (1-a)^2 + a$$

所以 $\begin{cases} 1-a = c_1 + c_2 \times (-a) \\ (1-a)^2 + a = c_1 + a^2 c_2 \end{cases}$

解得 $c_1 = \dfrac{1}{1+a}$　$c_2 = \dfrac{a}{1+a}$

把 c_1、c_2 代入到第3步的式子中得：

$$D_n = \frac{1}{1+a} + \frac{a}{1+a} \times (-a)^n$$

1.14　贯穿考研试题的思维定式

这一节要告诉大家一个好消息，一个万能公式，那就是：一旦考研题的条件中给了一个矩阵，该矩阵是用前面 **1.10** 节中所讲的矩阵的列向量表示法给出的，并且每一列又都是两个或多个列向量相加的形式，则不管问题问的是什么（计算题也好，证明题也罢），立刻将此矩阵化为两个矩阵相乘的形式，一定可以求出所问的问题。

例. 一道题的条件中给了矩阵 $A = (\vec{a} + 2\vec{\beta}, \vec{\beta} + \vec{\gamma}, \vec{a} + 3\vec{\gamma})$ 则不管问题是什么，立刻将此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 写为：

$$\boldsymbol{A} = (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

为什么第一列是 1，2，0，因为 $\boldsymbol{A}$ 的第一列是 $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 0\vec{\gamma}$。第二、三列同理。

考研题 1.27　证明 $|\boldsymbol{A}| = \left| \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\beta} + \vec{\xi}, \vec{\xi} + \vec{\eta}, \vec{\eta} + \vec{\alpha} \right| = 0$

解： 由题意知矩阵 $A = \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\beta} + \vec{\xi}, \vec{\xi} + \vec{\eta}, \vec{\eta} + \vec{\alpha} \right)$，

根据本节所讲的诀窍，立刻将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为：

$$\boldsymbol{A} = (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\xi}, \vec{\eta}) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

从这以后，就不是本节要解决的问题了，本节只管到这里，然后根据问题，将（1）式的等号两侧同时取行列式，则有：

$$|\boldsymbol{A}|=\left|(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\xi},\vec{\eta})\times\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\right|$$

矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$有四行四列，而矩阵$(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\xi},\vec{\eta})$也有四行四列。这是为什么呢？有四列是显然的，有四行是因为：如果它不是四行，那么$\boldsymbol{A}$就不会是方阵，若$\boldsymbol{A}$不是方阵，就不可能存在$|\boldsymbol{A}|$，因为行列式行数和列数一定是相等的。而题中让证$|\boldsymbol{A}|=0$，暗示$|\boldsymbol{A}|$存在，说明$\boldsymbol{A}$是方阵，故$(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\xi},\vec{\eta})$有四行，所以$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$、$(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\xi},\vec{\eta})$这两个矩阵都是四阶方阵。此时使用 1.13 节中的抽象行列式计算方法中的公式⑤，得

$$|\boldsymbol{A}|=\left|(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\xi},\vec{\eta})\times\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\right|=\left|\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\xi},\vec{\eta}\right|\times\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}$$

通过计算，发现$\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=0$，而 0 乘以任何数都得 0。

所以，$|\boldsymbol{A}|=0$，证毕。

第 2 章

矩　　阵

2.1　矩阵的初等变换

本节给大家讲解矩阵的初等变换。

首先要告诉大家，初等变换是针对矩阵而言的，千万不要认为初等变换是针对行列式的。其次要告诉大家，任何一个矩阵，都可以进行初等变换。

那么，到底什么叫矩阵的初等变换？我们先来看看矩阵的初等变换的种类：

$$\text{初等变换}\begin{cases}\text{初等行变换}\begin{cases}\text{互换两行}\\ \text{以}k(k\neq 0)\text{乘某行}\\ \text{把某行乘}k\text{后，加到另一行}\end{cases}\\ \text{初等列变换}\begin{cases}\text{互换两列}\\ \text{以}k(k\neq 0)\text{乘某列}\\ \text{把某列乘}k\text{后，加到另一列}\end{cases}\end{cases}$$

可以看出，矩阵的初等变换一共分为六种。下面通过举例的方式讲解每一种初等变换。

例. 以矩阵$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}$为例，讲解六种初等变换。

第一种初等变换（互换两行）举例：互换矩阵的第一、二行。

写法为$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}8&5&10\\1&3&6\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}8&5&10\\1&3&6\end{pmatrix}$

第二种初等变换（以 k 乘某行，$k\neq 0$）举例：以 2 乘第二行。

写法为$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&6\\16&10&20\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&6\\16&10&20\end{pmatrix}$

第三种初等变换（把某行乘 k 后，加到另一行上）举例：把第一行乘 2 后加到第二行上。

写法为$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&6\\10&11&22\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&6\\10&11&22\end{pmatrix}$

第四种初等变换（互换两列）举例：互换矩阵的第一、二列。

写法为$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&1&6\\5&8&10\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&1&6\\5&8&10\end{pmatrix}$

第五种初等变换（以 k 乘某列，$k\neq 0$）举例：以 2 乘第三列。

写法为$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&12\\8&5&20\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&12\\8&5&20\end{pmatrix}$

第六种初等变换（把某列乘 k 后，加到另一列上）举例：把第二列乘 4 后加到第三列上。

写法为$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&18\\8&5&30\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&18\\8&5&30\end{pmatrix}$

需要注意的是，初等变换前的矩阵与初等变换后的矩阵用“~”或“$\to$”中的任何一种来连接都可以，但一定不能用“=”，因为**只有两个一模一样的矩阵之间才可以用等于号**来连接，这点一定要注意。

2.2　初等矩阵

先来复习一下什么叫单位矩阵。单位矩阵是方阵（方阵指行数与列数相等的矩阵），同时单位矩阵又是对角矩

阵（对角矩阵是指除了对角线以外所有数都是 0 的方阵），并且还是特殊的对角矩阵，其特殊性体现在对角线上的数全是 1。

例. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是方阵，是对角矩阵，是单位矩阵。

$\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&2\\0&0&1\end{pmatrix}$是方阵，不是对角矩阵，不是单位矩阵。

$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是方阵，是对角矩阵，不是单位矩阵。

现在开始讲解本节的新知识——初等矩阵。初等矩阵的定义与单位矩阵有关，同时也与初等变换有关（所以在 2.1 节讲了初等变换，并且刚刚又复习了单位矩阵的概念）。**初等矩阵是这样定义的：<u>单位矩阵</u>只经过<u>一次初等变换</u>后形成的矩阵称为初等矩阵。**

例. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$就是一个初等矩阵。因为该矩阵是由单位矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$只经过一次初等变换（以 2 乘第二行或者以 2 乘第二列）后所得到的矩阵。

例. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$就不是初等矩阵。因为单位矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$只经过一次初等变换（无论经过的是六种初等变换中的哪种）是变换不成$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$的。

2.3 矩阵的秩

本节介绍以下内容：

- 矩阵子式的定义。
- 矩阵秩的定义。
- 利用初等行变换来求矩阵的秩。

2.3.1 矩阵子式的定义

一个矩阵无论是否为方阵都存在子式。矩阵的子式是一个行列式，也就是说，矩阵的子式是一个数。

那么这个数到底是多少？请看下面的例子。

例. 对于矩阵$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$而言，该矩阵的**一阶子式**一共有九个，分别为 1，2，3，4，5，6，7，8，9。

该矩阵的**二阶子式**一共也有九个，分别为：

$$\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}=5-8=-3$$

$$\begin{vmatrix}1&2\\7&8\end{vmatrix}=8-14=-6$$

$$\begin{vmatrix}1&3\\4&6\end{vmatrix}=6-12=-6$$

$$\begin{vmatrix}1&3\\7&9\end{vmatrix}=9-21=-12$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 24 = -6$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 35 = -3$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 42 = -6$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3$$

该矩阵的**三阶子式**只有一个：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 1\times5\times9 + 2\times6\times7 + 3\times4\times8 - 3\times5\times7 - 1\times6\times8 - 2\times4\times9 \\ &= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 \\ &= 225 - 225 \\ &= 0 \end{aligned}$$

通过这个例子，可以总结出矩阵的 n 阶子式的定义：从矩阵中任意抽取 n 行，再从该矩阵中任意抽取 n 列，这 n 行 n 列相交所得到的 n 行 n 列行列式即是矩阵的一个 n 阶子式。

例. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$，假设现在是求该矩阵的任意一个二阶子式，则需要做的是从该矩阵的三行中任意选取两行，比如选取第一行和第三行。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

再从该矩阵的三列中任意选取两列，比如选取第二列和第三列。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

所以 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ 为该矩阵的一个二阶子式。

千万不要认为子式是面向方阵的，**正确的理解是子式是面向任意矩阵的。**

例. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$，假设现要求该矩阵的任意一个二阶子式，则需要做的是：从该矩阵的三行中任意选取两行，如第一行和第三行，再从该矩阵的四列中任意选取两列，如第二列和第四列，如下所示：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

所以 $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 12 \end{vmatrix}$ 为该矩阵的一个二阶子式。

关于矩阵的子式**最后想提醒大家的是：由矩阵子式的定义可知，一个 m 行 n 列的矩阵，它的最高阶子式的阶数等于 min（m，n），即 m 和 n 当中较小的那个数。**例如，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个四行五列的矩阵，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶子式为四阶子式，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 绝不会存在五阶和五阶以上的子式，因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一共就只有四行。

2.3.2 矩阵秩的定义

矩阵秩的定义与矩阵的子式密切相关，其定义是：如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中存在至少一个不等于零的 r 阶子式，r 阶以上子式均等于零，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，记为 $r(\boldsymbol{A})$。

例. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是四行五列的矩阵（意味着矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶子式是四阶子式）。若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有四阶子式都为 0，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有三阶子式也都为 0，而 $\boldsymbol{A}$ 的若干个二阶子式中至少有一个不为 0，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为多少？

解： 根据矩阵的秩的定义，立刻可得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，即 $r(\boldsymbol{A})=2$。

例. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})$？

解： 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个三行三列的矩阵，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶子式是三阶子式，并且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三阶子式只有一个（因为三阶子式意味着从 $\boldsymbol{A}$ 中取出三行三列，由于 $\boldsymbol{A}$ 只有三行三列，所以只有一种取法，故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三阶子式只有一个），就是它本身对应的行列式。通过计算，发现：

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=0$$

因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有三阶子式（其实只有这一个）都为 0，此时至少说明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩不为 3。三阶子式算完了，该算二阶子式了，可是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二阶子式有很多，我们就随便选一个，算 $\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}$ 吧。$\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}=1\times5-2\times4=-3\neq0$，说明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 至少存在一个二阶子式不为 0，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$。

2.3.3 利用初等行变换来求矩阵的秩

前面介绍了矩阵秩的定义（矩阵的秩是通过矩阵的子式来定义的），现在要问一个问题："用什么方法可以求出矩阵的秩？"可能有不少同学都会回答："就利用矩阵秩的定义来求矩阵的秩，前面的例题就是这么求的啊，难道不是吗？"我现在要说的是："确实可以利用矩阵秩的定义来求某矩阵的秩，但是，计算量实在是太大了"。

举个例子，一个五行五列的秩为 2（目前我们还不知道它的秩为 2）的矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果用定义法求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩的话，首先应该计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有五阶子式（就一个），发现是 0，此时可以确定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩不是 5；然后需要计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的四阶子式，一共有 25 个，当算完矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个四阶子式后，发现是 0，就需要继续计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的其他四阶子式，结果越算越失望，因为每算完一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的四阶子式后，就发现是 0，当把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 25 个四阶子式都算完时，发现 25 个都是 0。

累了这么半天，仅仅确定了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩不是 5 也不是 4，但仍然不知道秩究竟是多少。我们只好再算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三阶子式，一共有 100 个！每算完一个都发现是 0，结果算了 100 次，快累疯了，也只能确定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩不是 5、4 和 3。

再开始算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二阶子式，一共也是有 100 个！谁也保证不了所算的第一个二阶子式就是非 0 的数，假设算到第 80 个二阶子式才出现非 0 的数（即前 79 个二阶子式都是 0），此时才知道矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩是 2。

大家看，一共要算多少次！所以，用矩阵秩的定义来计算秩太麻烦了。

因此，人们就开始琢磨有没有更好的方法来求矩阵的秩。经过研究，提出了一种求矩阵秩的方法，此方法就是接下来要讲的利用初等行变换来求矩阵的秩。在讲之前，先要告诉大家的是："利用初等行变换来求矩阵的秩"这个知识点非常重要，贯穿后续各个章节，大家一定要重视这个知识点。

利用初等行变换来求矩阵秩分为以下两大步骤。

第一大步：将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵。

第二大步：观察此阶梯形矩阵的非零行有多少行，此阶梯形矩阵非零行的数量就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩。

1. 第一大步

第一大步内部又分为两小步。

第一小步：判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过多少步才能化为阶梯形矩阵。

第二小步：按照奇数步化 1、偶数步化 0 的原则，将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵。

下面讲第一大步中的第一小步（判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过多少步才能化为阶梯形矩阵）：当给了一个 m 行 n 列的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 后，经过 $2\times(m与n中小的那个数-1)$ 个步骤，即可将其化为阶梯形矩阵。例如，一个五行四列的矩阵 $\boldsymbol{A}$，则经过 $2\times(4-1)$ 个步骤，即经过 6 步后可将其化为阶梯形矩阵。第一小步是求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过多少步才能化为阶梯形矩阵。

下面讲第一大步中的第二小步：当确定了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵需要经过的步骤数后，就要开始按照奇数步化 1、偶数步化 0 的原则，将所给矩阵化为阶梯形矩阵。什么叫奇数步化 1，偶数步化 0 呢？我来举例，还是拿五行四列的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来举例。一个五行四列的矩阵 $\boldsymbol{A}$，根据第一小步可知，它一共要经过 6 步才能化为阶梯形矩阵，下面分别介绍这 6 步。

（1）要做的是“化 1”，因为这一步是奇数步。具体来说，这一步是利用矩阵的三种初等行变换中的“以 $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\neq 0)$ 乘某行”将 a_{11} 化为 1，此处“某行”指的是第一行。

（2）要做的是“化 0”，因为这一步是偶数步，是利用矩阵的三种初等行变换中的“把某行乘 $\boldsymbol{k}$ 后，加到另一行”将 a_{11} 正下方的所有数化为 0。此处“某行”指的是第一行。

（3）要做的是“化 1”，因为这一步是奇数步，是利用矩阵的三种初等行变换中的“以 $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\neq 0)$ 乘某行”将 a_{22} 化为 1 。此处“某行”指的是第二行。

（4）要做的是“化 0”，因为这一步是偶数步，是利用矩阵的三种初等行变换中的“把某行乘 $\boldsymbol{k}$ 后，加到另一行”将 a_{22} 正下方的所有数化为 0 。此处“某行”指的是第二行。

（5）要做的是“化 1”，因为这一步是奇数步，是利用矩阵的三种初等行变换中的“以 $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\neq 0)$ 乘某行”将 a_{33} 化为 1 。此处“某行”指的是第三行。

（6）要做的是“化 0”，因为这一步是偶数步，是利用矩阵的三种初等行变换中的“把某行乘 $\boldsymbol{k}$ 后，加到另一行”将 a_{33} 正下方的所有数化为 0 。此处“某行”指的是第三行。

（7）(如果有)这一步就是利用矩阵的三种初等行变换中的“以 $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\neq 0)$ 乘某行”将 a_{44} 化为 1。此题不存在第七步。

（8）(如果有)这一步就是用矩阵的三种初等行变换中的“把某行乘 $\boldsymbol{k}$ 后，加到另一行”将 a_{44} 正下方的所有数化为 0。此题不存在第八步。

第二小步讲完了。**要注意的是：无论是奇数步的化 1，还是偶数步的化 0，都只能用初等变换中的初等行变换，而不能用初等列变换。**任意一个矩阵经过这两小步后，就一定被化为了“阶梯形矩阵”。

好，利用初等行变换求矩阵秩的第一大步（将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵）已经讲完了（其中包含两个小步），来看一道例题。

例. 将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0&2\\1&2&0&1\\3&-1&0&0\\1&4&5&1\end{pmatrix}$ 化为阶梯形矩阵。

解：此题考的就是“利用初等行变换求矩阵秩的第一大步”。先来进行第一小步，即确定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵所需要的步骤数。此矩阵为四行四列，因此，2×（4−1）=6。故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵需要 6 步。

再来进行第二小步，即按照奇数步化 1、偶数步化 0 的原则，将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵。

（1）利用初等行变换中的“以 $k(k\neq 0)$ 乘某行”将 a_{11} 化为 1 。“某行”指的是第一行。

变换方法：由于 a_{11} 目前是 2，要把它变成 1，所以用 $\dfrac{1}{2}$ 乘以第一行。

$$\begin{pmatrix}2&0&0&2\\1&2&0&1\\3&-1&0&0\\1&4&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&2&0&1\\3&-1&0&0\\1&4&5&1\end{pmatrix}$$

（2）利用初等行变换中的“把某行乘 k 后，加到另一行”将 a_{11} 正下方的所有数都化为 0。“某行”指的是第一行。

变换方法：由于 a_{11} 是 1，而 a_{11} 正下方的三个数分别是 1、3、1，要把这三个数都化为 0，是把第一行乘以−1 加到第二行，把第一行乘以−3 加到第三行，把第一行乘以−1 加到第四行。

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&2&0&1\\3&-1&0&0\\1&4&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&0\\3&-1&0&0\\1&4&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&0\\0&-1&0&-3\\1&4&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&0\\0&-1&0&-3\\0&4&5&0\end{pmatrix}$$

不知大家发现没有，奇数步的化 1 其实是为偶数步的化 0 服务的。就拿步骤 1 和步骤 2 来说，如果没有步骤 1，那么 a_{11} 就不是 1 而是 2，那么在进行步骤 2 时就需要乘以分数才行，非常麻烦，明白了吧。

（3）利用初等行变换中的“以 $k(k\neq 0)$ 乘某行”将 a_{22} 化为 1。“某行”指的是第二行。

变换方法：由于 a_{22} 目前是 2，要把它变成 1，所以用 $\frac{1}{2}$ 乘以第二行。

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&0\\0&-1&0&-3\\0&4&5&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&-1&0&-3\\0&4&5&0\end{pmatrix}$$

（4）利用初等行变换中的“把某行乘 k 后，加到另一行”将 a_{22} 正下方的所有数都化为 0，“某行”指的是第二行。

变换方法：由于 a_{22} 是 1，而 a_{22} 正下方的两个数分别是−1、4，我们要把这两个数都化为 0，所以我们的做法是把第二行乘以 1 加到第三行，把第二行乘以−4 加到第四行。

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&-1&0&-3\\0&4&5&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&-3\\0&4&5&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&-3\\0&0&5&0\end{pmatrix}$$

（5）利用初等行变换中的“以 $k(k\neq0)$ 乘某行”将 a_{33} 化为 1。“某行”指的是第三行。

现在我讲一个非常重要的知识点，即一种特殊情况。大家看，现在 a_{33} 是 0。由此可知，无论第三行乘以多少，a_{33} 都不可能变成 1，这就是特殊情况。

下面用标准的语言描述一下这种特殊情况并且给出解决方法。

特殊情况：在做奇数步（即做化 1）的步骤，可能会遇到 a_{ii} 为 0 的情况。

解决方法：看 a_{ii} 正下方的数，记住是正下方，看其中有没有非 0 的数。

如果有，那么将该数所在行与第 i 行互换，这样一来，a_{ii} 就不是 0 了，而是一个非 0 的数，然后就可以正常做了（即利用初等行变换中的“以 $k(k\neq0)$ 乘某行”将 a_{ii} 化为 1）。

如果没有，则此时根本不用去管 a_{ii}，而是把 $a_{i(i+1)}$ 当成 a_{ii} 即可（即本来要将 a_{ii} 化为 1，现在变为了将 a_{ii} 右侧的那个数 $a_{i(i+1)}$ 化为 1）。

此题所遇到的正是这种特殊情况，要按照此特殊情况的解决方法来处理。我们来看 a_{33} 的正下方有没有非 0 的数，a_{33} 的正下方虽然只有一个数，但是它是非 0 的数 5，将第三行与第四行互换，然后将新的第三行乘以 $\frac{1}{5}$ 即可。

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&-3\\0&0&5&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$$

（6）利用初等行变换中的“把某行乘 k 后，加到另一行”将 a_{33} 正下方的所有数都化为 0，“某行”指的是第三行。

变换方法：a_{33} 正下方只有一个数，并且本来就是 0，所以根本不用变换了，这一步直接跳过。

经过以上 6 个步骤后，形成的矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$ 就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的阶梯形矩阵。

通过这道例题，同学们应该已经知道如何将一个任意的矩阵化为阶梯形矩阵。说两点需要注意的地方。

第一点：在将同一个矩阵变为阶梯形矩阵的过程中，由于用到的初等行变换方法不同，导致最终得到的阶梯形矩阵也不同，这是正常的。

第二点：在将矩阵化为阶梯形矩阵的过程中，无论做奇数步还是做偶数步时，一旦发现某一行所有数都为 0，则立刻将此行与最后一行互换，然后再继续。

下面再来讲一道例题。

例. 将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$ 化为阶梯形矩阵。

解： 先进行第一小步，即确定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵所需要的步骤数。此题所给的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是四行五列的矩阵，因此 2×（4−1）=6。故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵共需要 6 步。再进行第二小步，即按照奇数步化 1、偶数步化 0 的原则，将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵。

（1）利用初等行变换中的“以 $k(k\neq0)$ 乘某行”将 a_{11} 化为 1，“某行”指的是第一行。

变换方法：由于 a_{11} 本来就是 1，所以这一步直接跳过。

（2）利用初等行变换中的“把某行乘 k 后加到另一行”将 a_{11} 正下方的所有数都化为 0，“某行”指的是第一行。

变换方法：由于 a_{11} 是 1，而 a_{11} 正下方的三个数分别是 2、4、3，要把这三个数都化为 0，把第一行乘以−2 加到第二行，把第一行乘以−4 加到第三行，把第一行乘以−3 加到第四行。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -10 & 10 & -6 & -12 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -10 & 10 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

（3）利用初等行变换中的“以 $k(k \neq 0)$ 乘某行”将 a_{22} 化为 1，“某行”指的是第二行。

变换方法：由于目前是−3，要把它变成 1，所以用 $-\frac{1}{3}$ 乘以第二行。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -10 & 10 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & -10 & 10 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

（4）利用初等行变换中的“把某行乘 k 后，加到另一行”将 a_{22} 正下方的所有数都化为 0，“某行”指的是第二行。

变换方法：由于 a_{22} 是 1，而 a_{22} 正下方的两个数分别是−10、3，要把这两个数都化为 0，将第二行乘以 10 加到第三行，将第二行乘以−3 加到第四行。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & -10 & 10 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 8 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

（5）利用初等行变换中的“以 $k(k \neq 0)$ 乘某行”将 a_{33} 化为 1，“某行”指的是第三行。

变换方法：大家还记得上一道题中讲的“特殊情况”吧？现在，正好又面临这种情况，a_{33} 是 0，于是看 a_{33} 正下方的数中有没有非 0 的数，结果发现其正下方的所有数（只有一个数）也都是 0，所以，将 a_{33} 右侧的 $-\frac{8}{3}$ 当成 a_{33} 即可。换句话说，现在要做的已经不是把 a_{33} 化为 1，而是要把 $-\frac{8}{3}$ 化为 1，所以变换方法是第三行乘以 $-\frac{8}{3}$。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

（6）利用初等行变换中的“把某行乘 k 后加到另一行”将 a_{22} 正下方的所有数都化为 0，“某行”指的是第三行。

变换方法：由于 a_{33} 是 1，而 a_{33} 正下方只有一个数 3，要把 3 化为 0，把第三行乘以−3 加到第四行。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

经过以上 6 个步骤后，形成的矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 对应的阶梯形矩阵。

2．第二大步

通过以上两道例题，相信同学们对“利用初等行变换求矩阵的秩”的第一大步（将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵）已经非常熟悉了。现在来看“利用初等行变换来求矩阵的秩”的第二大步，即观察此阶梯形矩阵的非零行有多少行，非零行的数量就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩。

对于这第二大步，只说一句：如果矩阵某行的所有数全为零，则该行被称为零行，否则该行就被称为非零行。

例．本节的第一道例题中，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0&2\\1&2&0&1\\3&-1&0&0\\1&4&5&1\end{pmatrix}$ 化为阶梯形矩阵后是 $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$，由于 $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$ 中非零行有四行（所有行都是非零行），所以矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0&2\\1&2&0&1\\3&-1&0&0\\1&4&5&1\end{pmatrix}$ 的秩为 4，即 $r(\boldsymbol{A})=4$。

例．本节的第二道例题中矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$，化为阶梯形矩阵后是 $\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&\frac{1}{3}&2\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，由于 $\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&\frac{1}{3}&2\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ 中的非零行有三行，所以矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$ 的秩为 3，即 $r(\boldsymbol{A})=3$。

2.4　第一个大总结

$$
\text{方阵}\boldsymbol{A}\begin{cases}(1)\boldsymbol{A}\text{满秩}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\text{可逆}\Leftrightarrow\text{行列式}|\boldsymbol{A}|\text{不等于}0\Leftrightarrow\text{齐次方程组}\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}\text{有唯一零解}\Leftrightarrow\text{非齐次方程组}\\ \boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{b}\text{（无论}\vec{b}\text{是什么样）有唯一解。}\\(2)\boldsymbol{A}\text{不满秩}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\text{不可逆}\Leftrightarrow\text{行列式}|\boldsymbol{A}|\text{等于}0\Leftrightarrow\text{齐次方程组}\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}\text{有非唯一解（非零解）（无穷多解）}\\ \Leftrightarrow\text{非齐次方程组}\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{b}\text{（无论}\vec{b}\text{是什么样）有非唯一解(无穷多解)或无解。}\end{cases}
$$

注意：“$\Leftrightarrow$”的意思是充分必要条件。

以上的大总结可以说是重要极了，它贯穿了整个线性数学科，请大家务必背下来。

这个大总结针对方阵（行数与列数相等的矩阵）来说是大前提，一定要记住。从中可以看出来，其实就是两组充分必要条件。

这两组充分必要条件中的每一组都包含了与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有关的五种情况，五种情况的两两之间都是用符号“$\Leftrightarrow$”来连接的，这说明它们之间存在“知道任意一个，可以推出其他四个”的关系。

另外，解释一下总结中出现的词“满秩”的意思。所谓满秩，是只有方阵（行数和列数相等的矩阵）才具有的概念。满秩具体指的是：若一个 n 行 n 列的矩阵（也就是 n 阶方阵）的秩为 n，则称该矩阵为满秩矩阵，或称该矩阵满秩。例如，若四行四列的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩，则立刻可以知道矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 4，即 $r(\boldsymbol{A})=4$。

本节就讲到这里。大家一定会感到非常奇怪：既然本节如此重要，为何知识点后面连一道题都没有呢？回答是：并非没有题，相反，题数不胜数，但是，我没把题放在这里，因为本节所讲的知识点涉及的题虽然非常多，那些题中除了考本节所讲的知识点外，还考目前还没有讲的知识点，所以不把那些题放在这里，而要先继续讲知识点，然后再让大家练题。这其实也是本书的一个特色：在某个知识点下面对应的习题中，不会出现既包含该知识点又包含没讲知识点的习题。

最后，再次强调，本节所讲的大总结太重要了，请务必先把这个大总结背下来，再继续往后看。

2.5 第二个大总结

第二个大总结就是六个结论。

① $\boldsymbol{A}_{1\times n}\times\boldsymbol{B}_{n\times 1}=$一个数

解释：*n* 维行向量乘以 *n* 维列向量等于一个数，而不再是矩阵。因为 *n* 维行向量，*n* 维列向量都是矩阵（在 1.10 节中提到过，向量就是矩阵，只不过是行数为 1 或列数为 1 的矩阵而已），那么两个向量相乘，其实就是两个矩阵相乘。根据矩阵相乘的运算法则，一个一行 *n* 列的矩阵和一个 *n* 行一列的矩阵相乘，得到的是一个一行一列的矩阵，而一行一列的矩阵就是一个数（这个知识点要是以前不知道的话，赶快记下来）。因此，*n* 维行向量乘以 *n* 维列向量等于一个数。

例. $(1\quad 2\quad 3)\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=1\times4+2\times5+3\times6=32$

② $\boldsymbol{A}_{n\times 1}\times\boldsymbol{B}_{1\times n}=\boldsymbol{C}_{n\times n}$

解释：*n* 维列向量乘以 *n* 维行向量等于 *n* 行 *n* 列的方阵。

③ $\boldsymbol{A}_{1\times n}\times\boldsymbol{B}_{n\times n}=\boldsymbol{C}_{1\times n}$

解释：*n* 维行向量乘以 *n* 阶方阵等于 *n* 维行向量。

例. $(1\quad 2\quad 3)\times\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=(30\quad 36\quad 42)$

另外，若这个 n 维行向量 $A_{1\times n}$ 中第 i 列为 1，其余列都为 0，则该 n 维行向量与 n 阶方阵相乘可以不用计算直接得出答案，答案为 n 阶方阵的第 i 行。

例. $(1\quad 0\quad 0)\times\begin{pmatrix}3&7&9\\2&4&8\\5&6&7\end{pmatrix}=(3\quad 7\quad 9)$

例. $(0\quad 1\quad 0)\times\begin{pmatrix}3&7&9\\2&4&8\\5&6&7\end{pmatrix}=(2\quad 4\quad 8)$

④ $\boldsymbol{A}_{n\times n}\times\boldsymbol{B}_{n\times 1}=\boldsymbol{C}_{n\times 1}$

解释：一个 *n* 阶方阵乘以一个 *n* 维列向量等于 *n* 维列向量。

例. $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\32\\50\end{pmatrix}$

另外，若这个 n 维列向量 $B_{n\times 1}$ 中第 i 行为 1，其余行都为 0，则 n 阶方阵与该 n 维列向量相乘可以不用计算直接得出答案，答案为 n 阶方阵的第 i 列。

例. $\begin{pmatrix}3&7&9\\2&4&8\\5&6&7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$

例. $\begin{pmatrix}3&7&9\\2&4&8\\5&6&7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\4\\6\end{pmatrix}$

现在大家已经看完六条结论中的四条了，讲到本节的内容时，经常会有很多同学对此表示不理解。

他们说："这怎么能算是一节呢？这分明是第 1 章中矩阵的运算嘛，这不是早就讲过了吗，在第 1 章中讲矩阵的运算时不是已经说了 $\boldsymbol{A}_{a\times b}\times\boldsymbol{B}_{b\times c}=\boldsymbol{C}_{a\times c}$ 了嘛，那这节的内容纯属多余啊，能从 $\boldsymbol{A}_{a\times b}\times\boldsymbol{B}_{b\times c}=\boldsymbol{C}_{a\times c}$ 推出来啊，讲它干吗！"

我的回答是："你们说得对，本节所讲的内容确实能从 $\boldsymbol{A}_{a\times b}\times\boldsymbol{B}_{b\times c}=\boldsymbol{C}_{a\times c}$ 推出来。"

听到我这么回答，他们更加不解了，继续追问："那现在还讲有啥意义？" 想必正在看此书的你，也会有此疑问。

我现在来回答："虽然本节所讲内容完全能从第 1 章所讲的 $\boldsymbol{A}_{a\times b}\times\boldsymbol{B}_{b\times c}=\boldsymbol{C}_{a\times c}$ 推出来，但是希望大家以后根本不要去推，而是死死地把本节内容背下来，以后做题时形成条件反射。例如，我曾经教过一个学生，当他看到某道题

中的$\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}=3$时，一直在琢磨“为何两个向量相乘能得一个数字？”，想了好久才根据矩阵的乘法推出$\vec{\alpha}$是一个列向量，他可高兴了。孰不知，$\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}=3$只是他做的那道题的若干条件中的一个，出题人认为同学看完这个条件后，应该立刻想到$\vec{\alpha}$是列向量，所以根本没在这里设考点，结果他还琢磨半天才琢磨出来。琢磨出来后认为大功告成了，再一看后面，还有那么多条件没看，问题又那么长，瞬间丧失信心了。

但如果该同学把本节所讲的第一个结论（$\boldsymbol{A}_{1\times n}\times\boldsymbol{B}_{n\times1}=$一个数）背下来了的话，则看完$\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}=3$这个条件后，立刻就知道$\vec{\alpha}$是列向量，根本不用从矩阵的乘法运算入手去想为什么两个向量相乘能得一个数了。大大加快了做题速度。这也是我讲本节的原因。

⑤ 设$\vec{\alpha}$为n维列向量，则$\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{a}\geqslant0$，并且有$\vec{\alpha}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}=0$；$\vec{\alpha}\neq\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}\neq0$。

解释：这个结论其实是第一个结论的一个特例。为什么这么说呢？具体解释：前面的第一个结论说的是一个 *n* 维行向量乘以一个 *n* 维列向量等于一个数，而现在这第 5 个结论说的也是一个 *n* 维行向量乘以一个 *n* 维列向量等于一个数，但是，后者 *n* 维列向量规定死了是 *n* 维行向量的转置。在这种情况下，就不仅可以确定乘出的结果是一个数，而且还可以确定该数必为大于或等于 0 的数。

这还不算完，在这种情况下，$\vec{\alpha}=\vec{0}$和$\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}=0$互为充分必要条件，$\vec{\alpha}\neq\vec{0}$和$\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}\neq0$互为充分必要条件。大家一定要把这个结论背下来。下面的内容是这第 5 个结论的证明过程，建议大家也看看，因为这样可以更加深入地理解第 5 个结论。

证明过程如下：

假设$\vec{\alpha}$为三维列向量，设$\vec{a}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，则$\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{a}=(x\quad y\quad z)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x^2+y^2+z^2$是一个行向量，所以$\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{a}=(x\quad y\quad z)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x^2+y^2+z^2$，所以必有$\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{a}\geqslant0$。

我们继续来看，$\vec{a}=0$的意思是此向量为零向量，什么叫零向量？零向量的意思是向量中的每个数均为 0，也就是说x=0，y=0，z=0。明显可以和$x^2+y^2+z^2$=0，即$\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{a}=0$进行互推。当然，$\vec{a}\neq0$也可以和$x^2+y^2+z^2\neq0$即$\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{a}\neq0$进行互推。

⑥ 设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵（n行n列的矩阵），则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$为零矩阵$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$为零矩阵 。

解释：对于方阵$\boldsymbol{A}$来说，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$为零矩阵，可以和$\boldsymbol{A}$为零矩阵进行互推。

证明过程如下：首先从右向左证。若$\boldsymbol{A}$为零矩阵（矩阵$\boldsymbol{A}$中的所有数都为 0），则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$也为零矩阵，由于两个零矩阵相乘肯定还是零矩阵，所以$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$为零矩阵。

然后从左往右证。

设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$

则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{n1}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$

则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}^2&*&\cdots&**&\sum\limits_{j=1}^{n}a_{2j}^2&\cdots&*\\\vdots&\vdots&&\vdots*&*&\cdots&\sum\limits_{j=1}^{n}a_{nj}^2\end{pmatrix}$

注意：不用关注*处到底是多少，只须关注对角线。由于$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$为零矩阵，所以矩阵$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$中的每一个数均为 0，所以:

$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2$ ，$\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^2$ ，…，$\sum_{j=1}^{n} a_{nj}^2$ ，*处都为 0 。

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 = 0 \quad \text{得 } a_{11}, \ a_{12}, \cdots, a_{1n}=0$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{2n}^2 = 0 \quad \text{得 } a_{21}, \ a_{22}, \cdots, a_{2n}=0$$

……

$$\sum_{j=1}^{n} a_{nj}^2 = a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \cdots + a_{nn}^2 = 0 \quad \text{得 } a_{n1}, \ a_{n2}, \cdots, a_{nn}=0$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为零矩阵。

第 2.5 节讲完了，六条结论大家一定要背下来。

2.6 矩阵乘法的两条定律

2.6.1 矩阵乘法满足结合律

所谓矩阵乘法满足结合律，指的就是可以任意添加括号。例如，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}$ 是六个矩阵，不一定是方阵，但是如果 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$ 存在，则 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\times(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F})$，这个例子就应用了矩阵乘法的结合律。

2.6.2 矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律

矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律指的就是下面两个等式：

① $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$

② $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$

2.7 可交换的矩阵相乘特例

首先需要注意的是矩阵乘法不满足交换律，也就是说，$\boldsymbol{AB}$ 不一定等于 $\boldsymbol{BA}$。但是，在以下五个式子中，矩阵相乘是可以交换的。

① $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵。

例. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

② $k\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\times k\boldsymbol{E} = k\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，k 为任意常数。

例. $\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&10&15\\20&25&30\\35&40&45\end{pmatrix}$

③ $(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{E})\times(a\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{E}) = (a\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{E})\times(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{E})$

$(a\boldsymbol{E}+b\boldsymbol{A})\times(a\boldsymbol{E}-b\boldsymbol{A}) = (a\boldsymbol{E}-b\boldsymbol{A})\times(a\boldsymbol{E}+b\boldsymbol{A})$

其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，a、b 为任意常数。

例. $(3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\times(3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}) = (3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\times(3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})$

$(3\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A})\times(3\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}) = (3\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})\times(3\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A})$

④ $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵。

⑤ $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}\times(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\times(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$

2.8 关于矩阵转置的四个公式

公式 1：$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$

公式 2：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，其中矩阵 $\boldsymbol{A}$、矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数、列数均相同。

公式 3：$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$、$(\boldsymbol{ABC})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，依次类推。

公式 4：$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数。

2.9 关于矩阵可逆的六个公式

公式 1：$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$。

公式 2：$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$、$(\boldsymbol{ABC})^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$，依次类推。

公式 3：$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$，其中 k 是不为零的常数。

公式 4：$(\boldsymbol{A}^{-1})^{*}=(\boldsymbol{A}^{*})^{-1}$。

公式 5：$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$。

公式 6：$(\boldsymbol{A}^{*})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{*}$。

考研题 2.1 设 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵，$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，证明：

（1）$k\boldsymbol{A}$（k 是常数）是对称阵。

（2）$\boldsymbol{A}^k$（k 是正整数）是对称阵。

（3）f（$\boldsymbol{A}$）是对称阵。

解：先来看什么是对称阵，对称阵也称对称矩阵。其定义为：若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。顺便再来看什么是反对称阵，反对称阵也称反对称矩阵。其定义为：若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵。此题直接用对称阵的定义来证明即可。

（1）根据 2.8 节中的公式 4，可得 $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。又因为此题的已知条件“$\boldsymbol{A}$ 为对称阵”，根据对称阵的定义有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，所以 $k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}$。由 $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$、$k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}$ 可得 $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}$。这正好符合对称阵的定义，所以 $k\boldsymbol{A}$ 是对称阵。

（2）$(\boldsymbol{A}^k)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}\times\cdots\times\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}$，这一步任何定理都没用，只是把 $\boldsymbol{A}^k$ 展开而已。然后，根据 2.8 节中的公式 3 可得，$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}\times\cdots\times\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\times\cdots\times\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^k$。又因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，所以 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^k=\boldsymbol{A}^k$，即 $(\boldsymbol{A}^k)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^k$，

故 $\boldsymbol{A}^k$ 是对称阵。

（3）由题目已知 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，得 $f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+a_n\boldsymbol{A}^n$。

注意，a_0 要变为 $a_0\boldsymbol{E}$，因为 a_0 是一个数，而 $a_1\boldsymbol{A}$，$a_2\boldsymbol{A}^2$ 等都是矩阵，数是无法与矩阵相加的，所以 a_0 要变为 $a_0\boldsymbol{E}$。

$[f(\boldsymbol{A})]^{\mathrm{T}}=(a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+a_n\boldsymbol{A}^n)^{\mathrm{T}}$

根据 2.8 节中的公式 2，有

$(a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+a_n\boldsymbol{A}^n)^{\mathrm{T}}$

$=(a_0\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}+(a_1\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}+(a_2\boldsymbol{A}^2)^{\mathrm{T}}+\cdots+(a_n\boldsymbol{A}^n)^{\mathrm{T}}$

根据 2.8 节中的公式 4，有

$=a_0\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+a_1\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+a_2(\boldsymbol{A}^2)^{\mathrm{T}}+\cdots+a_n(\boldsymbol{A}^n)^{\mathrm{T}}$

由于 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，并且再根据此题（2）中的结论，有

$=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+a_2(\boldsymbol{A}^2)+\cdots+a_n(\boldsymbol{A}^n)=f(\boldsymbol{A})$

所以 $f(\boldsymbol{A})$ 为对称矩阵。

这道题就做完了，其知识点是 2.8 节和对称阵的定义，其他什么也没考。

考研题 2.2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&-2\\-1&0&3\\2&-3&0\end{pmatrix}$，$\vec{X}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，计算 $\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}$ 的值。

解：首先，$\vec{X}$ 是一个列向量而不是行向量，因为右上角有转置符号，考研题中表示列向量也会这样表示。既然 $\vec{X}$ 是列向量，那么 $\vec{X}^{\mathrm{T}}$ 就是行向量，观察一下此题：$\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}$，由于 $\vec{X}^{\mathrm{T}}$ 是行向量，而 $\vec{X}$ 是列向量，所以此题的问题是一个行向量乘以一个方阵，然后再乘以一个列向量。

根据 2.5 节，一个行向量乘以一个方阵是一个行向量，行向量乘以列向量是一个数。所以，立刻就可以知道 $\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}$ 是一个数，而不是一个矩阵。现在要解决的问题只不过是计算一下这个数是多少而已。

下面正式开始做此题，此题很简单，直接使用 1.7 节中的矩阵乘法运算即可。

$$\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}0&1&-2\\-1&0&3\\2&-3&0\end{pmatrix}$$

$$=(-x_2+2x_3,x_1-3x_3,-2x_1+3x_2)$$

$$\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}=(-x_2+2x_3,x_1-3x_3,-2x_1+3x_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=x_1(-x_2+2x_3)+x_2(x_1-3x_3)+x_3(-2x_1+3x_2)$$

$$=-x_1x_2+2x_1x_3+x_1x_2-3x_2x_3-2x_1x_3+3x_2x_3$$

$$=0$$

考研题 2.3

$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，对任意的 $\vec{X}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，计算 $\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}$ 的值。

解：此题与上一题有所不同，此题的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 没有直接给出来，因此做法不会和上道题一样。

由上题可知，$\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}$ 是一个数，而一个数的转置就是它本身。这很好理解，一个数就相当于是一个一行一列的矩阵，转置当然等于它本身，所以有：

$$\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}=(\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X})^{\mathrm{T}} \qquad （1）式$$

根据 2.8 节中的公式 3：

$$(\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X})^{T}=\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\vec{X})^{\mathrm{T}}=\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\vec{X} \qquad （2）式$$

又因为题中说了 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，所以有：

$$\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\vec{X}=-\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X} \qquad （3）式$$

由（2）式、（3）式得：

$$(\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X})^{T}=-\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X} \qquad （4）式$$

由（1）式、（4）式得：

$$\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}=-\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X} \qquad （5）式$$

由于 $\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}$ 为一个数，不妨设此数为 B，根据（5）式有：

$$B=-B$$

$$\Rightarrow 2B=0$$

$$\Rightarrow B=0$$

即 $\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}=0$

考研题 2.4　设 $\vec{\alpha}=(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2})_{1\times n}$，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+2\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}$，求 $\boldsymbol{AB}$？

解：$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}-\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha})(\boldsymbol{E}+2\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha})$

根据 2.6 节(矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律)得：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}-\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha})(\boldsymbol{E}+2\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha})$$

$$=\boldsymbol{E}^2+2\boldsymbol{E}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}-\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}\boldsymbol{E}-2\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}$$

由于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 乘以任何矩阵都等于该矩阵本身，所以：

$$=\boldsymbol{E}+2\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}-\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}-2\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}$$

合并同类项得：

$$=\boldsymbol{E}+\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}-2\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}$$

根据 2.6 节，矩阵乘法满足结合律得：

$=\boldsymbol{E}+\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}-2\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}(\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}})\vec{\alpha}$

又：$\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}=(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2})\times\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\,\\0\\,\\\vdots\\,\\0\\,\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}+0+0+\cdots+0+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

所以：

$\boldsymbol{E}+\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}-2\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}(\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}})\vec{\alpha}$

$=\boldsymbol{E}+\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}-\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}$

$=\boldsymbol{E}$

考研题 2.5 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，写出 $\boldsymbol{A}$ 可逆的一个充分必要条件，当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

解： 根据 2.4 节可以写出 $\boldsymbol{A}$ 可逆的很多充分必要条件，而此题只写出一个即可，那就写行列式不等于 0 吧。

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$

则 $ad-bc\neq0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 可逆的一个充分必要条件。

此题还有一问，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$，求一个矩阵的逆矩阵的方法在第 1 章就已经讲过，这里就不再赘述了。

$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\times\boldsymbol{A}^{*}=\frac{1}{ad-bc}\times\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

考研题 2.6 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，证明 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。

解： 要注意，此题的结论不是说明矩阵乘法满足交换律，只是针对满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 的两个矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，才有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。

此题的证明过程如下：

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ （1）式

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}$ （2）式

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$ （3）式

根据（1）式、（3）式得：

$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$ （4）式

由于任何矩阵与单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 相乘还等于它本身，结合（4）式有：

$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{EB}=\boldsymbol{A}$ （5）式

根据 2.6 节（矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律），结合（5）式有：

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$ （6）式

根据（2）式、（6）式得：

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}$ （7）式

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=-\boldsymbol{E}$

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}$

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=-\boldsymbol{E}$

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}$ （8）式

由可逆矩阵的定义式 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$ 可知，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$ 与 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})$ 互为逆矩阵，根据 2.7 节的④可得：

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$ （9）式

根据（8）式、（9）式得：

$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$ （10）式

根据 2.6 节（矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律），结合（10）式得：

$\boldsymbol{EA}+\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{BE}=\boldsymbol{E}$

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$

$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$

结合（1）式可得：

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

2.10 可逆矩阵、初等变换、初等矩阵、矩阵秩之间的关系及等价矩阵

关于可逆矩阵，大家应该都很熟悉了。若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵， $\boldsymbol{B}$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵。当然， $\boldsymbol{B}$ 也为可逆矩阵， $\boldsymbol{A}$ 就是 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵。

关于初等变换，之前也已经讲过。初等变换共有六种：互换两行，某行乘以 k（$k\neq0$），某行乘以 k 之后加到另外一行，互换两列，某列乘以 k（$k\neq0$），某列乘以 k 之后加到另外一列。

初等矩阵大家也不陌生，单位矩阵经过一次初等变换后形成的矩阵称为初等矩阵。

矩阵的秩是通过子式来定义的，之前用大量篇幅讲过。

上面说的都是一些最基本的知识点，现在把这几个知识点融会贯通，使得同学们对于这部分知识的掌握达到考研的要求。

2.10.1 可逆矩阵与初等矩阵的关系

一个可逆矩阵可以写为若干个初等矩阵的乘积。至于具体可写为多少个初等矩阵的乘积及每个初等矩阵是什么，就不是考研所要求的范围了。

例如，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，则必有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_n$，其中 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 均为初等矩阵。

2.10.2 初等矩阵与初等变换的关系

初等矩阵左乘任何一个矩阵，相当于给该矩阵进行相应的初等行变换；初等矩阵右乘任何一个矩阵，相当于给该矩阵进行相应的初等列变换。

这个知识点太有用了，学会了这个知识点，以后在计算涉及初等矩阵的乘法题时，就方便多了。

例. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$。

解： 先来看 $\boldsymbol{AB}$。

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换（第一行×2）后得到的矩阵，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是初等矩阵，则此题属于初等矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{B}$。根据之前所述，相当于给 $\boldsymbol{B}$ 进行相应的初等行变换。“相应的”在本题中指的是“初等矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过怎样的行变换变来的，则也把 $\boldsymbol{B}$ 进行怎样的行变换。”本题中，初等矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第一行乘以 2 之后形成的，所以只要将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第一行乘以 2，就是本题的答案。

所以 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&4&6\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

再来看 $\boldsymbol{BA}$。

$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，刚才已经说了，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是初等矩阵，因为它是单位矩阵 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 经过一次初等变换（第一行×2）后得到的，但是，同学们发现没有，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可以由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第一列乘以 2 得到。现在就得这么看，因为现在初等矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在乘号右边，所以是初等矩阵 $\boldsymbol{A}$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{B}$，相当于把 $\boldsymbol{B}$ 进行相应的初等列变换而不是行变换。那就必须知道矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过怎样的列变换得到的。既然 $\boldsymbol{A}$ 这个初等矩阵是单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第一列乘以 2 后得到的，则只要把 $\boldsymbol{B}$ 的第一列乘以 2，就可以得到 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$。

所以 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&3\\8&5&6\\14&8&9\end{pmatrix}$

这道题已经做完了，利用这种方法来做矩阵乘法会非常方便。但是千万别忘了，只有相乘的两个矩阵中有初等矩阵（单位矩阵经过一次初等变换后所形成的矩阵）时，才可以这么做。另外，同样一个初等矩阵，如果在乘号左侧，则看它是由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过怎样的初等行变换后得到的，如果在乘号右侧，则看它是由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过怎样的初等列变换后得到的。

考研题 2.7

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}+a_{31}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}+a_{21}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}+a_{11}\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

则 $\boldsymbol{B}$ 为：

（a）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$ （b）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$ （c）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$ （d）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$

解：这是一道选择题，咱们就一个一个的验证吧。

（a）选项：先来算 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$。观察 $\boldsymbol{P}_1$ 矩阵，发现 $\boldsymbol{P}_1$ 是一个初等矩阵。$\boldsymbol{P}_1$ 是单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第一、三行互换后所得到的矩阵。同时 $\boldsymbol{P}_1$ 也是单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第一、三列互换后得到的矩阵。由于在 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$ 中，初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$ 在乘号的左侧，关注前者而不关注后者。所以 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$ 是将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一、三行互换后所得到的矩阵。

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix}$$

再来算 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$。观察 $\boldsymbol{P}_2$ 矩阵，发现 $\boldsymbol{P}_2$ 也是一个初等矩阵。$\boldsymbol{P}_2$ 是单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第三行乘以 1 加到第一行后所得到的矩阵，同时 $\boldsymbol{P}_2$ 也是单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第一列乘以 1 加到第三列后所得到的矩阵。由于在 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}_2$ 中，初等矩阵 $\boldsymbol{P}_2$ 在乘号右侧，关注后者而不关注前者。所以 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$ 是将矩阵 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$ 的第一列乘以 1 加到第三列后所得到的矩阵。

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}+a_{31}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}+a_{21}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}+a_{11}\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

所以（a）选项就是正确的选项。至于（b）、（c）、（d）选项，我只给出最终结果，同学们一定要做一遍，看看和我给出的结果是否一致。

（b）选项：

$$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}a_{13}+a_{33}&a_{12}+a_{32}&a_{11}+a_{31}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{33}&a_{32}&a_{31}\end{pmatrix}$$

（c）选项：

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}+a_{31}&a_{12}+a_{32}&a_{13}+a_{33}\end{pmatrix}$$

（d）选项：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}a_{13}&a_{12}&a_{11}+a_{13}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}+a_{23}\\a_{33}&a_{32}&a_{31}+a_{33}\end{pmatrix}$$

2.10.3 初等变换与矩阵的秩的关系

初等变换是不改变矩阵的秩的。换言之，一个矩阵无论经过多少次初等变换，得到新矩阵的秩与原矩阵的秩是一样的。

考研题 2.8 矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)$，其中 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 均为三维向量，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是满秩矩阵。证明矩阵 $\boldsymbol{B}=\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1\right)$ 也是满秩矩阵。

解：满秩矩阵一定是方阵，也就是说满秩矩阵的行数和列数相等。我们把秩等于行数（列数）的方阵称为满秩矩阵。比如，一个四行四列的矩阵，如果它是满秩矩阵，则说明该矩阵的秩为 4。当然，一个秩为 3 的满秩矩阵一定是一个三行三列的矩阵。对于不是方阵的矩阵，根本不存在满秩或不满秩的这种表达，只能说它的秩为多少。

现在我们来看此题，当第一眼看到这道题时，脑子里是否想起了什么?还记得 1.14 节讲的是什么吗?忘了的话就回去看看。根据 1.14 节得：

$$\boldsymbol{B}=\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

现在计算一下矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ 所对应的行列式 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}$ 的值。

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=1+0+1-0-0-0=2\neq 0$$

根据 1.4 节（第一个大总结）可知：一个矩阵所对应的行列式不为 0 的充分必要条件是该矩阵可逆，因此，矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ 是可逆矩阵。

根据 2.10.1 节（可逆矩阵与初等矩阵的关系）可知：

$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_n$，其中 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 均为初等矩阵，则

$$\boldsymbol{B}=\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_n$$

根据 2.10.2 节（初等矩阵与初等变换的关系）可知：

$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_n$ 相当于给 $\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)$ 进行了很多次初等列变换。

根据本节（初等变换与矩阵的秩的关系）可知：

所以 $\boldsymbol{B}=\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_n$ 的秩与 $\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)$ 的秩是一样的。由于 $\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)$ 是三阶方阵且题中说 $\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)$ 是满秩的，可知 $\boldsymbol{A}=\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)$ 的秩等于 3，即 $r(\boldsymbol{A})=3$，所以 $r(\boldsymbol{B})=3$，又因为 $\boldsymbol{B}$ 是三阶方阵，所以 $\boldsymbol{B}$ 是满秩矩阵。

2.10.4　初等矩阵的逆矩阵

前面刚刚讲完，一个可逆矩阵可以写为若干个初等矩阵的乘积。现在要讲的知识点是：初等矩阵本身一定是可逆矩阵，并且要告诉大家如何快速求出初等矩阵的逆矩阵。

首先接受一个事实：初等矩阵必为可逆矩阵。这一点在这里不证明，我想要讲的是，如何快速求出初等矩阵的逆矩阵。之前早已讲过，求一个矩阵的逆矩阵的方法是利用公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\times\boldsymbol{A}^{*}$ 来求。**然而，对于初等矩阵来说，求其逆矩阵根本不用这么麻烦。**同学们可能迫不及待地想知道到底有什么快捷的方法求初等矩阵的逆矩阵，我马上就说。

我们知道初等矩阵是单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换后得到的，而初等变换可以分为以下三种：互换两行（列），以 $k(k\neq 0)$ 乘以某行（列），某行（列）乘以 k 后加到另一行（列），因此，初等矩阵也分为如下三种。

第一种初等矩阵表示为 $\boldsymbol{E}_{ij}$，意思是它是单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过互换第 i、j 两行（或互换第 i、j 两列）所得到的。

例. 三阶矩阵 $\boldsymbol{E}_{12}$ 为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

第二种初等矩阵表示为 $\boldsymbol{E}_i(k)$，意思是它是单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过第 i 行（或第 i 列）乘以 k 所得到的。

例. $\boldsymbol{E}_2(3)$ 为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

第三种初等矩阵表示为 $\boldsymbol{E}_{ij}(k)$，意思是它是单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过第 i 行（或第 j 列）乘以 k 后加到第 j 行（或第 i 列）所得到的。

例. 三阶矩阵 $\boldsymbol{E}_{12}(3)$ 为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

通过以上讲解，我们了解了初等矩阵分为三类，下面讲解每一类初等矩阵的逆矩阵的求法。

（1）$\left[\boldsymbol{E}_{ij}\right]^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}$

例. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

（2）$\left[\boldsymbol{E}_i(k)\right]^{-1} = \boldsymbol{E}_i(\frac{1}{k})$

例. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

（3）$\left[\boldsymbol{E}_{ij}(k)\right]^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}(-k)$

例. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.10.5 等价矩阵

同型矩阵的定义：如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 $\boldsymbol{m}$ 行 $\boldsymbol{n}$ 列，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 也有 $\boldsymbol{m}$ 行 $\boldsymbol{n}$ 列，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵。

例. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ 是同型矩阵。

等价矩阵的定义：如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵，并且 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$（矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩相等），则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是等价矩阵。由等价矩阵的定义可知，等价矩阵一定是同型矩阵，而同型矩阵则不一定是等价矩阵。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是等价矩阵，记作 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$。

等价矩阵还有一个充分必要条件：$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B} \Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{B}$。

考研题 2.9 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 等价，则有：

（a）$|\boldsymbol{A}| = a \neq 0$，则 $|\boldsymbol{B}| = a$；

（b）$|\boldsymbol{A}| = a \neq 0$，则 $|\boldsymbol{B}| = -a$；

（c）$|\boldsymbol{A}| = a \neq 0$，则 $|\boldsymbol{B}| = 0$；

（d）$|\boldsymbol{A}| = 0$，　则 $|\boldsymbol{B}| = 0$。

解： 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是等价矩阵，根据等价矩阵的充分必要条件，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{B}$。两边取行列式得：

$|\boldsymbol{PAQ}| = |\boldsymbol{B}|$

根据 1.13 节中的“抽象行列式的计算”中的公式⑤，可得：

$|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{A}||\boldsymbol{Q}| = |\boldsymbol{B}|$

由于 $\boldsymbol{P}$ 、$\boldsymbol{Q}$ 为可逆矩阵，根据 2.4 节（第一个大总结），得：

$|\boldsymbol{P}| \neq 0$，$|\boldsymbol{Q}| \neq 0$

现在观察四个选项，只有（d）成立，此题选（d）。

2.11　分块矩阵及一些知识点的深化

2.11.1　分块矩阵

在考研数学的线性代数中，分块矩阵是很常用的。分块矩阵指的是用若干横线和纵线把一个矩阵分成若干小块，每一小块称为原矩阵的子矩阵，原矩阵称为分块矩阵。

例. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 6 & 8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 9\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}9 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就是一个分块矩阵。

例. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 6\\ 3 & 4 & 9\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}7\\ 8\\ 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}2 & 9 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_4=2$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就是一个分块矩阵。

例. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}$，其中 $B_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 3 & 4\\ 2 & 9\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 6 & 8\\ 9 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就是一个分块矩阵。

通过以上三个例子，我们可以很明显地看出：**同样一个矩阵，可以以不同的形式对其进行分块，而且即使分块的形式相同，每一块也可以不同。**

第 1 章讲到的矩阵的向量表示法其实就是矩阵的一种分块形式。

2.11.2　反对称矩阵

之前已经给大家介绍过反对称矩阵，为什么本节还要讲反对称矩阵呢？看看 **2.11** 节的题目“分块矩阵以及一些知识点的深化”，本节属于知识点的深化。

具体来说，本节中，将给大家总结证明某矩阵是反对称矩阵的方法，共有以下两种方法。

方法 1：证明 $A^T=-A$

$\boxed{\text{考研题 2.10}}$ 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，记 $f(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$，若 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，证明 $f(\boldsymbol{A})$ 是反对称矩阵。

解：$\left[f(\boldsymbol{A})\right]^{\mathrm{T}}=\left[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}\right]^{\mathrm{T}}$　　（1）式

根据 2.8 节关于矩阵转置的四个公式，结合（1）式得：

$\left[f(\boldsymbol{A})\right]^{\mathrm{T}}=\left[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}\right]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\left[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}\right]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$　　（2）式

由于 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，结合（2）式得：

$\left[f(\boldsymbol{A})\right]^{\mathrm{T}}=\left[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}\right]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$　　（3）式

根据 2.9 节（关于矩阵可逆的六个公式），结合（3）式得：

$\left[f(\boldsymbol{A})\right]^{\mathrm{T}}=\left[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\right]^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$　　（4）式

根据 2.8 节关于矩阵的转置的四个公式，结合（4）式得：

$\left[f(\boldsymbol{A})\right]^{\mathrm{T}}=\left[\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right]^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$　　（5）式

由于 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，结合（5）式得：

$\left[f(\boldsymbol{A})\right]^{\mathrm{T}}=\left[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right]^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$　　（6）式

由于此题的已知条件中有：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，而我们知道 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$，结合（6）式得：

$\left[f(\boldsymbol{A})\right]^{\mathrm{T}}=\left[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\right]^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1})$　　（7）式

由于 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}$（任何矩阵左乘或右乘单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 还等于它本身），结合（7）式得：

$\left[f(\boldsymbol{A})\right]^{\mathrm{T}}=\left[\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}\right]^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E})$　　（8）式

根据 **2.6** 节（矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律），结合（**8**）式得：

$$\left[f(\boldsymbol{A})\right]^{\mathrm{T}}=\left[\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)\right]^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) \qquad \text{（9）式}$$

根据 **2.9** 节关于矩阵可逆的六个公式，结合（**9**）式得：

$$\left[f(\boldsymbol{A})\right]^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) \qquad \text{（10）式}$$

根据 **2.6** 节（矩阵乘法满足结合律），结合（**10**）式得：

$$\begin{aligned}\left[f(\boldsymbol{A})\right]^{T}&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\right)(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\\&=(\boldsymbol{A}+E)^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\\&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\\&=-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\end{aligned} \qquad \text{（11）式}$$

根据 **2.7** 节（以下几个矩阵相乘是可以交换的），结合⑪式得：

$$\left[f(\boldsymbol{A})\right]^{\mathrm{T}}=-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)^{-1} \qquad \text{（12）式}$$

由于本题的已知条件中有 $f(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\right)^{-1}$，结合⑫式得：

$$\left[f(\boldsymbol{A})\right]^{\mathrm{T}}=-f(\boldsymbol{A})$$

所以 $f(\boldsymbol{A})$ 为反对称矩阵。

此题是考研中的一道较复杂的题，难在计算上。

方法 2：证明 $a_{ij}=-a_{ji}$

$\boxed{\text{考研题 2.11}}$ 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，若对任意的 $\vec{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$，都有 $\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}=0$，证明 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵。

解:设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

由于本题的已知条件中说了，对任意的 $\vec{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$，都有 $\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}=0$。那么不妨取：

$\vec{X}_i=(0,0,\cdots,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$。

注：在列向量 $\vec{X}_i$ 中除了第 i 行是 1 以外，其余行都是 0。

则有：

$$\vec{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}_i=a_{ii}=0$$

不妨再取 $\vec{\boldsymbol{P}}=(0,0,\cdots,1,\cdots,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$。

注：在列向量中除了第 i 行和第 j 行是 1 以外，其余行都为 0。

则有:

$$\begin{aligned}\vec{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{P}&=(\vec{X}_i+\vec{X}_j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\vec{X}_i+\vec{X}_j)\\&=\left(\vec{X}_i^{\mathrm{T}}+\vec{X}_j^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{A}(\vec{X}_i+\vec{X}_j)\end{aligned}$$

根据矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律, 得

$$\begin{aligned}&=\vec{X}_i\boldsymbol{A}\vec{X}_i^{\mathrm{T}}+\vec{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}_j+\vec{X}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}_i+\vec{X}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}_j\\&=a_{ii}+a_{ij}+a_{ji}+a_{jj}\\&=0\end{aligned}$$

由于 $a_{ii}=a_{jj}=0$，所以有 $a_{ij}+a_{ji}=0$，即 $a_{ij}=-a_{ji}$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵。

2.11.3 求一个矩阵的逆矩阵

本节也属于知识点的深化。之前只讲过利用公式法来求矩阵的逆矩阵，本节将告诉大家：共有四种方法可以求一个矩阵的逆矩阵。

方法 1：利用公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\times\boldsymbol{A}^{*}$。

$\boxed{\text{考研题 2.12}}$ 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

解： 用公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\times\boldsymbol{A}^{*}$，其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵。

先计算 $|\boldsymbol{A}|$，$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{vmatrix}=-2\neq 0$，根据 2.4 节（第一个大总结）可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的确是可逆矩阵，再算 $\boldsymbol{A}^{*}$。

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{vmatrix}1&2\\-1&-1\end{vmatrix}=1,\quad \boldsymbol{A}_{12}=-\begin{vmatrix}1&2\\-1&-1\end{vmatrix}=-1,\quad \boldsymbol{A}_{13}=\begin{vmatrix}1&1\\-1&-1\end{vmatrix}=0$$

$$\boldsymbol{A}_{21}=-\begin{vmatrix}2&-1\\-1&-1\end{vmatrix}=3,\quad \boldsymbol{A}_{22}=\begin{vmatrix}0&-1\\-1&-1\end{vmatrix}=-1,\quad \boldsymbol{A}_{23}=-\begin{vmatrix}0&2\\-1&-1\end{vmatrix}=-2$$

$$\boldsymbol{A}_{31}=\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}=5,\quad \boldsymbol{A}_{32}=-\begin{vmatrix}0&-1\\1&2\end{vmatrix}=-1,\quad \boldsymbol{A}_{33}=\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}=-2$$

令 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\boldsymbol{A}_{13}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}&\boldsymbol{A}_{23}\\\boldsymbol{A}_{31}&\boldsymbol{A}_{32}&\boldsymbol{A}_{33}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&3&5\\-1&-1&-1\\0&-2&-2\end{pmatrix}$

则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\times\boldsymbol{A}^{*}=-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&3&5\\-1&-1&-1\\0&-2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}&-\dfrac{3}{2}&-\dfrac{5}{2}\\\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}\\0&1&1\end{pmatrix}$

方法 2：利用初等行变换或初等列变换，即

$$[\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E}]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{A}^{-1}]\text{或}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{A}^{-1}\end{bmatrix}。$$

此方法以前没有讲过，现在结合下面的例题来给大家讲解。这是求一个矩阵的逆矩阵最常用的方法。

$\boxed{\text{考研题 2.13}}$ 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

解：采用初等行变换或初等列变换都可以。如果想采用初等行变换，那么就在原矩阵<u>右侧</u>加一个与原矩阵同阶的单位矩阵；如果想采用初等列变换，那么就在原矩阵<u>下侧</u>加一个与原矩阵同阶的单位矩阵。 此题我们采用初等行变换来做（当然，采用初等列变换来做也是可以的），又因为原矩阵为三阶方阵，因此在其右侧加一个三阶的单位矩阵 $\boldsymbol{E}$。

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&2&-1&1&0&0\\1&1&2&0&1&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

然后，只能采用初等行变换，即互换两行，然后某行乘以 k（$k\neq 0$），再某行乘以 k 加到另外一行。当把矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的左侧化为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 后，右侧即为 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

$$\begin{pmatrix}0&2&-1&1&0&0\\1&1&2&0&1&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{互换第一、二行}}\begin{pmatrix}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第一行}\times 1\text{加到第三行}}\begin{pmatrix}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第三行}\times(-2)\text{加到第一行}}\begin{pmatrix}1&1&0&0&-1&-2\\0&2&-1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第三行}\times1\text{加到第二行}}\begin{pmatrix}1&1&0&0&-1&-2\\0&2&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二行}\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&1&0&0&-1&-2\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二行}\times(-1)\text{加到第一行}}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1&1\end{pmatrix}$$

此时左侧已经是单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 了，所以:

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&1\end{pmatrix}$$

与采用方法 1 得出的答案对比一下，可以看出结果是一样的。要说明一点，在使用方法 2 时，虽然进行初等变换的过程不同，但最后的答案一定是一样的。当然，此题也可以将单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 加在原矩阵下侧，然后用初等列变换来做，有兴趣的同学可以做一下。

方法 3：利用定义式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$ 来求一个矩阵的逆矩阵（用于矩阵没有被直接给出的题）。

考研题 2.14 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，（1）证明 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}$ 可逆，并求它们的逆；（2）当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$ 时，判断 $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 是否可逆，并说明理由。

（1）**解：** $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$

$\Rightarrow \boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$

$\Rightarrow \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times2\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$

$\Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$

$\Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=3\boldsymbol{E}$

$\Rightarrow \boldsymbol{A}\times\dfrac{(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})}{3}=\boldsymbol{E}$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}}{3}\Rightarrow\dfrac{\boldsymbol{A}}{3}\times(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}}{3}$

由于 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，所以 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}=-5\boldsymbol{E}$。

而 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$。也就是说，$(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=-5\boldsymbol{E}$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}}{-5}$。

（2）$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$ 时，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{O}$。

由于 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，因式分解得 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$。现在把矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 以列分块，即令 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\left(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n\right)$，其中每一列都是齐次方程组 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\vec{X}=\vec{0}$ 的解，而 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 不是零矩阵，说明 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n$ 中至少有一个向量不为 $\vec{0}$，即齐次方程组 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\vec{X}=\vec{0}$ 有非零解。根据 2.4 节（第一个大总结）有：矩阵 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})$ 不是可逆矩阵。

方法 4：若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_n$，其中 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 均为可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}_n^{-1}\boldsymbol{P}_{n-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_1^{-1}$。也就是说，当某矩阵可以表示为若干可逆矩阵的乘积时，则该矩阵为可逆矩阵。

考研题 2.15 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是同阶可逆方阵，且 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 是可逆矩阵，证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，并求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$。

解：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\\
&=\boldsymbol{AE}+\boldsymbol{EB}\\
&=\boldsymbol{AE}+\boldsymbol{AA}^{-1}\boldsymbol{B}\\
&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\\
&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\\
&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

由本题的已知条件可知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 均为可逆矩阵，所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵。

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\left[\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\right)\boldsymbol{B}\right]^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\left(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

2.11.4 特殊分块矩阵的逆矩阵

针对三种特殊的分块矩阵，人们总结出了求其逆矩阵的方法，下面我分别进行介绍。

1．对角块矩阵的逆矩阵求法

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & A_2\end{pmatrix}$

其中 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 都是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的子矩阵，且是方阵。矩阵 $\boldsymbol{O}$ 也是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的子矩阵，但不一定是方阵，矩阵 $\boldsymbol{O}$ 中的每一个数均为 **0**。若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆。

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^{-1}\end{pmatrix}$$

例．$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\3&4&0&0&0\\0&0&0&2&-1\\0&0&1&1&2\\0&0&-1&-1&-1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

解：将 $\boldsymbol{A}$ 写为分块矩阵的形式。$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\end{pmatrix}$。

通过计算得出：

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}-8&4\\6&-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&1\end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-8&4&0&0&0\\6&-2&0&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$。

2．反对角块矩阵的逆矩阵求法

设 $A=\begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}$，其中 A_1、A_2 都是矩阵 A 的子矩阵，且是方阵。矩阵 O 也是矩阵 A 的子矩阵，但不一定是方阵，矩阵 O 中的每一个数均为 $\mathbf{0}$。若 $|A|\neq 0$，则 A 可逆。

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{pmatrix}$$

例．$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}？

解：将 A 写为分块矩阵的形式，$A=\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}$，其中 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$。

通过计算得出：

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix},\ C^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3．二阶三角块矩阵的逆矩阵求法

$$A=\begin{pmatrix} B_{m\times m} & D \\ O & C_{n\times n} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} B_{m\times m} & O \\ D & C_{n\times n} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} O & B_{m\times m} \\ C_{n\times n} & D \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} D & B_{m\times m} \\ C_{n\times n} & O \end{pmatrix}$$

二阶三角块矩阵共有以上四种，拿其中一种举例，说明二阶三角块矩阵的逆矩阵该如何去求。剩下三种，方法完全一样。注意，在以上四个式子中，矩阵 B 和矩阵 C 必须都是可逆的。也就是说 $|B|\neq 0,|C|\neq 0$。否则，矩阵 A 就不是可逆矩阵，也就不存在 A^{-1} 了。下面通过一道考研题来给大家讲解。

考研题 2.16　已知分块矩阵 $A=\begin{pmatrix} B_{m\times m} & O \\ D & C_{n\times n} \end{pmatrix}$，矩阵 B 和矩阵 C 均为可逆矩阵，求 A^{-1}。

解：设 $A^{-1}=\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$，由定义：

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

根据矩阵乘法法则得：

$$BX+OZ=E$$

$$\Rightarrow BX=E \qquad (1)\text{ 式}$$

$$BY+OW=O$$

$$\Rightarrow BY=O \qquad (2)\text{ 式}$$

$$DX+CZ=O \qquad (3)\text{ 式}$$

$$DY+CW=E \qquad (4)\text{ 式}$$

由（1）式直接可得：$X=B^{-1}$。

再来看（2）式，由于矩阵 B 为可逆矩阵（这是已知条件），根据 2.4 节（第一个大总结），方程组 $B\vec{X}=\vec{0}$ 有唯一零解。而 $BY=O$，如果把矩阵 Y 以列分块，那么 Y 的每一列都是齐次方程组 $B\vec{X}=\vec{0}$ 的解。刚才说了，方程组 $B\vec{X}=\vec{0}$ 有唯一零解，所以 Y 的每一列都是零向量，合起来就是零矩阵，即 $Y=O$（**注意**，千万不能由 $BY=O$ 直接得 $Y=O$，因为两个非零矩阵相乘很可能等于零矩阵）。

现在来看（3）式，（3）式是 $DX+CZ=O$，已经算出 $X=B^{-1}$ 了，因此 $DB^{-1}+CZ=O$，移项得 $CZ=-DB^{-1}$。由于题目中说了，矩阵 C 为可逆矩阵，所以 C^{-1} 存在。等式两侧同时左乘 C^{-1} 得 $C^{-1}CZ=-C^{-1}DB^{-1}$。由于 $C^{-1}C=E$，而 $EZ=Z$，所以 $Z=-C^{-1}DB^{-1}$。

最后来看（4）式。（4）式是 $DY+CW=E$，由于已经算出 $Y=O$，因此有 $CW=E$，即 $W=C^{-1}$。

综上所述 $X=B^{-1}$，$Y=O$，$Z=-C^{-1}DB^{-1}$，$W=C^{-1}$，

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$。

2.11.5 求一个矩阵的若干次幂

求一个矩阵的若干次幂一共有四种方法。

方法 1：真去乘，然后观察规律即可。

例. 求$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{100}$

解：先算$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{2}$，即$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$。

通过计算可得:

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{2}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$。

继续算$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{3}$，通过计算可得$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{3}=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$

由此可得$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{100}=\begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}$。有的同学可能会想，二次幂和三次幂虽然符合这个规律，但是 100 次幂不一定啊。首先，能这么想非常好，然后，我告诉你，在计算二次幂和三次幂时就会发现，乘完后的第一行第一列的数为多少，只与它本身相关。乘完后第二行第二列的数也是一样。

方法 2：利用矩阵乘法的结合律。

考研题 2.17 $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$，求 B^n。

解：观察一下该矩阵，发现每行都是同一个基准$(1,-1,2)$的倍数。第一行是该基准乘以 1，第二行是该基准乘以-1，第三行是该基准乘以 2。满足这种性质的矩阵就可以写为一个列向量乘以一个行向量的形式（需要注意的是，虽然一个 n 维列向量乘以一个 n 维行向量在形式上肯定等于一个 n 阶方阵，这一点在 2.5 节介绍过，但反过来就不对了。也就是说，并不是所有的 n 阶方阵都可以写为一个 n 维列向量与一个 n 维行向量相乘的形式，只有本题这样的方阵才可以写为一个 n 维列向量与一个 n 维行向量相乘的形式）。其中，列向量中的数为基准的倍数，行向量即为基准。

因此：

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}(1,-1,2)=\vec{a}\vec{a}^{\mathrm{T}}$，其中$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

解释：列向量之所以为$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，是因为在矩阵$\boldsymbol{B}$中，第一行为基准$(1,-1,2)$乘以1，第二行为基准$(1,-1,2)$乘以$-1$，第三行为基准$(1,-1,2)$乘以2。

则$\boldsymbol{B}^n=\overbrace{\left(\vec{a}\vec{a}^{\mathrm{T}}\right)\left(\vec{a}\vec{a}^{\mathrm{T}}\right)\cdots\left(\vec{a}\vec{a}^{\mathrm{T}}\right)}^{n个}$

由于矩阵乘法满足结合律，意味着可以将括号加在任何位置，所以：

$$\boldsymbol{B}^n=\vec{a}\overbrace{\left(\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{a}\right)\left(\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{a}\right)\cdots\left(\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{a}\right)}^{(n-1)个}\vec{a}^{\mathrm{T}}$$

而$\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{a}$是行向量乘以列向量，因此$\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{a}$是一个数而不是一个矩阵，该数为：

$$\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{a}=\begin{pmatrix}1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=6$$

所以：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^n&=6^{n-1}\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{a}\\&=6^{n-1}\boldsymbol{B}\\&=6^{n-1}\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\boxed{考研题2.18}$ $\vec{a}=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\vec{\beta}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\vec{a}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$， 求$\boldsymbol{A}^n$？

解：此题与上一道题用的方法完全一样，而且更简单。简单之处在于：此题根本不用自己找基准，找每行是基准的多少倍，题目中已经分解好了，$\boldsymbol{A}=\vec{a}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$，因此：

$$\boldsymbol{A}^n=\overbrace{\left(\vec{a}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\right)\left(\vec{a}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\right)\cdots\left(\vec{a}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\right)}^{n个}$$

由于矩阵乘法满足结合律，意味着可以将扩号加在任何位置，所以：

$$\boldsymbol{A}^n=\vec{a}\overbrace{\left(\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{a}\right)\left(\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{a}\right)\cdots\left(\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{a}\right)}^{n-1个}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$$

而$\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{a}$是行向量乘以列向量，因此$\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{a}$是一个数而不是一个矩阵，该数为：

$$\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{a}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3$$

所以：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=3^{n-1}\vec{a}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\\&=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

方法 3：将矩阵 A 写为 $A=(kE+B)$ 的形式，然后利用二项式定理。

考研题 2.19 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，计算 A^n。

解：此题用方法 1 做不了，因为根本找不出规律，用方法 2 也做不了，因为找不出基准，这样的题就应该用方法 3 来做。

$$A=1\times\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

记 $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=B$，则：

$$A=1E+B$$

$$A^n=(1E+B)^n$$

根据二项式定理，$(1E+B)^n=C_n^0(1E)^nB^0+C_n^1(1E)^{n-1}B^1+C_n^2(1E)^{n-2}B^2+\cdots+C_n^n(1E)^0B^n$，

大家都有高中的数学基础，高中的排列组合课本有如下公式：

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}$$

$$C_n^k=C_n^{n-k}$$

$$C_n^n=C_n^0=1$$

另外要告诉大家的是：任何矩阵的零次幂都等于与之同阶的单位矩阵 E。

大家观察一下二项展开式的等式右侧，是不是觉得有很多项。也就是说，你们也许会认为使用二项式定理之后，依然没法算，但事实并非如此，让我们观察矩阵 B。

$$B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},B^0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},B^1=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ B^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

所以 $B^3,B^4,\cdots,B^n$ 都为 $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$。

因此，二项展开式的等式右侧是可以简化的，所以：

$$A^n=(E+B)^n=C_n^0E^nB^0+C_n^1E^{n-1}B^1$$

由于 $C_n^0=1$、$C_n^1=n$，单位矩阵 E 的任何次幂还等于单位矩阵 E，而 $B^0=E$，所以：

$$\begin{aligned}A^n&=E+nB\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\n&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

这道题就做完了。也许有的同学会这样想：此题的 B 是个特例，从 B 的二次幂以后就是零矩阵了，所以二项式定理的右侧才可以简化。如果 B 没这么特殊怎么办？我的回答是：**不会出那样的题。**

方法 4：将所给矩阵分块后，结合使用方法 1、方法 2 和方法 3。

考研题 2.20 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，计算 A^n。

解：设

$$O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

则 $A=\begin{pmatrix}B&O\\O&C\end{pmatrix}$

使用方法 1。

$$A^2=\begin{pmatrix}B & O\\ O & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B & O\\ O & C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^2 & O\\ O & C^2\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}B^2 & O\\ O & C^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B & O\\ O & C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^3 & O\\ O & C^3\end{pmatrix}$$

所以 $A^n=\begin{pmatrix}B^n & O\\ O & C^n\end{pmatrix}$，因此，只要计算出 B^n 和 C^n 即可。

为了求 B^n，我们使用方法 2。

$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，记 $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\vec{a}$，则 $B=\vec{a}\vec{a}^{\mathrm{T}}$。

$$B^n=\overbrace{\left(\vec{a}\vec{a}^{\mathrm{T}}\right)\left(\vec{a}\vec{a}^{\mathrm{T}}\right)\cdots\left(\vec{a}\vec{a}^{\mathrm{T}}\right)}^{n\text{个}}$$

$$=\vec{a}\overbrace{\left(\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{a}\right)\left(\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{a}\right)\cdots\left(\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{a}\right)}^{(n-1)\text{个}}\vec{a}^{\mathrm{T}}$$

由于 $\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{a}=2$，所以：

$$B^n=2^{n-1}\vec{a}\vec{a}^{\mathrm{T}}=2^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 2^{n-1}\\ 2^{n-1} & 2^{n-1}\end{pmatrix}$$

为了求 C^n，使用方法 3。其实 C^n 已经在上一道题中使用方法 3 计算过了。 $C^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}$

所以：$A^n=\begin{pmatrix}B^n & O\\ O & C^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 & 0\\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & n & 1\end{pmatrix}$

这样 2.11 节（共包含 5 小节）已经讲完了。

第3章

向　量

3.1　向量与向量组的基本概念

在第 1 章，就已经讲过向量的概念，并且之前的很多题目都用到了向量，因此这里只是复习一下。

向量分为行向量和列向量两种，只要把它理解为从矩阵中抽出一行或从矩阵中抽出一列即可。

例.

$(1\quad 2\quad 3)$、$(1\quad 5\quad 7)$、$(6\quad 8)$、$(6\quad 10\quad 12\quad 19)$ 等都是行向量。

$(1\quad 2\quad 3)^{\mathrm{T}}$、$(1\quad 5\quad 7)^{\mathrm{T}}$、$(6\quad 8)^{\mathrm{T}}$、$(6\quad 10\quad 12\quad 19)^{\mathrm{T}}$ 等都是列向量。

向量是矩阵，并且是特殊的矩阵。其特殊性体现在：该矩阵的行数或列数为 1。

下面介绍一下向量维数的概念。**对于一个行向量来说，它有几列，它就是几维行向量。**例如，$(1\quad 2\quad 3)$、$(1\quad 5\quad 7)$ 是三维行向量，$(6\quad 8)$ 是二维行向量，$(6\quad 10\quad 12\quad 19)$ 是四维行向量；**对于一个列向量来说，它有几行，它就是几维列向量。**例如，$(1\quad 2\quad 3)^{\mathrm{T}}$、$(1\quad 5\quad 7)^{\mathrm{T}}$ 是三维列向量，$(6\quad 8)^{\mathrm{T}}$ 是二维列向量，$(6\quad 10\quad 12\quad 19)^{\mathrm{T}}$ 是四维列向量。

另外，一般来说，向量不用大写英文字母表示，而是用带箭头的字母（如 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\ \vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ）表示，如，$\vec{\alpha}=(1\quad 5\quad 7)^{\mathrm{T}}$。

了解向量的基本概念后，再来看看向量组的意思。**所谓向量组，顾名思义，就是一个箱子，里面装着一堆向量。**例如，“由 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 所组成的向量组 $\boldsymbol{A}$”的意思是“向量组 $\boldsymbol{A}$ 中包含三个向量，分别是 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$”

3.2　线性表出的概念

“线性表出”也叫“线性表示”，是反映一个<u>向量</u>与一个<u>向量组</u>之间关系的一个名词。具体的定义如下。

若向量 $\vec{\beta}=k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_n\vec{\alpha}_n$ （其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为常数），则称向量 $\vec{\beta}$ 可由向量组 A（向量组 A 中包含 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n$ ）线性表出。

例. 向量 $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ 能否由向量组 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 线性表出？

解： 由于 $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，

所以向量 $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ 可以由向量组 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 线性表出。

例. 向量 $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\2\end{pmatrix}$，问 $\vec{b}$ 能否由向量组 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ 线性表出？

解： 由于 $\begin{pmatrix}2\\3\\4\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

所以向量$\vec{b}$可以由向量组$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$线性表出。

3.3 线性相关与线性无关的概念

存在 n 个维数相同的向量，这 n 个向量要么就是线性相关的，要么就是线性无关的，不可能既线性相关又线性无关，也不可能既不线性相关又不线性无关。

那么，线性相关与线性无关到底指的是什么呢？设有 n 个维数相同的行向量（或列向量）$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$，存在一个等式：$k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+\cdots+k_n\vec{a}_n=\vec{0}$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 都是常数。我们知道，当 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 这 n 个常数都为 0 时，上述等式一定成立。但是，当 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 这 n 个常数<u>不全为 0</u> 时（注意是不全为 0 而不是全不为 0），上述等式就<u>不一定</u>成立了。

这里引出线性相关和线性无关的定义。设有 n 个维数相同的行向量（或列向量）$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$。若<u>只有</u>当 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 全为 0 时，等式 $k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+\cdots+k_n\vec{a}_n=\vec{0}$ 成立，则称向量组$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$线性无关。否则，称向量组$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$线性相关。

例. 设 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}$，问向量$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$线性相关还是线性无关？

解： 设 $k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2=\vec{0}$

即，$k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

即，$k_1+5k_2=0$

$2k_1+6k_2=0$

$3k_1+7k_2=0$

$4k_1+8k_2=0$

只有当 k_1，k_2 这两个数都为 0 时，等式 $k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2=\vec{0}$ 才成立。

所以向量$\vec{a}_1,\vec{a}_2$线性无关。

例. 设 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\5\\8\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\\-4\end{pmatrix}$，向量$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$线性相关还是线性无关？

解： $k_1\begin{pmatrix}1\\3\\5\\8\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

当 $k_1=0$，$k_2=1$，$k_3=1$ 时，上式成立。

所以向量$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$线性相关。

例. 设 $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，问向量$\vec{a}$线性相关还是线性无关？

解： 此题虽然只有一个向量，但判断线性相关还是无关的方法与前两道题一样。

$$k\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

只有当 $k=0$ 时上式成立，所以 $\vec{a}$ 线性无关。

3.4　最大无关组

有一个向量组 **A**，向量组 **A** 中包含了 **n** 个维数相同的行向量（或列向量）$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$。这 **n** 个向量是线性相关的还是线性无关这里不作要求。

从这 **n** 个向量中取出 **r** 个向量（$r\leqslant n$），若我们取的这 **r** 个向量满足如下两个条件，则称这 **r** 个向量所组成的向量组是向量组 **A** 的一个最大无关组。

- 这 **r** 个向量是线性无关的。
- 剩下的 **n-r** 个向量中<u>任意</u>一个向量，加入到这 **r** 个向量中，所得到的 **r+1** 个向量是线性相关的。

例. 向量组 **A** 中包含五个向量：$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5$。若 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4$ 线性无关，$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ 线性相关，$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4,\vec{a}_5$ 线性相关，则向量组 **B**（向量组 **B** 中包含 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4$）就是向量组 **A** 的一个最大无关组。

最后强调如下所述三点。

（1）最大无关组是一个向量组。

（2）最大无关组不是绝对的概念，而是相对的概念。也就是说，“最大无关组”不能孤立地存在，一定要说是哪个向量组的最大无关组。

（3）一个向量组的最大无关组很可能不是唯一的。也就是说，从包含 **n** 个向量的向量组中，取满足上述两个条件的 **r** 个向量，很可能有不止一种取法。

3.5　“向量组的秩”的概念

上一节的最后强调了三点，其中第三点是：一个向量组的最大无关组很可能不是唯一的。

一个向量组的最大无关组很可能不是唯一的，一个向量组 **A** 可能有很多最大无关组，但是，无论向量组 **A** 有多少个最大无关组，向量组 **A** 的每个最大无关组中所包含的向量的个数是一样的，该个数被称为向量组 **A** 的秩。这是“向量组的秩”的定义。

例. 向量组 **A**（$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5$），向量组 **B**（$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_5$），若已知向量组 **B** 是向量组 **A** 的一个最大无关组，问：向量组 **A** 的秩是多少?

解： 由于向量组 **B** 是向量组 **A** 的一个最大无关组，又因为向量组 **B** 中包含了 3 个向量，所以向量组 **A** 的秩为 3，并且如果向量组 **A** 还有其他最大无关组，这些最大无关组中所包含的向量的个数均为 3。

3.6　“向量组的秩”与“矩阵的秩”的关系

第 2 章中，已经介绍了矩阵的秩，矩阵的秩是通过子式来定义的，而刚刚介绍的向量组的秩则是通过最大无关组中所包含的向量的个数来定义的。两者定义看似没有关系，那么这两个秩之间究竟有没有关系呢？有！<u>矩阵的秩等于向量组的秩。</u>这个等于关系的成立，使得求向量组的秩可以转化为求矩阵的秩。

例. 向量组 **A** 中包含四个向量：$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\4\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\5\end{pmatrix}$，$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$，

问向量组 **A** 的最大无关组中包含多少个向量?

解： 由“向量组的秩”的定义可知，本题要求的是向量组 **A** 的秩。

由于向量组的秩等于矩阵的秩，所以我们通过求矩阵的秩来求出向量组 **A** 的秩。

设矩阵 $\boldsymbol{B}=\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4\right)=\begin{pmatrix}2&0&0&2\\1&2&0&1\\3&-1&0&0\\1&4&5&4\end{pmatrix}$

根据第 2 章讲的矩阵的秩的求法，求出矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 4（过程省略），所以向量组 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 4。即向量组 $\boldsymbol{A}$ 的最大无关组中包含四个向量。

由于向量组 $\boldsymbol{A}$ 一共就包含四个向量，因此向量组 $\boldsymbol{A}$ 本身就是向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个最大无关组，并且向量组 $\boldsymbol{A}$ 本身是向量组 $\boldsymbol{A}$ 的唯一的一个最大无关组（之所以唯一是因为：假设向量组 $\boldsymbol{A}$ 还有别的最大无关组，那么，根据“一个向量组的各个最大无关组中包含向量的个数均相等”，可以知道我们假设的那个“别的最大无关组”中也包含四个向量，向量组 $\boldsymbol{A}$ 一共就只含四个向量，从四个向量中取四个向量只有唯一的一种取法，所以我们假设的那个“别的最大无关组”根本不存在）。

3.7 线性表出的推广

3.2 节中，介绍了线性表出的概念。在本节中，将对线性表出的概念进行推广。如何推广呢？3.2 节中介绍的是“什么叫一个<u>向量</u>可由一个向量组线性表出”，而本节将介绍的是“什么叫一个<u>向量组</u>可由一个向量组线性表出”。

若向量 $\vec{\beta}=k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_n\vec{\alpha}_n$（其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为常数），则称向量 $\vec{\beta}$ 可由向量组 A（向量组 A 中包含 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n$）线性表出。

有向量组 B（$\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3,\cdots,\vec{b}_n$），向量组 A（$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\cdots,\vec{a}_n$），若向量组 B 中的每一个向量都可以由向量组 A 线性表出，则称向量组 B 可由向量组 A 线性表出。

例. 向量组 $\boldsymbol{B}$ 中包含四个向量：$\vec{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$，$\vec{b}_2=\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}$，$\vec{b}_3=\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}$，$\vec{b}_4=\begin{pmatrix}3\\7\\2\end{pmatrix}$

向量组 $\boldsymbol{A}$ 中包含三个向量：$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$。

问向量组 $\boldsymbol{B}$ 能否由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表出？

解：

先来看 $\vec{b}_1$。

$$\vec{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{a}_1+2\vec{a}_2+5\vec{a}_3$$

说明 $\vec{b}_1$ 可由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表出。

再来看 $\vec{b}_2$。

$$\vec{b}_2=\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=2\vec{a}_1+5\vec{a}_2+8\vec{a}_3$$

说明 $\vec{b}_2$ 可由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表出。

接着看 $\vec{b}_3$。

$$\vec{b}_3=\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{a}_1+4\vec{a}_2+7\vec{a}_3$$

说明 $\vec{b}_3$ 可由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表出。

最后看 $\vec{b}_4$。

$$\vec{b}_4=\begin{pmatrix}3\\7\\2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=3\vec{a}_1+7\vec{a}_2+2\vec{a}_3$$

说明 $\vec{b}_4$ 可由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表出。

由于向量组 $\boldsymbol{B}$ 中的每一个向量都可以由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表出，所以向量组 $\boldsymbol{B}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表出。

3.8 等价向量组

本节将介绍的是等价向量组。若向量组 $\boldsymbol{A}$ 可由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表出，向量组 $\boldsymbol{B}$ 也可由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表出，则称向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 是等价向量组。

例. 向量组 $\boldsymbol{A}$：$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$；向量组 $\boldsymbol{B}$：$\vec{b}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{b}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$，$\vec{b}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$。问：向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 是否为等价向量组？

解：

$\vec{b}_1=2\vec{a}_1+0\vec{a}_2+0\vec{a}_3$

$\vec{b}_2=0\vec{a}_1+2\vec{a}_2+0\vec{a}_3$

$\vec{b}_3=0\vec{a}_1+0\vec{a}_2+2\vec{a}_3$

说明向量组 $\boldsymbol{B}$ 可由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表出。

$\vec{a}_1=\frac{1}{2}\vec{b}_1+0\vec{b}_2+0\vec{b}_3$

$\vec{a}_2=0\vec{b}_1+\frac{1}{2}\vec{b}_2+0\vec{b}_3$

$\vec{a}_3=0\vec{b}_1+0\vec{b}_2+\frac{1}{2}\vec{b}_3$

说明向量组 $\boldsymbol{A}$ 可由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表出。

所以向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 是等价向量组。

关于等价向量组还有以下三点需要说明：

（1）向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 是等价向量组，可以推出向量组 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于向量组 $\boldsymbol{B}$ 的秩。

（2）一个向量组的任意两个最大无关组是等价向量组。

（3）一个向量组与它的任意一个最大无关组是等价向量组。

3.9 关于线性相/无关要记的几个结论

在前面的 3.3 节中，已经介绍了线性相关和线性无关的基本概念。本节要介绍的是根据线性相关和线性无关的定义直接推导出来的结论。

关于线性相关的结论：单个零向量是线性相关的；包含零向量的向量组是线性相关的；包含相等向量的向量组是线性相关的；包含成比例向量的向量组是线性相关的。

关于线性无关的结论：单个非零向量是线性无关的；两个不成比例的向量是线性无关的；单位向量组（单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 中的所有列向量所组成的向量组）是线性无关的。

例. $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}$，判断 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 的线性相关性。

解： 由于 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 不成比例，所以 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 线性无关。

例. $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\end{pmatrix}$，判断 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 的线性相关性。

解： 由于 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 成比例，$\vec{a}_2=2\vec{a}_1$，所以 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 线性相关。

例. $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}3\\7\\2\\8\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}$，判断 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 的线性相关性。

解：由于向量组$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$中包含零向量，所以$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$线性相关。

例. $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，判断$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$的线性相关性。

解：由于$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$是单位向量组，所以$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$线性无关。

例. $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，判断$\vec{a}_1,\vec{a}_2$的线性相关性。

解：由于$\vec{a}_1,\vec{a}_2$不成比例，所以$\vec{a}_1,\vec{a}_2$线性无关。

例. $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}7\\9\\2\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}-4\\-6\\-8\end{pmatrix}$，判断$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$的线性相关性。

解：由于向量组$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$中包含成比例的向量，$\vec{a}_3=-2\vec{a}_1$，所以$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$线性相关。

例. $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\5\\7\end{pmatrix}$，判断$\vec{a}$的线性相关性。

解：由于$\vec{a}$是单个非零向量，所以它是线性无关的。

3.10 方程组的求解

本节要介绍的内容是解方程组的方法。在 1.5 节中介绍的“克拉默法则”也是解方程组的方法。那么，本节给大家讲的解方程组的方法与“克拉默法则”有什么区别呢？

介绍“克拉默法则”（第 1.5 节）时曾提过：并不是所有的方程组都能用克拉默法则进行求解。

对于一个给定的方程组，按如下步骤判断该方程组是否可以用克拉默法则进行求解：

（1）关注所给方程组中每一个方程的形式。具体来说就是：当所给方程组中每一个方程的形式都是：**$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$（其中$a_1,a_2,\cdots,a_n,b$为任意常）时，进行第（2）步；否则，此方程组不可以用克拉默法则进行求解。**

（2）关注所给方程组包含的方程个数与未知数个数。具体来说就是：当所给方程组包含的方程个数等于未知数个数时，进行第（3）步；否则，此方程组不可以用克拉默法则进行求解。

（3）关注所给方程组对应的系数行列式D。具体来说就是：当系数行列式$D\neq 0$时，此方程组可以用克拉默法则进行求解；否则，此方程组不可以用克拉默法则进行求解。

同样，并不是所有的方程组都能用本节的方法进行求解。

对于一个给定的方程组，如果它满足以下条件：**方程组中每一个方程的形式都是：**

$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$（$a_1,a_2,\cdots,a_n,b$为常数），则此方程组可以用本节的方法进行求解。

注意：关于“本节的方法到底是什么”，还没开始介绍。上面只是把本节方法的**使用条件**与第 1 章所讲的克拉默法则的**使用条件**做了一下对比。

通过对比，可以很明显地发现：在验证一个方程组是否可以用克拉默法则求解时，需要按顺序验证三个条件；然而，在验证一个方程组是否可以用本节的方法求解时，只需验证一个条件（三个条件中的第一个）即可。这说明本节的方法和克拉默法则虽然都可以用来解方程组，但是本节的方法的适用范围要比克拉默法则广得多（限制条件越少，应用范围越广）。换句话说就是，能用克拉默法则求解的方程组，一定也能用本节的方法求解，但是，能用本节的方法求解的方程组，不一定能用克拉默法则求解。

例. 有方程组$\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8\\x_1-3x_2-6x_4=9\\2x_2-x_3+2x_4=-5\end{cases}$，此方程组可以用克拉默法则求解吗？此方程组可以用本节的方法求解吗？

解：此方程组中的每一个方程的形式都是$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$，由此可以断定此方程组能用本节的方法求解。那么它能不能用克拉默法则来求解呢？继续看。此方程组含 3 个方程，含 4 个未知数，方程个数不等于未知数个数，因此此方程组不能用克拉默法则求解。

例. 有方程组$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2^2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$，此方程组可以用克拉默法则求解吗？此方程组可以用本节的方法求解吗？

解：此方程组中的每一个方程的形式**并非都是**$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$（第二个方程中出现了$x_2^2$），由此可以断定此方程组既不能用克拉默法则求解，也不能用本节的方法求解。

例. 有方程组$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$，此方程组可以用克拉默法则求解吗？此方程组可以用本节的方法求解吗？

解：此方程组中的每一个方程的形式都是$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$，由此可以断定此方程组能用本节的方法求解。那么它能不能用克拉默法则来求解呢？继续看。此方程组含 4 个方程，含 4 个未知数，方程个数等于未知数个数。另外，此方程组所对应的系数行列式为：

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$$

所以此方程组也可以用克拉默法则求解。

克拉默法则是有局限性的，本节所要介绍的方法比克拉默法则的适用范围要广。

3.10.1　求齐次方程组的通解

首先介绍的是“求齐次方程组的通解”的步骤。

（1）写出所给方程组对应的矩阵并且求出矩阵的秩。

（2）判断解的类型。具体的判断方法如下：

- **若 $r=n$，则该齐次方程组有唯一零解，并且此题已经做完，不用再进行步骤（3）。**
- **若 $r<n$，则该齐次方程组有非唯一解（也就是非零解、无穷多解），并且需要进行步骤（3）。**

注意：其中 n 为方程组中所含的未知数的个数，r 为步骤（1）所求出的矩阵的秩。

（3）计算 $n-r$，设 $n-r=A$，则说明 n 个未知数中有 A 个可以自由取值，并且取 A 组（注意：取的这 A 组向量必须线性无关，即，取的这 A 组向量中不能含零向量，不能含相等的向量，不能含成比例的向量），则齐次方程组的通解为 A 组向量的任意线性组合。

因为上述语言比较抽象，看完这三个步骤，齐次方程组的求解方法依然不是很清晰，因此，通过下面的例题具体掌握解方程组的方法。

$\boxed{\text{考研题 3.1}}$ 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

的基础解系和通解。

解：先判断此方程组能不能用本节的方法去求解。

此方程组中的每一个方程的形式都是$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$，由此可以断定此方程组能用本节的方法求解（此方程组不能用克拉默法则求解，因为方程个数不等于未知数的个数）。

确定了此方程组能用本节的方法求解后，再继续看。此题的已知条件中明确地写了“齐次”两个字，即便不明确“齐次”两个字，也可以知道此方程组是一个齐次方程组，因为每个方程的等号右侧的数全是 0。

已经确定此方程组能用本节的方法求解，并且此方程组是齐次方程组，那么严格按照刚刚介绍的 3 个步骤来求解此方程组。

（1）写出所给方程组对应的矩阵并且求出矩阵的秩。

矩阵为：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$，

然后求秩，求秩的具体过程这里就不详细介绍了。此题化阶梯形需要 6 步。

因为：$2(4-1)=6$。

经过化阶梯形的六个步骤后，系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \text{转化成} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以秩为 3，即 r=3。

（2）判断解的类型。

未知数个数 n=5，秩 r=3。由于 $r<n$，所以此方程组有无穷多解，并且进行第 3 步。

（3）求解。

$n-r$=5−3=2，说明 5 个未知数中有 2 个未知数可以自由取值并且取两组，那么到底 5 个未知数中的哪 2 个未知数可以自由取值呢？（5 个未知数中有 2 个未知数可以自由取值，但并不是 5 个中任意找 2 个）

这时需要借助阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

将此矩阵还原为方程组，得：

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0 \\ x_2-x_3-x_4-\frac{1}{2}x_5=0 \\ x_4-\frac{1}{3}x_5=0 \end{cases}$$

通过此方程组来观察 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 这 5 个未知数中到底哪 2 个未知数可以自由取值。

可以是 x_4、x_5 吗？当然不可以，因为 $x_4-\frac{1}{3}x_5=0$。当 x_4、x_5 这 2 个未知数中的其中一个定了，另一个肯定也定了。比如，当 x_4 取 100 时，x_5 肯定是 300。也就是说，x_4、x_5 这 2 个未知数中只有一个可以自由取值，这 2 个未知数不能同时自由取值，所以自由取值的 2 个未知数不能是 x_4、x_5。

可以是 x_3、x_5 吗？验证一下，假设 x_3、x_5 已知，看看能不能解出 x_1、x_2、x_4。因为 x_5 已知，根据 $x_4-\frac{1}{3}x_5=0$，可以把 x_4 解出来。现在 x_3、x_4、x_5 都已知，根据 $x_2-x_3-x_4-\frac{1}{2}x_5=0$，可以解出 x_2。现在 x_2、x_3、x_4、x_5 都已知。根据 $x_1+x_2-3x_4-x_5=0$，可以解出 x_1。也就是说，已知 x_3 和 x_5，可以把 x_1、x_2、x_4 都解出来，所以自由取值的 2 个未知数可以是 x_3、x_5。

可以是 x_3、x_4 吗？验证一下，因为 x_4 已知，根据 $x_4-\frac{1}{3}x_5=0$，可以把 x_5 解出来。现在 x_3、x_4、x_5 都已知，根据 $x_2-x_3-x_4-\frac{1}{2}x_5=0$，可以解出 x_2。现在 x_2、x_3、x_4、x_5 都已知。根据 $x_1+x_2-3x_4-x_5=0$，可以解出 x_1。也就是说，已知 x_3 和 x_4，可以把 x_1、x_2、x_5 都解出来，所以自由取值的 2 个未知数可以是 x_3、x_4。

同理，可以自由取值的 2 个未知数也可以是 x_2 和 x_4（因为根据 x_4 可以解出 x_5，根据 x_2、x_4、x_5 可以解出 x_3 和 x_1）、x_2 和 x_5（因为根据 x_5 可以解出 x_4，根据 x_2、x_4、x_5 可以解出 x_3 和 x_1）。

综上所述，可以自由取值的 2 个未知数可以是 x_3、x_5 或 x_3、x_4 或 x_2、x_4 或 x_2、x_5。那么，解题时到底应取这 4 组中的哪组呢？任意一组即可。这里取 x_3、x_5。

回顾本节求通解步骤的介绍。步骤（3）中。先计算 $n-r$，$n-r=A$，计算这个“A”的目的有两个：一是说明 n 个未知数中有 A 个可以自由取值，二是说明需要取 A 组。

此题，$A=n-r$=2，说明需要取 2 组 x_3、x_5。那么可以取如下两组吗？

第一组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 100 \\ 1000 \end{pmatrix}$，第二组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -200 \\ -2000 \end{pmatrix}$

不可以，因为本节知识点的“步骤（3）”中提及，取的这 A 组向量必须是线性无关的。而以上述取法，第二组是第一组的−2 倍，所以不能这么取（包含零向量的向量组，包含相等的向量的向量组，包含成比例的向量的向量组都是线性相关的）。如下所述两种取法也均是错误的。

第一组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，第二组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

因为包含了零向量，所以不能这么取。

第一组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，第二组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

因为包含了相等的向量，所以不能这么取。

注意：这 A 向量虽然可以自由取值，但是必须是线性无关的。

这里，我们取如下两组向量。

第一组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，第二组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

针对第一组 x_3、x_5 计算 x_1、x_2、x_4。此时需要借助之前的方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 - \dfrac{1}{2}x_5 = 0 \\ x_4 - \dfrac{1}{3}x_5 = 0 \end{cases}$$

由于 x_3、x_5 分别为 1、0，解得 $x_1 = -1$、$x_2 = 1$、$x_4 = 0$。所以

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

再来针对第二组 x_3、x_5 计算 x_1、x_2、x_4。第二组 x_3、x_5 分别为 0、3，解得 $x_1 = \dfrac{7}{2}$，$x_2 = \dfrac{5}{2}$，$x_4 = 1$，所以 $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$。

所以原方程组的基础解系为 $\vec{a}_1, \vec{a}_2$

所以原方程组的通解为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2$，其中 c_1、c_2 为任意常数。

至此，这道题已经解完。通过例子已经介绍齐次线性方程组如何求解了，但对于这道题可能仍存在几点疑惑。如下所述将一一解答。

疑惑 1：既然有的人取 x_3、x_5，有的人取 x_3、x_4，并且就算两个人取的都是 x_3、x_5，取的数字也有可能不一样，这么说来，答案难道是多种多样的吗？

答：答案是唯一的，但是答案的形式的确是多种多样的，一亿个人可能有一亿种不同的答案形式。

疑惑 2：在“步骤 1”求秩时，除了用行变换外，可以用列变换吗？

答：不可以。在介绍矩阵的秩求法时就强调过，求矩阵的秩只能用行变换。

疑惑 3：最后的答案中含有可以任意取值的常数 c_1、c_1。这样说来，该方程组岂不是有无穷多组解了吗？

答：此题所给的这个方程组就是有无穷多组解。在步骤（2）中已经介绍过，当 $r<n$ 时，方程组有无穷多组解。

此时，对于疑惑 1 的解释和对于疑惑 3 的解释看似矛盾的。其实，在回答疑惑 1 时所说的“答案是唯一的”与刚刚说的“有无穷多组解”并不矛盾，通过如下例子即可说明。

比如“偶数”，既可以表示为“$\{x \mid x = 2n，n为任意整数\}$”，也可以表示为“除了奇数以外的整数”，还可以表示为“能被 2 整除的整数”。但是无论采用哪种表示方式，答案都是——“偶数”。这就是所谓的“答案是唯一的”。

而“偶数”包含了无穷多的数，比如-2、0、2、4 等，这就是所谓的“有无穷多组解”。

这道题也是一样，满足此方程组的 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 有无数组，不同的人表达这无数组的形式也是不同的，可能有人表示为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \\ i \\ j \end{pmatrix}$$

可能有人表示为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \\ n \\ o \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

但表示的无数组解是相同的。也就是说，在第一个人表示的无数组解中任意选一组解，这组解一定也在第二个人表示的无数组解中，反之亦然。

疑惑 4：基础解系是什么意思？

答：这道题一共有两问。第一问问的是基础解系，第二问问的是通解。那么到底什么是基础解系呢？

基础解系是针对齐次方程组来说的概念，在非齐次方程组中根本不存在基础解系的概念。

基础解系指的是，齐次方程组的解向量组中的一个最大无关组。基础解系这个概念又非常的重要。因此，接下来详细解释一下基础解系。

什么叫一个向量组的最大无关组？有一个向量组 $\boldsymbol{A}$，向量组 $\boldsymbol{A}$ 中包含了 n 个向量，现在从这 n 个向量中取出 r 个向量（$r \leqslant n$）组成向量组 $\boldsymbol{B}$，如果这 r 个向量线性无关，并且从剩下的 $n-r$ 个向量中任意拿出一个向量，加入到这 r 个向量中，所得到的 $r+1$ 个向量是线性相关的，则称这 r 个向量所组成的向量组 $\boldsymbol{B}$ 是向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个最大无关组。

基础解系就相当于向量组 $\boldsymbol{B}$，齐次方程组的解向量组（齐次方程组的解向量组包含无数个向量，这无数个向量中的每一个向量都是齐次方程组的解）相当于向量组 $\boldsymbol{A}$，刚才已经介绍过，向量组 $\boldsymbol{B}$ 是向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个最大无关组，所以基础解系是齐次方程组的解向量组的一个最大无关组。一个向量组的最大无关组很可能不是唯一的，所以一个齐次方程组的基础解系当然不是唯一的，但是无论是哪一个基础解系，基础解系中含有的向量个数都是 $n-r$ 个，所以在步骤（3）中取了 $n-r$ 组。

总结来说，基础解系是一个向量组，其中包含了 $n-r$ 个向量，它是“齐次方程组的所有解向量”所组成的向量组的最大无关组。

最后，要告诉大家的是：在齐次方程组的基础解系中的每一个向量前面乘以任意常数后相加，就是齐次方程组的通解。

通过上一道题，大家已经会用本节的方法来求解齐次线性方程组了。为了帮助大家巩固所学知识，下面又出了一道解齐次线性方程组的题，解题方法与上一道题完全一样，没有任何新的知识点。因此，下面这道题的解题过程将不再像上道题一样详细。

考研题 3.2 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系和通解。

解：与上道题一样，得先判断这个方程组到底能不能用本节的方法去求解。

此方程组中的每一个方程的形式都是 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$，由此可以断定此方程组能用本节的方法求解（此方程组不能用克拉默法则求解，因为方程个数不等于未知数的个数）。

确定了此方程组能用本节的方法求解后，再继续看。此题的已知条件中明确地写了“齐次”两个字，即使不明确地写“齐次”两个字，也可以知道此方程组是一个齐次方程组，因为每个方程的等号右侧的数全是 0。

已经确定此方程组能用本节的方法求解，并且此方程组是齐次方程组，那么就严格按照 3 个步骤来求解此方程组。

（1）写出所给方程组对应的矩阵并且求出矩阵的秩。

$$\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&-3&-6&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以秩为 2，即 r=2。

（2）判断解的类型。

未知数个数 n=4，秩 r=2。由于 $r<n$，所以此方程组有无穷多解，并且进行第 3 步。

（3）求解。

$n-r$=4−2=2，说明 4 个未知数中有 2 个未知数可以自由取值并且取 2 组。

根据：

$$\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得：

$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4=0\\x_2+2x_3+\frac{4}{3}x_4=0\end{cases}$$

选取自由取值的未知数为 x_2 、 x_3 。

第一组：$\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，第二组：$\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$。

根据第一组，解得 $x_1=-\frac{5}{4}$ 、 $x_4=-\frac{3}{4}$，所以 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}\\1\\0\\-\frac{3}{4}\end{pmatrix}$。

根据第二组，解得 $x_1=-\frac{1}{2}$ 、 $x_4=-\frac{3}{2}$，所以 $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$。

所以原方程组的基础解系为：

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}\\1\\0\\-\frac{3}{4}\end{pmatrix}，\vec{a}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}。$$

所以原方程组的通解为：

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2$，其中 c_1 、 c_2 为任意常数。

3.10.2　求非齐次方程组的通解

“求非齐次方程组的通解”的步骤如下所述。

（1）写出所给方程组对应的矩阵并求两个秩 r_1 、 r_2 。

（2）判断解的类型。具体的判断方法如下：

① 若 $r_1\neq r_2$，则该非齐次方程组无解。

② 若$r_1=r_2$且$r_1=r_2=n$（未知数个数），则该非齐次方程组有唯一的解，不用再进行步骤（3）了。

③ 若$r_1=r_2$且$r_1=r_2<n$（未知数个数），则该非齐次方程组有无穷多解，并且需要进行步骤（3）。

（3）先把原方程组看成对应的齐次方程组，按齐次方程组的步骤（3）求出齐次方程组的通解。然后再还原成非齐次方程组，令自由未知数取全零，求出非齐次方程组的一个特解。最后，用齐次方程组的通解加上非齐次方程组的特解，得到的就是非齐次方程组的通解。

看完这三个步骤后，大家是否依然感到困惑？在下面的题中会具体地介绍。

$\boxed{\text{考研题 3.3}}$ 求线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2 \end{cases}$$

的通解。

解：先判断此方程组能不能用本节的方法去求解。

此方程组中的每一个方程的形式都是$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$，由此可以断定此方程组能用本节的方法求解（此方程组不能用克拉默法则求解，因为方程个数不等于未知数的个数）。

确定了此方程组能用本节的方法求解后，再继续看。虽然此题的已知条件中并没有明确写“非齐次”三个字，但是也可以知道此方程组是一个非齐次方程组，因为每个方程的等号右侧的数并非全是 0。

既然已经确定了此方程组能用本节的方法求解，并且此方程组是非齐次方程组，那么就严格按照刚刚介绍的求解非齐次方程组的 3 个步骤来求解。

（1）写出所给方程组对应的矩阵并求两个秩r_1、r_2。

$$A=\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1 \\ 3&2&1&1&-3&0 \\ 0&1&2&2&6&3 \\ 5&4&3&3&-1&2 \end{pmatrix}$$

之前给大家介绍的齐次方程组的求解步骤中的第一步也是将所给齐次方程组化为矩阵的形式，但是齐次方程组中每个方程右侧的 0 是不写在矩阵中的。非齐次方程组则不然，非齐次方程组中每个方程右侧的数也要写在矩阵中。上述矩阵的最后一列“1，0，3，2”就是这么来的。

那么什么叫“求两个秩”呢？大家很快就会明白，现在先不管这个，首先按照求矩阵的秩的方法求矩阵A的秩。

矩阵A有四行六列，2(4−1)=6，说明求秩化阶梯形一共需要 6 步。

化阶梯形的步骤①：将a_{11}化为 1，矩阵A的a_{11}处本来就是 1，所以步骤①就不用做了。

化阶梯形的步骤②：将a_{11}正下方的 3，0，5 化为 0，0，0。方法是第一行乘以−3 加到第二行；第一行乘以−5 加到第四行。

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1 \\ 3&2&1&1&-3&0 \\ 0&1&2&2&6&3 \\ 5&4&3&3&-1&2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1 \\ 0&-1&-2&-2&-6&-3 \\ 0&1&2&2&6&3 \\ 0&-1&-2&-2&-6&-3 \end{pmatrix}$$

化阶梯形的步骤③：将a_{22}化为 1。方法是第二行乘以−1。

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1 \\ 0&-1&-2&-2&-6&-3 \\ 0&1&2&2&6&3 \\ 0&-1&-2&-2&-6&-3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&2&2&6&3 \\ 0&1&2&2&6&3 \\ 0&-1&-2&-2&-6&-3 \end{pmatrix}$$

化阶梯形的步骤④，将a_{22}正下方的 1，−1 化为 0，0。方法是第二行乘以−1 加到第三行；第二行乘以 1 加到第四行。

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&2&2&6&3 \\ 0&1&2&2&6&3 \\ 0&-1&-2&-2&-6&-3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&2&2&6&3 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

现在我们来看化阶梯形的步骤⑤。同学们，你们是否感到奇怪？矩阵的秩的求法很早以前就介绍过，在$\boxed{\text{考研题 3.1}}$与$\boxed{\text{考研题 3.2}}$中，没有如此详细地写出化阶梯形的步骤，那为什么这道题要如此详细地写出化阶梯形的步骤呢？原因是：这道题理论上来说化阶梯形需要 6 个步骤，但实际上只用 4 个步骤就行了。简言之，此题比较特殊，因此才

这么详细地介绍。

为什么步骤⑤和步骤⑥不用了？此矩阵化阶梯形的步骤⑤应该是把 a_{33} 化为 1，可现在 a_{33} 是 0，在第 2 章矩阵的秩的求法中介绍过这种特殊情况的处理办法，即：**看 a_{ii} 的正下方的数，观察其正下方的数中有没有非 0 的数。如果有，那么立刻将该数所在行与第 i 行互换，这样一来，a_{ii} 就不是 0 而是一个非 0 的数，然后就可以正常做了（即利用初等行变换中的“以 $k(k\neq 0)$ 乘某行”将 a_{ii} 化为 1）；如果没有，则此时根本不用去管 a_{ii} 了，而是把 $a_{i(i+1)}$ 当成 a_{ii} 即可（也就是说，本来要做的是将 a_{ii} 化为 1，现在变为将 a_{ii} 右侧的那个数 $a_{i(i+1)}$ 化为 1）。**

回到此题上来。看 a_{33} 正下方的数，a_{33} 正下方的数只有一个，就是 a_{43}，而 a_{43} 也为 0。换言之，a_{33} 正下方的数中没有非 0 的数。那就改变目标，新目标是把 a_{33} 右侧的 a_{34} 化为 1。a_{34} 为 0，且 a_{34} 正下方的数 a_{44} 也为 0。那就第二次改变目标，新目标是把 a_{34} 右侧的 a_{35} 化为 1。a_{35} 为 0，且 a_{35} 正下方的数 a_{45} 也为 0。

于是只好第三次改变目标。新目标是将 a_{35} 右侧的数 a_{36} 化为 1。而 a_{36} 为 0，其正下方的数 a_{46} 也为 0，且 a_{36} 的右侧已经没有数了。这说明此矩阵化阶梯形的步骤⑤根本没法进行。步骤⑤不能进行，步骤⑥当然更不用管了。

因此，矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ 不需要再继续化了，它已经是阶梯形矩阵了。

那么求两个秩是什么意思呢？刚才让大家不用管，现在该管了，在以上矩阵的最后一列之前画一条竖线，即

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

然后我们把竖线左侧的矩阵记为矩阵 $\boldsymbol{B}$，不以竖线划分的矩阵记为矩阵 $\boldsymbol{C}$，即

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

r_1 指的就是矩阵 B 的秩、r_2 指的就是矩阵 C 的秩，这就是所谓的“求两个秩”。此题 $r_1=2$、$r_2=2$。

（2）判断解的类型。

由于 $r_1=r_2$ 且 $r_1=r_2<n$（2<5），所以该非齐次方程组有无穷多解。

（3）求解。

先把原方程组看成对应的齐次方程组，即将矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的最后一列变为全零，即

$$\boldsymbol{C}'=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&0\\0&1&2&2&6&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$（注意：最后一列变为全零）

转化为方程组得：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0\end{cases}$$

由于 $n-r$=5−2=3，说明 5 个未知数中有 3 个未知数可以自由取值且取 3 组。选可自由取值的未知数为 x_3、x_4、x_5。

第一组：$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，第二组：$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，第三组：$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

求得对应齐次方程组的基础解系为：

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{a}_3=\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}。$$

所以该非齐次方程组对应的齐次方程组的通解为：

$c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2+c_3\vec{a}_3$，其中 c_1、c_2、c_3 为任意常数。

但这并不是此题的答案，此题求的是**非齐次方程组的通解**。刚刚求的是**该非齐次方程组所对应的齐次方程组的通解**，还需要加上一个非齐次方程组的特解。

下面开始求非齐次方程组的特解：

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$注意：最后一列恢复了，不是全零了。

转化为方程组得：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\end{cases}$$

取 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$。注意，求非齐次方程组特解的时候，令自由取值的未知数取**全零**。

根据方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\end{cases}$

解得：$x_1=-2$，$x_2=3$。

所以 $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ 为非齐次方程组的一个特解。

“非齐次方程组的通解=对应齐次方程组的通解+非齐次方程组的特解”。此题中，对应齐次方程组的通解为：$c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2+c_3\vec{a}_3$，非齐次方程组的特解为 $\vec{b}$，所以，此题的答案为：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2+c_3\vec{a}_3+\vec{b}$$，其中 c_1、c_2、c_3 为任意常数。

此题已经介绍完了，建议大家看完这题的解答过程以后，再翻回到前面看看本节的知识点（求解非齐次方程组的三个步骤）以加深印象。

3.11 五个重要的定理

刚刚介绍的 3.10 节中没有涉及线性无关、线性相关、线性表出的知识，大家是不是已经把线性相关、线性无关、线性表出这些重要的基本概念忘了？大家可以重新复习一下，因为本节又要涉及线性相关、线性无关和线性表出。

从标题就可以很明显地看出，本节要介绍的是五个重要的定理。

3.11.1 定理 1

① 向量组 $\vec{\boldsymbol{a}}_1,\vec{\boldsymbol{a}}_2,\cdots,\vec{\boldsymbol{a}}_n$（$\boldsymbol{n}\geqslant 2$）线性相关的充分必要条件是：其中至少有一个向量可以由其余 $\boldsymbol{n-1}$ 个向量线性表出。

② 向量组 $\vec{\boldsymbol{a}}_1,\vec{\boldsymbol{a}}_2,\cdots,\vec{\boldsymbol{a}}_n$（$\boldsymbol{n}\geqslant 2$）线性无关的充分必要条件是：其中任意一个向量都不能由其余 $\boldsymbol{n-1}$ 个向量线性表出。

此定理揭示了线性相/无关与线性表出的关系。

例. 向量 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，这四个向量是线性相关的还是线性无关的？

解： $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{a}_2+2\vec{a}_3+3\vec{a}_4$

即$\vec{a}_1$可以由$\vec{a}_2$，$\vec{a}_3$，$\vec{a}_4$线性表出。也就是说，这 4 个向量中至少有 1 个向量可以由其余 3 个向量线性表出。根据定理 1，这 4 个向量是线性相关的。

3.11.2　定理 2

***m* 个 *n* 维向量，若 *m*>*n*，则这 *m* 个向量线性相关。**

例. 有 4 个向量$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}9\\7\\2\end{pmatrix}$，$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$，这 4 个向量是线性相关的还是线性无关的？

解： 4 个 3 维向量。4>3，根据定理 2 可知这 4 个向量是线性相关的。

3.11.3　定理 3

① *n* 个同维向量，组成一个向量组。“该向量组的秩（在 3.6 节中介绍了，将向量组的秩转化为矩阵的秩来求）为 *r*”的充分必要条件是 “从这 *n* 个向量中取出 *r* 个向量，可能有多种取法，在这多种取法中至少存在一种取法，按该取法取出的 *r* 个向量是线性无关的，并且从这 *n* 个向量中任意取出 *p*（*p*>*r*）个向量时，这 *p* 个向量一定是线性相关的。”

例. $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix}$，$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}j\\k\\o\end{pmatrix}$，$\vec{a}_5=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$，若矩阵$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5\right)$的秩为 3，可以得出什么结论？

解： 根据 3.6 节（向量组的秩等于矩阵的秩），可得向量组：$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5$的秩为 3。根据刚刚介绍的定理 3 的①可得：

$$\left.\begin{array}{l}
\text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4\\
\text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_5\\
\text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4,\vec{a}_5\\
\text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5\\
\text{向量组}\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5\\
\text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5
\end{array}\right\}\text{这6个向量组中的每个向量组都是线性相关的。}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\\
\text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4\\
\text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_5\\
\text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_3,\vec{a}_4\\
\text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_3,\vec{a}_5\\
\text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_4,\vec{a}_5\\
\text{向量组}\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4\\
\text{向量组}\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_5\\
\text{向量组}\vec{a}_2,\vec{a}_4,\vec{a}_5\\
\text{向量组}\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5
\end{array}\right\}\text{在这10个向量组中至少存在1个向量组是线性无关的。}$$

刚才是将矩阵$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5\right)$看成是列向量写在一起。其实完全可以换个角度看待此矩阵，也可以将矩阵$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5\right)$看成是行向量写在一起。再说得详细一些，把$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5\right)$展开来写，即

$$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5\right)=\begin{pmatrix} a & d & g & j & p \\ b & e & h & k & q \\ c & f & i & o & r \end{pmatrix}$$

此矩阵如果以列来看，是 5 个列向量写在一起。此题的已知条件中已经给出，矩阵$\begin{pmatrix} a & d & g & j & p \\ b & e & h & k & q \\ c & f & i & o & r \end{pmatrix}$的秩为 3。那么根据刚刚介绍的定理 3 的①可以知道，从 5 个列向量中任意取出 3 个，共有 10 种取法。在这 10 种取法中至少有 1 种取法，按该取法取出的 3 个列向量是线性无关的。而从这 5 个列向量中任意取出 4 个向量（共有 5 种取法），任意取出 5 个向量（只有一种取法）肯定都是线性相关的。以上画横线的话在之前刚介绍过。现在要介绍的是，矩阵“$\begin{pmatrix} a & d & g & j & p \\ b & e & h & k & q \\ c & f & i & o & r \end{pmatrix}$的秩为 3”这件事是肯定的，定理 3 的①也是确定的，可是没规定过必须把此矩阵以列划分，也就是说，还可以把此矩阵以行划分。此矩阵如果以行划分的话，可以被划分为 3 个行向量$\vec{\beta}_1=\left(a,d,g,j,p\right)$，$\vec{\beta}_2=\left(b,e,h,k,q\right)$，$\vec{\beta}_3=\left(c,f,i,o,r\right)$。同样是因为该矩阵的秩为 3，根据 3.6 节（矩阵的秩等于向量组的秩），可以得到这 3 个行向量组成的向量组的秩为 3（之前得到的是 5 个列向量组成的向量组的秩为 3）。根据定理 3 的①，向量组$\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$，$\vec{\beta}_3$是线性无关的（因为从 3 个行向量中取 3 个行向量只有 1 种取法，所以对于只有 1 种取法来说，定理 3 的①中的“至少存在 1 种取法，按该取法取出的 r 个向量是线性无关的”就是特指这 1 种取法）。

讲这道例题，是为了让大家能够明白这样一件事：**矩阵既可以看成是列向量写在一起也可以看成是行向量写在一起，而矩阵的秩是确定的。那么，根据矩阵的秩等于向量组的秩，可以知道矩阵的秩等于行向量组的秩，等于列向量组的秩。**

比如一个四行五列的矩阵（此矩阵既可以看成是由 5 个列向量组成的，也可以看成是由 4 个行向量组成的）的秩为 4，则可以说明：由 4 个行向量所组成的向量组的秩为 4，由 5 个列向量所组成的向量组的秩为 4。然后，根据定理 3 的①，可以得到：这 4 个行向量是线性无关的，这 5 个列向量是线性相关的；从 5 个列向量中取 4 个列向量，至少存在 1 种取法，按此取法取出的 4 个列向量是线性无关的。

另外，定理 3 的①是充分必要条件。比如有 8 个向量，若已知从这 8 个向量中任意抽出 $A(A\geqslant5)$个向量都是线性相关的，则可以知道这 8 个向量所组成的向量组的秩小于 5。

考研题 3.4 设向量组$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\4\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\5\\8\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\\6\end{pmatrix}$，$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}1\\3\\x\\2\end{pmatrix}$线性相关，则参数 x=______。

解：此题给出了 4 个列向量，且它们线性相关。根据定理 3 的①，这 4 个列向量所组成的向量组的秩小于 4，而向量组的秩等于矩阵的秩，所以令矩阵$\boldsymbol{A}=(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4)$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于 4。

下面把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&0&-1&3\\-3&5&3&x\\4&8&6&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&-2&1&1\\0&8&0&x+3\\0&4&10&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&8&0&x+3\\0&4&10&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&4&x+7\\0&0&12&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{x+7}{4}\\0&0&12&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{x+7}{4}\\0&0&0&3(x+7)\end{pmatrix}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于 4。而只有当 $x=-7$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的秩才小于 4，所以 $x=-7$。

接下来介绍定理 3 的②。

② 有 m 个方程 n 个未知数组成了一个齐次方程组，如下：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

然后设向量组 A 中包含 n 个向量：

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

则有如下结论成立：

向量组 A 的秩等于 $n \Leftrightarrow$ 齐次方程组有唯一零解。

向量组 A 的秩小于 $n \Leftrightarrow$ 齐次方程组有非唯一解（非零解）（无穷多解）。

定理 3 的②介绍完了。大家仔细观察，这其实就是 3.10 节中所讲解的解齐次方程组 3 个步骤中的第 2 步（判断解的类型），现在是以定理的形式表达出来。

到目前为止，定理 3 的①与②都介绍完了。**它们的共同点在于都与向量组的秩有关，区别在于定理 3 的①说的是向量组的秩与线性相/无关之间的关系，而定理 3 的②说的是向量组的秩与齐次方程组解的类型之间的关系。**

例. 已知齐次方程组

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_4 + a_4x_5 = 0 \\ a_5x_1 + a_6x_2 + a_7x_3 + a_8x_4 = 0 \\ a_9x_1 + a_{10}x_2 + a_{11}x_3 + a_{12}x_4 + a_{13}x_5 = 0 \\ a_{14}x_1 + a_{15}x_2 + a_{16}x_3 + a_{17}x_4 + a_{18}x_5 = 0 \end{cases}$$

[其中 $a_i (1 \leqslant i \leqslant 18)$ 为特定的常数]

有无穷多组解，问 $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_5 \\ a_9 \\ a_{14} \end{pmatrix}$，$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_6 \\ a_{10} \\ a_{15} \end{pmatrix}$，$\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_7 \\ a_{11} \\ a_{16} \end{pmatrix}$，$\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_8 \\ a_{12} \\ a_{17} \end{pmatrix}$，$\vec{b}_5 = \begin{pmatrix} a_4 \\ 0 \\ a_{13} \\ a_{18} \end{pmatrix}$这 5 个向量所组成的向量组的秩是多少？这 5 个向量是线性相关的还是线性无关的？

解：根据刚刚介绍完的定理 3 的②，可以得出这样一个结论：这 5 个向量所组成的向量组的秩小于未知数的个数，而此题未知数的个数为 5，所以这 5 个向量所组成的向量组的秩小于 5（具体是多少并不知道）。

然后，再根据定理 3 的①，可以知道这 5 个向量是线性相关的。

定理 3 还有两个推论，虽是推论，却非常重要，下面介绍这两个推论。

定理 3 的第一个推论：有 n 个向量，它们是线性相关的。在这 n 个向量的基础上，再增加任意 m 个向量，则这 n+m 个向量依然是线性相关的（口诀：少相则多相）；有 n 个向量，它们是线性无关的。从这 n 个向量中任意去掉 m 个向量，则剩下的 n−m 个向量依然是线性无关的（口诀：多无则少无）。

例. $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$，$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$，$\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$，这 3 个向量是线性相关的。$\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} j \\ k \\ l \end{pmatrix}$，$\vec{a}_5 = \begin{pmatrix} m \\ n \\ o \end{pmatrix}$，问：$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$、$\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$这 5 个向量是线性相关的还是线性无关的？

解： 因为$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$线性相关，根据“少相则多相”，可知$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$、$\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$是线性相关的。

例. $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$，$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$，$\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$，这 3 个向量是线性无关的。问：$\vec{a}_1$、$\vec{a}_3$这两个向量是线性相关的还是线性无关的？

解： 因为$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$线性无关，根据“多无则少无”，可知$\vec{a}_1$、$\vec{a}_3$这两个向量是线性无关的。

刚刚给大家介绍了定理 3 的第一个推论，可以简记为口诀“少相则多相，多无则少无”。而接下来要介绍的定理 3 的第二个推论，也是有口诀的。口诀是“少无则多无，多相则少相”。看到这里，大家可能感觉很奇怪，刚才第一个推论的口诀是“少相则多相，多无则少无”，而现在第二个推论的口诀竟然是“少无则多无，多相则少相”。这看似自相矛盾，如下将进一步介绍。

定理 3 的第二个推论：有 n 个 p 维向量，它们是线性无关的。则，把每个向量都增加 q 维（必须是在相同的位置增加）后，所得到的 n 个$(p+q)$维向量仍然是线性无关的（口诀：少无则多无）；有 n 个 p 维向量，它们是线性相关的。则，把每个向量都减少 q 维（必须是在相同的位置减少）后，所得到的 n 个$(p-q)$维向量仍然是线性相关的（口诀：多相则少相）。

定理 3 的第二个推论的口诀中的“多”和“少”与第一个推论的口诀中的“多”和“少”不是一个意思。**第一个推论的口诀中的“多”和“少”指的是向量个数的增减，而第二个推论的口诀中的“多”和“少”指的是向量个数不变，向量维数的增减。**

例. 已知 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix}$这 3 个向量是线性无关的。$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\r\end{pmatrix}$，$\vec{a}_5=\begin{pmatrix}d\\e\\f\\s\end{pmatrix}$，$\vec{a}_6=\begin{pmatrix}g\\h\\i\\t\end{pmatrix}$，问$\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$、$\vec{a}_6$这 3 个向量是线性相关的还是线性无关的？

解： 因为$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$这 3 个向量是线性无关的，而$\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$、$\vec{a}_6$是$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$增维（在相同的位置增的，都是在末尾，并且增的是一维）后所得到的向量组。根据定理 3 的第二个推论（少无则多无），不管 r、s、t 这 3 个数是什么，$\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$、$\vec{a}_6$都是线性无关的。

例. 已知 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix}$这 3 个向量是线性无关的。$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\h\\x\end{pmatrix}$，$\vec{a}_5=\begin{pmatrix}d\\e\\f\\s\\y\end{pmatrix}$，$\vec{a}_6=\begin{pmatrix}g\\h\\i\\t\\z\end{pmatrix}$，问$\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$、$\vec{a}_6$这 3 个向量是线性相关的还是线性无关的？

解： $\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$、$\vec{a}_6$是线性无关的，利用的还是定理 3 的第二个推论。通过这道题，想告诉大家的是：并不是只有增减一维才能用定理 3 的第二个推论。增加了两维，照样能用定理 3 的第二个推论（但必须是在每个向量的相同位置增减）。

例. 已知 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix}$这 3 个向量是线性无关的。$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}a\\x\\b\\c\\r\end{pmatrix}$，$\vec{a}_5=\begin{pmatrix}d\\y\\e\\f\\s\end{pmatrix}$，$\vec{a}_6=\begin{pmatrix}g\\z\\h\\i\\t\end{pmatrix}$，问$\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$、$\vec{a}_6$这 3 个向量是线性相关的还是线性无关的？

解： $\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$、$\vec{a}_6$是线性无关的，利用的还是定理 3 的第二个推论。通过这道题，想告诉大家的是：并不是只有在向量的末尾进行增减才能用定理 3 的第二个推论。比如这道题，增加了两维，其中的一维根本没有增加在向量的末尾，照样能用定理 3 的第二个推论（只要在每个向量的相同位置增减即可）。

例. 已知 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix}$这 3 个向量是线性相关的。$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，$\vec{a}_5=\begin{pmatrix}d\\e\end{pmatrix}$，$\vec{a}_6=\begin{pmatrix}g\\h\end{pmatrix}$，问$\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$、$\vec{a}_6$这 3 个向量是线性相关的还是线性无关的？

解： 因为$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$是线性相关的（题目的已知条件），而$\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$、$\vec{a}_6$是$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$减维后（维数由 3 变为 2）所得到的向量组。根据定理 3 的第二个推论（多相则少相），$\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$、$\vec{a}_6$是线性相关的。

3.11.4 定理 4

有 n 个线性无关的向量，现在在这 n 个向量基础上，增加一个向量。如果增加之后形成的 $n+1$ 个向量是线性相关的，则有这样一个结论：增加的那个向量一定可以由原来的 n 个向量线性表出，且表出法唯一。

例. $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$线性无关，$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$、$\vec{a}_4$线性相关，则$\vec{a}_4$一定可以由$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$线性表出，即有：$\vec{a}_4=c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2+c_3\vec{a}_3$，其中 c_1、c_2、c_3 的取值是唯一的。

3.11.5 定理 5

有两个向量组，向量组 $\boldsymbol{A}$ 和向量组 $\boldsymbol{B}$，向量组 $\boldsymbol{A}$ 中包含了 $\boldsymbol{s}$ 个向量，向量组 $\boldsymbol{B}$ 中包含了 $\boldsymbol{t}$ 个向量。

① 若向量组 $\boldsymbol{B}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表出，且 $\boldsymbol{t}>\boldsymbol{s}$，则：向量组 $\boldsymbol{B}$ 中包含的 $\boldsymbol{t}$ 个向量线性相关。

② 若向量组 $\boldsymbol{B}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表出，且向量组 $\boldsymbol{B}$ 中包含的 $\boldsymbol{t}$ 个向量线性无关，则：$\boldsymbol{t}\leqslant\boldsymbol{s}$。

3.11.6 真题分析

我们来看一下 3.11 节所对应的几道考研题。

考研题 3.5 下列向量组中 a、b、c、d、e、f 均是常数，则线性无关的向量组是：

（A）$\vec{a}_1=(1,-1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_2=(0,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_3=(0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$；

（B）$\vec{a}_1=(a,b,c)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_2=(b,c,d)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_3=(c,d,a)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_4=(d,a,b)^{\mathrm{T}}$；

（C）$\vec{a}_1=(a,1,b,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_2=(c,0,d,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_3=(e,0,f,0,1)^{\mathrm{T}}$；

（D）$\vec{a}_1=(1,2,1,5)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_2=(1,2,3,6)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_3=(1,2,5,7)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$；

解：

（A）选项：在 3.9 节中介绍过，包含零向量的向量组是线性相关的。（A）选项中的向量组包含零向量，所以（A）选项中的向量组是线性相关的，而此题让选的是线性无关的向量组，所以（A）选项不能选。

（B）选项：此向量组中包含了 4 个三维向量。根据 3.11 节的定理 2，直接可以判断出（B）选项中的向量组是线性相关的。所以（B）选项不能选。

（C）选项：首先根据 3.9 节可知，单位向量组：$(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性无关的，然后再根据 3.11 节定理 3 的第二个推论（少无则多无）可知，$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$ 是线性无关的。所以（C）选项为本题的正确选项。

（D）选项：将 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$、$\vec{a}_4$ 四个向量组成矩阵 $\boldsymbol{A}$，即：

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\2&2&2&0\\1&3&5&0\\5&6&7&1\end{pmatrix}$，计算一下 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$。

$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\2&2&2&0\\1&3&5&0\\5&6&7&1\end{vmatrix}$=0（计算过程省略）

根据第 2 章中的大总结，行列式为零可以推出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不满秩。由于 $\boldsymbol{A}$ 是四行四列的矩阵，所以满秩指的是该矩阵的秩等于 4，那么不满秩指的就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于 4。

根据 3.6 节（矩阵的秩等于向量组的秩），可以知道向量组 $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\5\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\6\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1\\2\\5\\7\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ 的秩小于 4（当然，以行向量来看，向量组 $(1\quad 1\quad 1\quad 0)$、$(2\quad 2\quad 2\quad 0)$、$(1\quad 3\quad 5\quad 0)$、$(5\quad 6\quad 7\quad 0)$ 的秩也小于 4,），然后，根据 3.11 节的定理 3 的①，可以知道向量组 $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\5\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\6\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1\\2\\5\\7\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ 是线性相关的。所以（D）选项不能选。

注意：这道题之所以能用行列式来做，是因为这是 4 个四维向量，向量个数等于向量维数，组成的矩阵正好是方阵，即行数等于列数，方阵是有对应的行列式的，一旦此题改为 3 个四维列向量，问线性相关性，那就不能用行列式了。

本题答案：（C）

考研题 3.6

已知四维列向量 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$、$\vec{a}_4$ 线性无关，则下列向量组中线性无关的是：

（A）$\vec{a}_1-\vec{a}_2$，$\vec{a}_2-\vec{a}_3$，$\vec{a}_3-\vec{a}_4$，$\vec{a}_4-\vec{a}_1$；

（B）$\vec{a}_1+\vec{a}_2$，$\vec{a}_2+\vec{a}_3$，$\vec{a}_3+\vec{a}_4$，$\vec{a}_4+\vec{a}_1$；

（C）$\vec{a}_1+\vec{a}_2$，$\vec{a}_2+\vec{a}_3$，$\vec{a}_3-\vec{a}_4$，$\vec{a}_4-\vec{a}_1$；

（D）$\vec{a}_1+\vec{a}_2$，$\vec{a}_2+\vec{a}_3$，$\vec{a}_3+\vec{a}_4$，$\vec{a}_4-\vec{a}_1$。

解：我们用 3.3 节，也就是线性相/无的最基本的定义来解这道题。

（A）选项：$c_1\left(\vec{a}_1-\vec{a}_2\right)+c_2\left(\vec{a}_2-\vec{a}_3\right)+c_3\left(\vec{a}_3-\vec{a}_4\right)+c_4\left(\vec{a}_4-\vec{a}_1\right)=\vec{0}$。当$c_1=1$、$c_2=1$、$c_3=1$、$c_4=1$时，上式成立。也就是说，$c_1$、$c_2$、$c_3$、$c_4$**不全为 0** 时，上式能成立。根据 3.3 节可知，（A）选项中的 4 个向量是线性相关的。

（B）选项：$c_1\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)+c_2\left(\vec{a}_2+\vec{a}_3\right)+c_3\left(\vec{a}_3+\vec{a}_4\right)+c_4\left(\vec{a}_4+\vec{a}_1\right)=\vec{0}$。当$c_1=1$、$c_2=-1$、$c_3=1$、$c_4=-1$时，上式成立。也就是说，$c_1$、$c_2$、$c_3$、$c_4$**不全为 0** 时，上式能成立。根据 3.3 节可知，（B）选项中的 4 个向量是线性相关的。

（C）选项：$c_1\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)+c_2\left(\vec{a}_2+\vec{a}_3\right)+c_3\left(\vec{a}_3-\vec{a}_4\right)+c_4\left(\vec{a}_4-\vec{a}_1\right)=\vec{0}$。当$c_1=1$、$c_2=-1$、$c_3=1$、$c_4=1$时，上式成立。也就是说，$c_1$、$c_2$、$c_3$、$c_4$**不全为 0** 时，上式能成立。根据 3.3 节可知，（C）选项中的 4 个向量是线性相关的。

（D）选项：由于（A）、（B）、（C）3 个选项都不能选，所以（D）选项肯定为答案，但是还是来解释一下为什么选（D）。要解释（D）选项，就不能按（A）、（B）、（C）3 个选项那样解释了。因为（A）、（B）、（C）3 个选项相当于是找反例，（D）选项是正确的，当然没有反例，所以，这里换一种思路来解释（D）选项为什么是正确的。

此选项这里用第 1 章 1.14 节所讲的方法做，有：

$$(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\ \vec{a}_2+\vec{a}_3,\ \vec{a}_3+\vec{a}_4,\ \vec{a}_4-\vec{a}_1)=\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

等式两边同时取行列式，得：

$$\left|\vec{a}_1+\vec{a}_2,\ \vec{a}_2+\vec{a}_3,\ \vec{a}_3+\vec{a}_4,\ \vec{a}_4-\vec{a}_1\right|=\left|\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}$$

由于$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$、$\vec{a}_4$线性无关（已知条件），根据 3.11 节的定理 3 的①可以知道，向量组：$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$、$\vec{a}_4$的秩为 4。

根据 3.6 节（向量组的秩等于矩阵的秩）可以知道，矩阵$\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4\end{pmatrix}$的秩为 4。而矩阵$\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4\end{pmatrix}$是四阶方阵，所以矩阵$\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4\end{pmatrix}$满秩。

根据第 2 章 2.4 节的大总结，$\begin{vmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4\end{vmatrix}\neq 0$。

通过计算可以知道，$\begin{vmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$。

因为$\begin{vmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4\end{vmatrix}\neq 0$，$\begin{vmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}\neq 0$，而$\left|\vec{a}_1+\vec{a}_2,\ \vec{a}_2+\vec{a}_3,\ \vec{a}_3+\vec{a}_4,\ \vec{a}_4-\vec{a}_1\right|$为两者相乘，两个不为零的数相乘一定不为零，所以有：$\left|\vec{a}_1+\vec{a}_2,\ \vec{a}_2+\vec{a}_3,\ \vec{a}_3+\vec{a}_4,\ \vec{a}_4-\vec{a}_1\right|\neq 0$。

根据第 2 章的 2.4 节的大总结可以知道，矩阵（$\vec{a}_1+\vec{a}_2$，$\vec{a}_2+\vec{a}_3$，$\vec{a}_3+\vec{a}_4$，$\vec{a}_4-\vec{a}_1$）满秩，即矩阵（$\vec{a}_1+\vec{a}_2$，$\vec{a}_2+\vec{a}_3$，$\vec{a}_3+\vec{a}_4$，$\vec{a}_4-\vec{a}_1$）的秩为 4。

根据 3.6 节（向量组的秩等于矩阵的秩）可得，向量组：$\vec{a}_1+\vec{a}_2$，$\vec{a}_2+\vec{a}_3$，$\vec{a}_3+\vec{a}_4$，$\vec{a}_4-\vec{a}_1$ 的秩为 4。

根据 3.11 节的定理 3 的①可得，向量组：$\vec{a}_1+\vec{a}_2$，$\vec{a}_2+\vec{a}_3$，$\vec{a}_3+\vec{a}_4$，$\vec{a}_4-\vec{a}_1$ 是线性无关的。所以此题的答案为（D）选项。

关于（D）选项的解释用到了很多知识。但是，千万不要觉得这题难。只要把每章的“房间”都默写下来，那么看完此书后，做这种题肯定会非常快。

3.12　线性表出的本质

早在 3.2 节中，就给大家介绍了线性表出的概念。现在要告诉大家的是：**线性表出的本质就是 3.11 节中讲的解方程组**。如下将举例说明。

例. 已知 $\vec{\alpha}_1=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\vec{\alpha}_2=(2,2,-2,2)^{\mathrm{T}}$，$\vec{\alpha}_3=(3,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\vec{\beta}=(4,-1,6,-1)^{\mathrm{T}}$。问 $\vec{\beta}$ 能不能由 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$、$\vec{\alpha}_3$ 线性表出？若能，请写出表达式。

解： 根据 3.2 节所讲，若能找出常数 c_1、c_2、c_3，使得 $\vec{\beta}=c_1\vec{\alpha}_1+c_2\vec{\alpha}_2+c_3\vec{\alpha}_3$，就说明 $\vec{\beta}$ 可以由 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$、$\vec{\alpha}_3$ 线性表出，那么现在就是要找出这 c_1、c_2、c_3。也就是说，c_1、c_2、c_3 是未知数，要找出 c_1、c_2、c_3 就相当于解方程组：

$$\vec{\beta}=x_1\vec{\alpha}_1+x_2\vec{\alpha}_2+x_3\vec{\alpha}_3$$

展开得：

$$\begin{pmatrix}4\\-1\\6\\-1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

继续展开得：

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=4\\2x_2+x_3=-1\\x_1-2x_2+x_3=6\\2x_2+x_3=-1\end{cases}$$

然后按照 3.10 节所讲的方法求解这个非齐次方程组即可。若无解，则说明 $\vec{\beta}$ 不能由 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$、$\vec{\alpha}_3$ 线性表出；若有唯一解，则说明 $\vec{\beta}$ 可以由 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$、$\vec{\alpha}_3$ 线性表出，且 $\vec{\beta}=c_1\vec{\alpha}_1+c_2\vec{\alpha}_2+c_3\vec{\alpha}_3$ 中的 c_1、c_2、c_3 只有一组取值；若有无穷多解，则说明 $\vec{\beta}$ 可以由 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$、$\vec{\alpha}_3$ 线性表出，且 $\vec{\beta}=c_1\vec{\alpha}_1+c_2\vec{\alpha}_2+c_3\vec{\alpha}_3$ 中的 c_1、c_2、c_3 有无穷多组取值。

这里，省略求解过程。最后解得：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\0\\-1\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数（答案的形式不唯一）。

所以 $\vec{\beta}$ 可以由 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$、$\vec{\alpha}_3$ 线性表出，表出式为：$\vec{\beta}=(4k+7)\vec{\alpha}_1+k\vec{\alpha}_2-(2k+1)\vec{\alpha}_3$，其中 k 为任意常数。

3.13　初等行变换前后相应的列向量组的线性相关性

本节是很有意思的一节，有意思之处在于：本节的标题就是具体的知识点。也就是说，只要把本节的标题给大家解释明白，那么本节就算介绍完了。

现在通过举例来解释本节标题的意思。比如有一个五行四列的矩阵，现在对此矩阵进行若干次初等行变换（**注意：进行的是行变换而不是列变换，共 3 种：互换两行、某行乘以 k（$k\neq0$）、某行乘以 k 后加到另外一行**），不管变换了多少次，最后得到的矩阵一定还是五行四列的矩阵。若最后得到的矩阵中的 4 个**列向量**是线性相关的（线性无关的），则最原始的（没有经过任何行变换的）矩阵中的 4 个**列向量**也是线性相关的（线性无关的）。

注意，不一定非得是 4 个列向量全看，比如现在就取最后得到的矩阵的第 2 列和第 4 列（刚才是 4 个列向量全看），如果这两列是线性相关的（线性无关的），则最原始的（没有经过任何行变换的）矩阵中的第 2 列和第 4 列也是线性相关的（线性无关的）。

这就叫“初等<u>行变换</u>前后<u>相应的列向量组</u>具有相同的线性相关性”。

由此，还可以推出这样一个结论：**初等行变换前后列向量组的最大无关组也可以“相应”**。还是以上述五行四列的矩阵为例，如果进行了若干次初等行变换后最后得到的矩阵中的 4 个列向量的一个最大无关组是第 1 列、第 2 列、第 4 列，则最原始的（没有经过任何行变换的）矩阵中的第 1 列、第 2 列、第 4 列是最原始的矩阵的 4 个列向量的一个最大无关组。

$\boxed{\text{考研题 3.7}}$ 求向量组 $\vec{a}_1=(1,2,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_2=(1,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_3=(1,3,3,5)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_4=(4,5,-2,7)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_5=(-3,-5,-1,-7)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个最大无关组，并将其余的向量用最大无关组线性表出。

解：本道题共 3 问，现在按顺序来做。

（1）求向量组的秩。

根据 3.6 节（矩阵的秩等于向量组的秩）来求向量组的秩。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4 & \vec{a}_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\2&1&3&5&-5\\1&-1&3&-2&-1\\3&1&5&7&-7\end{pmatrix}$$

由于 4<5，2(4−1)=6，所以将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵需要 6 步。

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-1&1&-3&1\\0&-2&2&-6&2\\0&-2&2&-5&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，所以向量组：$\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4\ \vec{a}_5$ 的秩为 3。

（2）求向量组的一个最大无关组。

为什么是“一个”？之前介绍过，一个向量组的最大无关组可能不止一个。因此，本题题目的意思是：只要求出一个就可以了。一般来说，求最大无关组的题目都会加修饰语“一个”。

要求出最大无关组，首先需要求出最大无关组中包含几个向量。在 3.5 节中，就告诉过大家，向量组的秩指的就是向量组的最大无关组中包含向量的个数（大家可不要只记着 3.11 节的定理 3 跟向量组的秩有关，而忽略了向量组的秩的定义），所以首先需要求向量组的秩，而向量组的秩在第 1 问已经求完了，现在就不用再求，由此可以知道，此题就算没有第 1 问而只有第 2 问，也必须求向量组的秩。

现在对阶梯形矩阵继续进行初等行变换（因为只有进行初等行变换而不是列变换，才能利用本节中所讲的知识）。第 3 行乘以−3 加到第 2 行；第 3 行乘以−4 加到第 1 行，即：

$$\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0&-3\\0&1&-1&0&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

再把第 2 行乘以−1 加到第 1 行，即：

$$\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&0&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

之所以做上述变换，就是为了把第 1 列变为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，把第 2 列变为 $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，把第 4 列变为 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$。那为什么要把这 3 列变成这样呢？设 $\vec{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\beta}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\beta}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\beta}_5=\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$。先来告诉大家这样一个结论：一个向量组，无论该向量组包含多少个向量，只要其中包含单位向量组 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，…，$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，则该单位向量组一定是该

向量组的一个最大无关组。

比如有一个向量组，其中包含的都是三维列向量，假设这个向量组中包含了一万个向量，只要这一万个向量中有$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$这三个向量，则$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$就是此包含了一万个向量的向量组的一个最大无关组。

那么现在也一样，对于向量组：$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$而言，向量组$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$就是它的一个最大无关组。

接着再告诉大家一个结论。若向量组 $\boldsymbol{A}$ 是向量组 $\boldsymbol{B}$ 的一个最大无关组。现在把向量组 $\boldsymbol{A}$ 中的每个向量都增加一维，且增加的数字全是零，形成新的向量组 $\boldsymbol{A}'$；把向量组 $\boldsymbol{B}$ 中的每个向量同样都增加一维，且增加的数字也全是零，形成新的向量组 $\boldsymbol{B}'$。则：向量组 $\boldsymbol{A}'$ 是向量组 $\boldsymbol{B}'$ 的一个最大无关组。

现在就应用该结论解这道题。向量组：$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$增加一维全零的数之后形成的向量组正好是$\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$，$\vec{\beta}_4$。

而向量组$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$增加一维全零的数之后形成的向量组正好是$\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$，$\vec{\beta}_3$，$\vec{\beta}_4$，$\vec{\beta}_5$。所以$\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$，$\vec{\beta}_4$是向量组$\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$，$\vec{\beta}_3$，$\vec{\beta}_4$，$\vec{\beta}_5$的一个最大无关组。

根据本节初等行变换前后列向量组的最大无关组具有“相应”的关系。所以$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4$ 是向量组$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5$ 的一个最大无关组。第 2 问就解完了。

（3）将其余的向量用最大无关组线性表出。

此题的第 2 问已经求出$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，$\vec{a}_4$ 是向量组$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5$ 的一个最大无关组了。现在这第 3 问的意思就是：把$\vec{a}_3$ 用$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，$\vec{a}_4$ 线性表出；把$\vec{a}_5$ 用$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，$\vec{a}_4$ 线性表出。

看到这里，看到了“线性表出”这四个字，可能立刻想到了 3.12 节，想用解方程组的方法来做这第 3 问。但是对于这道题来说，那样做的话过程比较麻烦，这道题用一个小技巧来做会简单很多。

因为$\vec{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\beta}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\beta}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\beta}_5=\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，可以明显地看出：$\vec{\beta}_3=2\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2+0\vec{\beta}_4=2\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2$，$\vec{\beta}_5=-2\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2+0\vec{\beta}_4=-2\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2$。所以可以得出$\vec{a}_3=2\vec{a}_1-\vec{a}_2$，$\vec{a}_5=-2\vec{a}_1-\vec{a}_2$（这是因为矩阵$(\vec{\beta}_1\quad\vec{\beta}_2\quad\vec{\beta}_3\quad\vec{\beta}_4\quad\vec{\beta}_5)$是矩阵$(\vec{a}_1\quad\vec{a}_2\quad\vec{a}_3\quad\vec{a}_4\quad\vec{a}_5)$经过行变换得来的，没有经过列变换，也就是说，原始矩阵的列之间的关系就是行变换后的矩阵列之间的关系）。

3.14 与秩有关的八个公式

公式 1：$r(\boldsymbol{A}_{m\times n})\leqslant m$，$r(\boldsymbol{A}_{m\times n})\leqslant n$，$r(\boldsymbol{A}_{m\times n})\leqslant\min(m,n)$。

解释：若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个 m 行 n 列的矩阵，则：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩一定小于等于它的行数 m，也一定小于等于它的列数 n。由此，可以推出，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩一定小于等于“m 和 n 当中小的那个数”。

例. $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}$，则不用通过任何计算就可以知道$r(A)\leqslant3$，$r(A)\leqslant4$，3 又比 4 小，所以$r(A)\leqslant3$。

公式 2：$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$

解释：某矩阵的秩与该矩阵转置后所得到的矩阵的秩是相等的。

例. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$，则不用计算就可以知道$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，因为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过转置后得到的矩阵。

公式 3：$r(\boldsymbol{AB}) \leqslant r(\boldsymbol{A})$，$r(\boldsymbol{AB}) \leqslant r(\boldsymbol{B})$，$r(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min(r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B}))$。

解释：如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以在左边乘矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的话（即如果 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 存在的话），则矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的秩小于等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，也小于等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩。由此，可以推出，矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的秩一定小于等于"$r(\boldsymbol{A})$ 和 $r(\boldsymbol{B})$ 当中小的那个数"。

例. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}19&22\\43&50\end{pmatrix}$，则不用计算就可以知道 $r(\boldsymbol{C}) \leqslant r(\boldsymbol{A})$，$r(\boldsymbol{C}) \leqslant r(\boldsymbol{B})$，$r(\boldsymbol{C}) \leqslant \min(r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B}))$。

公式 4：$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}) \geqslant r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$

解释：两个矩阵分别求秩，然后把这两个秩相加，相加后所得到的和一定会大于等于这两个矩阵相加后所得到的新矩阵的秩。

例. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}6&8\\10&12\end{pmatrix}$，则不用计算就可以知道 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}) \geqslant r(\boldsymbol{C})$。

公式 5：$r(\boldsymbol{AB}) \geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n$ **（n 是 A 的列数）**

解释：如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以在左边乘矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的话（即如果 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 存在的话），则矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的秩一定大于等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩加上矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩再减去矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数后所得到的那个数。

例. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}19&22\\43&50\end{pmatrix}$，则不用计算就可以知道 $r(\boldsymbol{C}) \geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-2$。

公式 6：当 $k \neq 0$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(k\boldsymbol{A})$

解释：一个矩阵的秩与该矩阵乘以一个非零常数后得到的矩阵的秩相等。

例. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=8\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}8&16\\24&32\end{pmatrix}$，则不用计算就可以知道 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$。

公式 7：$\boldsymbol{A}_{m\times n}\vec{X}=\vec{0}$**，则** $r(\boldsymbol{A})$ **+线性无关解向量个数=n（n 是未知数个数）**

解释：$\boldsymbol{A}_{m\times n}\vec{X}=\vec{0}$ 是什么？是一个由 m 个方程 n 个未知数所组成的齐次方程组，这个公式在 3.10 节的齐次方程组的解法时就已经介绍过，只是没有以公式的形式给出。

在介绍 3.10 节的齐次方程组的解法时，曾提到过一个概念，叫做"基础解系"，**基础解系指的是齐次方程组的解向量组（其中包含无数个解向量）的一个最大无关组。**由此我们可以知道，基础解系中的向量都是齐次方程组的解，并且基础解系中的向量是线性无关的（最大无关组，里面包含的向量必然线性无关）。而基础解系中包含向量的个数是 $n-r$ 个。也就是说，$n-r$=齐次方程组线性无关解向量的个数，将该等式移项后即得公式 7。

公式 8：$\boldsymbol{AB}=\vec{0}$**，则** $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}) \leqslant n$ **（n 是 A 的列数）**

解释：如果公式 7 明白了，那公式 8 就比效容易理解了，现在通过举例的方式给大家解释一下公式 8 是怎么来的。

假设矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有三列，$\boldsymbol{B}=(\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3)$，$\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 是一个齐次方程组。那么，根据 $\boldsymbol{AB}=\vec{0}$，可以得到 $\boldsymbol{A}\vec{b}_1=\vec{0}$，$\boldsymbol{A}\vec{b}_2=\vec{0}$，$\boldsymbol{A}\vec{b}_3=\vec{0}$，即 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 都是齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 的解向量。但 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 这 3 个向量不一定是线性无关的，它们很有可能是线性相关的。而且即使 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 是线性无关的，也只有 3 个向量，$r(\boldsymbol{B})=3$。齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系中也可能含 4 个或 5 个向量。所以无论从哪个角度，都有：$r(\boldsymbol{B}) \leqslant$"$\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系中所包含的向量个数"。再结合公式 7，即可推出公式 8。

$\boxed{\text{考研题 3.8}}$ 已知 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}$ 为三阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{PQ}=\vec{0}$，则（　）。

（A）t=6 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 1；

（B）t=6 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 2；

（C）t≠6 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 1；

（D）t≠6 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 2；

解：当 t=6 时，$r(\boldsymbol{Q})=1$，又 $\boldsymbol{PQ}=\vec{0}$，根据公式 8，$r(\boldsymbol{P})+r(\boldsymbol{Q}) \leqslant \boldsymbol{P}\text{的列数}=3$，即，$r(\boldsymbol{P})+r(\boldsymbol{Q}) \leqslant 3$。$P$ 为非零矩阵，我们知道，只有零矩阵的秩才是零，所以 $r(\boldsymbol{P}) \geqslant 1$。由于 $r(\boldsymbol{P})+r(\boldsymbol{Q}) \leqslant 3$，$r(\boldsymbol{Q})=1$，得 $r(\boldsymbol{P}) \leqslant 2$。所以 $r(\boldsymbol{P}) \geqslant 1$，$r(\boldsymbol{P}) \leqslant 2$，故：$r(\boldsymbol{P})=1$或$r(\boldsymbol{P})=2$。故（A）、（B）选项都不能选。

当 $t \neq 6$ 时，$r(\boldsymbol{Q})=2$，又 $\boldsymbol{PQ}=\vec{0}$，根据公式 8，$r(\boldsymbol{P})+r(\boldsymbol{Q})\leqslant \boldsymbol{P}$的列数$=3$，即，$r(\boldsymbol{P})+r(\boldsymbol{Q})\leqslant 3$。又 $r(\boldsymbol{Q})=2$，得 $r(\boldsymbol{P})\leqslant 1$。又因为 $\boldsymbol{P}$ 为非零矩阵，所以 $r(\boldsymbol{P})\geqslant 1$。由于 $r(\boldsymbol{P})\leqslant 1$，$r(\boldsymbol{P})\geqslant 1$，故：$r(\boldsymbol{P})=1$。选择（C）选项。

答案：（C）。

考研题 3.9 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，但 $\boldsymbol{A}\neq\pm\boldsymbol{E}$，则必有（　）。

（A）$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=1$；

（B）$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2$；

（C）$(r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})-1)\times(r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})-1)=0$；

（D）$(r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})-1)\times(r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})-1)=1$；

解：由于 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=\vec{0}$，所以 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}^2=\vec{0}$，所以 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\vec{0}$。根据公式 8，有 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant 3$。由于 $\boldsymbol{A}\neq\pm\boldsymbol{E}$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的秩均大于等于 1，即 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\geqslant 1$，$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geqslant 1$。结合 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant 3$ 可知，$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant 2$，$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\leqslant 2$。即 $1\leqslant r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant 2$，$1\leqslant r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\leqslant 2$。并且 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$、$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$ 不能同时为 2，否则加起来就是 4，就超过 3 了。所以 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$、$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$ 中至少有一个是 1，但到底谁是 1 就不好说了。也就是说，要么 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})-1=0$，要么 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})-1=0$，要么两者都是 0。所以选择 C 选项。

答案：（C）。

3.15　向量空间

3.15.1　向量空间，基，维数，坐标

向量空间

向量空间就是向量组，而且是特殊的向量组，特殊性体现在：这个向量组中的任意两个向量相加后所得到的向量仍然在该向量组中（举个例子，比如向量组 $\boldsymbol{A}$ 中一共就包含了 **3** 个向量，分别是：$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$，而 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$，那么向量组 $\boldsymbol{A}$ 很显然就不能被称为向量空间，因为，$\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$ 不在向量组 $\boldsymbol{A}$ 中）。光满足这一个条件的向量组还不能被称为向量空间，一个向量组要想成为向量空间，还需要满足一个条件。就是：这个向量组中的任意一个向量乘以常数 $\boldsymbol{k}$ 后所得到的向量仍然在该向量组中。一旦某向量组同时满足这两个条件，那么我们就称此向量组为向量空间。一个向量组要想成为向量空间，其中一般都包含有无数个向量。

空间的含义是实数域上的全体 n 维向量。换句话说，n 维向量空间指的是一个向量组，这个向量组中包含了所有的 n 维向量。例如：三维向量空间是一个向量组，该向量组中包含了所有的三维向量。n 维向量空间用符号 R^n 来表示。

基

“基”的意思就是最大无关组，正如“基础解系”的意思是最大无关组一样。也就是说：基、基础解系、最大无关组这三者其实指的都是最大无关组，区别在于：最大无关组是最一般的概念，而基础解系和基都是在某种特定情况下的最大无关组。“基础解系”是“齐次方程组的解向量”这一特定的向量组的最大无关组，而“基”是“向量空间”这一特定的向量组的最大无关组。举例来说，有向量组 $\boldsymbol{A}$：$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}j\\k\\l\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}m\\n\\o\end{pmatrix}$。假设 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix}$ 是向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个最大无关组，则 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix}$ 仅仅能称为向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个最大无关组，而不能称为向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个基。因为向量组 $\boldsymbol{A}$ 不是向量空间，只是由 **5** 个向量组成的向量组。只有向量空间的最大无关组才能被称为基。

向量空间的维数

首先，要提醒大家的是，千万别把“向量空间的维数”和“向量的维数”这两个概念混淆了“向量的维数”之

前介绍过，比如向量$\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$的维数是 **3**，这叫“向量的维数”。现在要给大家介绍向量空间的维数。刚刚介绍完的“基”实际上指的是“最大无关组”，而“向量空间的维数”实际上指的是“向量组的秩”。

举例来说，“三维向量空间”指的是“一个秩为 3 的向量空间”。另外要告诉大家的是，n 维向量空间用符号 R^n 来表示。

最后总结一下，“基”和“向量空间的维数”实际上指的就是向量空间的“最大无关组”和“秩”。由此我们可以推出：一个向量空间的维数是多少，该向量空间的基中就会包含多少个向量。

坐标

刚刚提及的“基”是向量空间的最大无关组，现在，我们根据最大无关组的定义，可得：基中所包含的 n 个向量是线性无关的，把该向量空间中的任何一个向量放入到基中形成的 $n+1$ 个向量一定是线性相关的。再根据 **3.11** 节的定理 **4**，可以得出这样一个结论：放入到基中的这个向量一定可以由基中的 n 个向量线性表出。

下面用数学语言来描述一下上面的这段话：

$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 是 n 维向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个基，则 $\boldsymbol{R}^n$ 中的任意一个向量 $\vec{b}$ 都可以写成：

$\vec{b}=c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2+c_3\vec{a}_3+\cdots c_n\vec{a}_n$（其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为常数）

向量 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$ 就是向量 $\vec{b}$ 在基 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 下的坐标。

考研题 3.10 已知 $\vec{a}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_3=(-1,2,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基，则向量 $\vec{b}=(0,0,4)^{\mathrm{T}}$ 在该基下的坐标是______。

解：设向量 $\vec{b}=(0,0,4)^{\mathrm{T}}$ 在该基下的坐标是 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$。根据坐标的定义，有：

$$\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

展开得：

$$\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_1+x_2+2x_3=0\\x_2+x_3=4\end{cases}$$

这是一个非齐次方程组，只需按照 3.10 节给出的非齐次方程组的解法解出 x_1、x_2、x_3 即可。

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&1&2&0\\0&1&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&0\\0&1&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&0\\0&0&-2&4\end{pmatrix}$$

$r_1=r_2=n=3$，所以该非齐次方程组有唯一解，此时不需要进行 3.10 节中介绍的非齐次方程组的解法的第三步，直接将矩阵$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&0\\0&0&-2&4\end{pmatrix}$转化为方程组：

$$\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2+3x_3=0\\-2x_3=4\end{cases}，解得\begin{cases}x_1=-2\\x_2=6\\x_3=-2\end{cases}$$

所以此题的答案为：$(-2,6,-2)^{\mathrm{T}}$

3.15.2 基变换公式

一个向量组的最大无关组很可能不止一个，而基作为向量空间的最大无关组，当然也很可能不止一个。本节我们要讨论的知识点（基变换公式）涉及向量空间的两个基。

若 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 和 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_n$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的两个基，且：

$$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n\right)=\left(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_n\right)\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}=\left(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_n\right)\boldsymbol{C} \tag{3-1}$$

则式（3-1）称为由基 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_n$ 到基 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 的基变换公式，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 称为由基 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_n$ 到基 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 的过渡矩阵。

$\boxed{考研题\ 3.11}$ 设 $\vec{a}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_2=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基，$\vec{b}_1=(3,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\vec{b}_2=(2,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\vec{b}_3=(0,2,-2)^{\mathrm{T}}$ 也是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基。

（1）求基 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 到基 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_n$ 的过渡矩阵。

（2）已知 $\vec{c}$ 在基 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_n$ 下的坐标为 $(1,2,0)$，求 $\vec{c}$ 在基 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 下的坐标及 $\vec{c}$。

解：

（1）根据本节介绍的基变换公式，有：

$$\begin{pmatrix}\vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3\end{pmatrix}\times 过渡矩阵$$

即

$$\begin{pmatrix}3&2&0\\0&0&2\\1&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\times 过渡矩阵$$

等式两边同时左乘 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}$，得：

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&2&0\\0&0&2\\1&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\times 过渡矩阵$$

$$=\boldsymbol{E}\times 过渡矩阵$$

$$=过渡矩阵$$

通过计算，可知：$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0&2&2\\1&0&-1\\1&-2&-1\end{pmatrix}$

所以：过渡矩阵$=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0&2&2\\1&0&-1\\1&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&0\\0&0&2\\1&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$

（2）先来求 $\vec{c}$。根据坐标的定义，可得：

$$\vec{c}=1\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix}$$

再来求 $\vec{c}$ 在基 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 下的坐标。设向量 $\vec{c}=(7,0,1)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 下的坐标是 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$。根据坐标的定义，有：

$$\begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

展开得：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=7\\ x_2-x_3=0\\ x_1-x_2+x_3=1\end{cases}$$

这是一个非齐次方程组，只需按照 3.10 节给出的非齐次方程组的解法解出 x_1,x_2,x_3 即可。

$$\begin{pmatrix}1&1&1&7\\0&1&-1&0\\1&-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&7\\0&1&-1&0\\1&-2&0&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&7\\0&1&-1&0\\0&0&-2&-6\end{pmatrix}$$

$r_1 = r_2 = n = 3$，所以该非齐次方程组有唯一解，此时不需要进行 3.10 节中讲的非齐次方程组的解法的第三步。直接将矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$转化为方程组。

$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_3 = -6 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

所以$\vec{c}$在基$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$下的坐标是$(1,3,3)^{\mathrm{T}}$。

3.15.3 正交向量，正交矩阵，正交化

正交向量

先来介绍正交向量的概念。两个维数相同的行向量（或列向量），若对应位置的数字相乘再相加得到零，则称这两个向量正交。

例. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix}$，问$\vec{a}$、$\vec{b}$是否正交？

解：由于$1 \times 4 + 2 \times 10 + 3 \times (-8) = 0$，所以$\vec{a}$、$\vec{b}$正交。

“对应位置相乘再相加”实际上有一个专业术语：内积。

例. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$，求$\vec{a}$、$\vec{b}$的内积？

解：$\vec{a}$、$\vec{b}$的内积$=1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 32$

向量$\vec{a}$和向量$\vec{b}$的内积记为$(\vec{a}, \vec{b})$。

例. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$，求$(\vec{a}, \vec{b})$？

解：$(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 32$

综上所述，若两个向量的内积为零，则称这两个向量正交。

正交矩阵

知道了两个向量正交的概念之后，现在给大家介绍一个非常重要的概念，这个概念会应用到后续的很多章节中，就是：正交矩阵。

先来看一下正交矩阵的定义。**正交矩阵的定义是：如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，简称正交阵。**

还记得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 所满足的关系吗？$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$。由此，可以得到**正交矩阵的等价定义：如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵。**

以上介绍了正交矩阵的定义以及等价定义。看到这里，大家可能觉得正交矩阵与刚刚介绍过的两个向量正交没什么关系。然而，事实却并非如此，接下来给大家介绍矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件，这个充分必要条件与刚刚介绍过的两个向量正交有非常密切的关系。

$\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 中的任意两个行向量都是正交的，且 $\boldsymbol{A}$ 中的任意一个行向量都是单位向量 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 中的任意两个列向量都是正交的，且 $\boldsymbol{A}$ 中的任意一个列向量都是单位向量。

以上就是正交矩阵的充分必要条件。此充分必要条件中提到了“单位向量”一词。**对于向量$\vec{\boldsymbol{a}}$，$\sqrt{(\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{a}})}$称为$\vec{\boldsymbol{a}}$的模，$\vec{\boldsymbol{a}}$的模记为$|\vec{\boldsymbol{a}}|$。如果向量$\vec{\boldsymbol{a}}$的模为 1，则称向量$\vec{\boldsymbol{a}}$为单位向量。**

例. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，求$\vec{a}$的模$|\vec{a}|$。

解：$|\vec{a}| = \sqrt{1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3} = \sqrt{14}$（$\vec{a}$不是单位向量，因为$\vec{a}$的模$|\vec{a}|$不是 1）

考研题 3.12 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & a & b\\ c & 1 & d\\ \mathrm{e} & f & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，且知 $\boldsymbol{A}$ 是正交阵，则 $\boldsymbol{A}$=______

解：此题给出了矩阵 $\boldsymbol{A}$，却又让求矩阵 $\boldsymbol{A}$，很显然出题人是想让大家求出 a,b,c,d,e,f 。

根据正交阵的充分必要条件，向量 $(c,1,d)$，向量 $\begin{pmatrix}a\\1\\f\end{pmatrix}$ 都是单位向量（模为 1 的向量）。

所以有 $\sqrt{c^2+1+d^2}=1$，解得：c=0，d=0。

$\sqrt{a^2+1+f^2}=1$，解得：a=0，f=0。

根据正交阵的充分必要条件，向量 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,b\right)$，向量 $\left(\mathrm{e},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 都是单位向量（模为 1 的向量）。

所以有 $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+0+b^2}=1$，解得：$b=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$。

$\sqrt{\mathrm{e}^2+0+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$，解得：$\mathrm{e}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$。

根据正交阵的充分必要条件，矩阵的第一列和第三列必正交，即 $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\mathrm{e}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}b\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ 必正交。

所以有 $\frac{1}{\sqrt{2}}b+0+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}=0$，解得 $b=-\mathrm{e}$ 。

所以当 $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$\mathrm{e}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$；当 $b=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$\mathrm{e}=\frac{1}{\sqrt{2}}$。

所以 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ 或 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

考研题 3.13 求一个与 $\vec{a}_1=(1,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_2=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_3=(2,1,1,3)^{\mathrm{T}}$ 都正交的单位向量。

解：我们来看这道题。设所求向量为 $\vec{b}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$。

由于所求向量与 $\vec{a}_1=(1,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 正交，则有：$\left(\vec{b},\vec{a}_1\right)=0$，即 $x_1+x_2-x_3+x_4=0$；

由于所求向量与 $\vec{a}_2=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 正交，则有：$\left(\vec{b},\vec{a}_2\right)=0$，即 $x_1-x_2-x_3+x_4=0$；

由于所求向量与 $\vec{a}_3=(2,1,1,3)^{\mathrm{T}}$ 正交，则有：$\left(\vec{b},\vec{a}_3\right)=0$，即 $2x_1+x_2+x_3+3x_4=0$。

综上所述，有齐次方程组：

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=0\\ x_1-x_2-x_3+x_4=0\\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4=0\end{cases}$$

利用 3.10 节中所讲的方法去求解此齐次方程组即可，解法如下。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，小于未知数个数 4，所以该齐次方程组有无穷多组解。

所以：

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=0 \\ x_2=0 \\ 3x_3+x_4=0 \end{cases}$$

又因为 $n-r=4-3=1$，说明 4 个未知数中只有 1 个未知数可以自由取值并且只取 1 组。

这里选择 x_3（选择 x_1、x_4 也可以）为自由取值的变量，并且取 $x_3=-1$。解得该齐次方程组的基础解系为：$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$。

所以 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$，其中 C 为任意常数，而题中说 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$ 为单位向量，即：$\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}=1$，也就是 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$。

把 $x_1=-4C,x_2=0,x_3=-C,x_4=3C$ 代入到 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$ 中，解得 $C=\dfrac{\pm1}{\sqrt{26}}$，所以所求向量 $\vec{b}=\dfrac{\pm1}{\sqrt{26}}(-4,0,-1,3)^{\mathrm{T}}$。

正交化

本节的最后，给大家介绍的知识点是“正交化”。什么叫“正交化”呢？下面举例说明，比如给出 3 个向量，这 3 个向量并不是两两正交的向量，通过某种方法把这 3 个向量化为两两正交的向量，这个过程就是“正交化”。

现在已经知道了正交化的含义，那么到底如何正交化呢？接下来介绍**“施密特正交法”**。

有 n 个向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$，施密特正交法如下：

取 $\vec{b}_1=\vec{a}_1$

$$\vec{b}_2=\vec{a}_2-\frac{(\vec{a}_2,\vec{b}_1)}{(\vec{b}_1,\vec{b}_1)}\times\vec{b}_1$$

$$\vec{b}_3=-\frac{\left(\vec{a}_3,\vec{b}_1\right)}{\left(\vec{b}_1,\vec{b}_1\right)}\times\vec{b}_1-\frac{\left(\vec{a}_3,\vec{b}_2\right)}{\left(\vec{b}_2,\vec{b}_2\right)}\times\vec{b}_2$$

……

$$\vec{b}_n=\vec{a}_n-\frac{\left(\vec{a}_n,\vec{b}_1\right)}{\left(\vec{b}_1,\vec{b}_1\right)}\times\vec{b}_1-\frac{\left(\vec{a}_n,\vec{b}_2\right)}{\left(\vec{b}_2,\vec{b}_2\right)}\times\vec{b}_2-\cdots-\frac{\left(\vec{a}_n,\vec{b}_{n-1}\right)}{\left(\vec{b}_{n-1},\vec{b}_{n-1}\right)}\times\vec{b}_{n-1}$$

则 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_n$ 即为 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 经正交化之后所得到的正交向量组，即 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_n$ 中的向量两两正交。

考研题 3.14 用施密特正交法将向量组 $\vec{a}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_2=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}_3=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 化为标准正交向量组。

解：利用刚刚介绍完的施密特正交法。

取 $\vec{b}_1=\vec{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{b}_2=\vec{a}_2-\frac{(\vec{a}_2,\vec{b}_1)}{(\vec{b}_1,\vec{b}_1)}\times\vec{b}_1$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{(-1)\times1+1\times(-1)+1\times1}{1\times1+(-1)\times(-1)+1\times1}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}-\left(-\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_3=-\frac{\left(\vec{a}_3,\vec{b}_1\right)}{\left(\vec{b}_1,\vec{b}_1\right)}\times\vec{b}_1-\frac{\left(\vec{a}_3,\vec{b}_2\right)}{\left(\vec{b}_2,\vec{b}_2\right)}\times\vec{b}_2$$

$$=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{1\times1+1\times(-1)+(-1)\times1}{1\times1+(-1)\times(-1)+1\times1}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{1\times\left(-\frac{2}{3}\right)+1\times\left(\frac{2}{3}\right)+(-1)\times\frac{4}{3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}}\times\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

现在把 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 都求出来了，这还不是最后的答案。如果此题问的是“正交向量组”，那么 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 就是最后的答案。**但是，此题问的是“标准正交向量组”，多了“标准”两字，这意味着最终得到的向量不仅仅是两两正交的，而且每一个向量都必须是单位向量，即每一个向量的模都必须为 1，这就是“标准”两字的含义。**所以 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 并不是最后的答案，还需要将 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 化为单位向量才行（也称：将 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 单位化）。把一个向量化为单位向量的方法是用该向量除以它的模。

$\vec{b}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，模为 $\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$，所以 $\vec{b}_1$ 化为单位向量后为 $\vec{c}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{b_2}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$，要计算$\vec{b_2}$的模的话，计算量比较大，因为带分数。这里教大家一个方法：忽略向量外面的$\frac{2}{3}$，直接计算$\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$的模。$\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$的模为$\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$，所以$\vec{b_2}$化为单位向量后为$\vec{c_2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$。

$\vec{b_3}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，模为$\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$，所以$\vec{b_3}$化为单位向量后为$\vec{c_3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$。

综上所述，$\vec{c_1},\vec{c_2},\vec{c_3}$为所求的标准正交向量组。

$\boxed{\text{考研题 3.15}}$ 设$\boldsymbol{A}$是5×4矩阵，$r(\boldsymbol{A})=2$。$\vec{a_1}=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$、$\vec{a_2}=(-1,1,4,-1)^{\mathrm{T}}$、$\vec{a_3}=(5,-1,-8,9)^{\mathrm{T}}$是齐次方程组$\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$的解向量，求$\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$的解空间的标准正交基。

解：由于矩阵$\boldsymbol{A}$是五行四列的矩阵，所以$\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$是由5个方程4个未知数组成的齐次方程组。又因为$r(\boldsymbol{A})=2$，根据3.14节中的公式7，可以知道齐次方程组$\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$的基础解系中含4-2=2个解向量。而本题给出了齐次方程组的3个解向量$\vec{a_1}$、$\vec{a_2}$、$\vec{a_3}$，所以这3个解向量肯定是线性相关的。根据3.9节，两个不成比例的向量是线性无关的，所以$\vec{a_1}$、$\vec{a_2}$是线性无关的，又因为齐次方程组$\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$的基础解系中含两个向量，所以$\vec{a_1}$、$\vec{a_2}$可以作为齐次方程组$\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$的一个基础解系。

下面将此题所问的问题再详细说明。此题的问题是“求$\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$的解空间的标准正交基”，意思是“求齐次方程组$\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$的一个基础解系（翻译“解空间的基”），基础解系中的向量还要是两两正交的（翻译“正交”），并且基础解系中的向量还必须是单位向量（翻译“标准”）”。

我们已经证明了向量$\vec{a_1}$、$\vec{a_2}$是齐次方程组$\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$的一个基础解系，现在要做的就是把向量$\vec{a_1}$、$\vec{a_2}$先利用施密特正交法正交化，再将正交化之后所得的两个向量单位化（单位化的意思就是将向量除以模，使其变为单位向量）即可。

正交化的过程如下：

取$\vec{b_1}=\vec{a_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$

$$\vec{b_2}=\vec{a_2}-\frac{(\vec{a_2},\vec{b_1})}{(\vec{b_1}\times\vec{b_1})}\times\vec{b_1}$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\\-1\end{pmatrix}-\frac{(-1)\times1+1\times1+4\times2+(-1)\times3}{1\times1+1\times1+2\times2+3\times3}\times\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{10}{3}\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\2\\10\\-6\end{pmatrix}$$

再将$\vec{b_1}$、$\vec{b_2}$单位化：

$$\vec{c}_1=\frac{\vec{b}_1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2+3^2}}=\frac{\vec{b}_1}{\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_2=\frac{\begin{pmatrix}-4\\2\\10\\-6\end{pmatrix}}{\sqrt{16\ +4+100+36}}=\frac{1}{\sqrt{156}}\begin{pmatrix}-4\\2\\10\\-6\end{pmatrix}$$

$\vec{c}_1$、$\vec{c}_2$ 就是 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 的解空间的标准正交基。本题的答案很明显不是唯一的。比如 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_3$ 也不成比例，说明 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_3$ 也可以作为齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系。

3.16　线性相/无关的证明题

在考研数学线性代数学科中，线性相/无关的证明题是经常会考到的一种题型。本节，将给大家总结一下线性相/无关的证明题的解题方法。

线性相/无关的证明题的解题方法有两种。

- 利用向量组的秩来证明线性相/无关；
- 利用线性相/无关的定义来证明线性相/无关。

3.16.1　方法 1

利用向量组的秩来证明线性相/无关并不是新的知识点，早在 3.11 节中定理 3 的①介绍过。现在通过举例向大家介绍如何利用 3.11 节中定理 3 的①来证明线性相/无关。

例如有 5 个向量，它们组成了一个向量组，要想判断这 5 个向量是线性相关的还是线性无关的，只需计算一下该向量组的秩就可以。如果算出此向量组的秩小于 5，则说明这 5 个向量是线性相关的；如果算出此向量组的秩等于 5，则说明这 5 个向量是线性无关的；如果算出此向量组的秩大于 5，则说明计算错误。

要想判断 n 个向量所组成的向量组是线性相关的还是线性无关的，只需计算该向量组的秩 r（转化为计算矩阵的秩）就可以。如果向量组的秩 $r<n$，则说明这 n 个向量所组成的向量组是线性相关的；如果向量组的秩 $r=n$，则说明这 n 个向量所组成的向量组是线性无关的。

$\boxed{\text{考研题 3.16}}$ 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，证明 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关。

解：根据题意，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有 m 行 n 列，本题让证明 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关，也就是说，此题让证明的是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个列向量是线性无关的。这里利用刚刚讲完的方法（利用向量组的秩）来解本题，即：我们只需要证明矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个列向量构成的向量组的秩等于 n 即可。

根据 3.6 节（向量组的秩等于矩阵的秩），我们只要证明矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 n 即可。

根据 3.14 节中的公式 1，可以知道 $r(\boldsymbol{B})\leqslant n$。

根据 3.14 节中的公式 2，立刻可以知道 $r(\boldsymbol{B})\geqslant r(\boldsymbol{AB})$，而已知条件中 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，所以有 $r(\boldsymbol{B})\geqslant r(\boldsymbol{E})$。本题中的单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，所以 $r(\boldsymbol{E})=n$，即 $r(\boldsymbol{B})\geqslant n$。

由于 $r(\boldsymbol{B})\leqslant n$、$r(\boldsymbol{B})\geqslant n$，所以 $r(\boldsymbol{B})=n$，所以 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关。

3.16.2　方法 2

利用线性相/无关的定义式，再结合左右乘、代入法、反证法来证明线性相/无关。

$\boxed{\text{考研题 3.17}}$ 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k，使线性方程组 $\boldsymbol{A}^k\vec{X}=\vec{0}$ 有解向量 $\vec{a}$，且 $\boldsymbol{A}^{k-1}\vec{a}\neq\vec{0}$，证明：向量组 $\vec{a},\boldsymbol{A}\vec{a},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\vec{a}$ 线性无关。

解：刚读完这道题时，可能会认为此题比较难。实际上，这道题不难，请看接下来的讲解。

首先，本题是一道证明线性无关的题，本节已经介绍过，凡是线性相/无关的证明题，就只有两种方法，这两种方法刚刚介绍的方法 1 和方法 2。此题用方法 2 做介绍过。

为什么这道题只能用方法2做而不能用方法1做？为什么刚才那道题可以用方法1做？现在来解答一下这个问题。

考研题 3.16 之所以用方法 1（利用向量组的秩）来证明，是因为：该题的问题中的向量都是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量，所以该题中求出矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩就相当于求出了问题中那些向量所组成的向量组的秩。本题则不同，本题的问题中的那

些向量所组成的矩阵在题中没有给出，这就说明本题如果用方法 1 做的话可能会非常麻烦或者根本就做不出来，因此我们选择方法 2 来做本题。

方法 2 是利用线性相/无关的定义式。如式（3-2）是定义式。

$$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\boldsymbol{A}\vec{a}+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{A}^{k-1}\vec{a}=\vec{0} \tag{3-2}$$

本题要证明的是线性无关，即证：只有当 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 都为 0 时，上式才成立。

方法 2 是：利用线性相/无关的定义式，再结合左右乘、代入法、反证法来证明线性相/无关。

对于本题来说，写出定义式之后，再结合左右乘、代入法即可以解出来，具体做法如下。

将式（3-2）的等式两侧同时左乘 $\boldsymbol{A}^{k-1}$，得：

$$\lambda_1\boldsymbol{A}^{k-1}\vec{a}+\lambda_2\boldsymbol{A}^{k}\vec{a}+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{A}^{2k-2}\vec{a}=\boldsymbol{A}^{k-1}\vec{0}=\vec{0} \tag{3-3}$$

已知，方程组 $\boldsymbol{A}^k\vec{X}=\vec{0}$ 有解向量 $\vec{a}$，即 $\boldsymbol{A}^k\vec{a}=\vec{0}$，则 $\boldsymbol{A}^{k+1}\vec{a}=\boldsymbol{A}^{k+2}\vec{a}=\cdots=\boldsymbol{A}^{2k-2}\vec{a}=\vec{0}$，将上述式子代入式（3-3），得 $\lambda_1\boldsymbol{A}^{k-1}\vec{a}=\vec{0}$。又已知，$\boldsymbol{A}^{k-1}\vec{a}\neq\vec{0}$，所以 $\lambda_1=0$。将 $\lambda_1=0$ 代入式（3-2）得：

$$\lambda_2\boldsymbol{A}\vec{a}+\lambda_3\boldsymbol{A}^2\vec{a}+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{A}^{k-1}\vec{a}=\vec{0} \tag{3-4}$$

将式（3-4）的等式两侧同时左乘 $\boldsymbol{A}^{k-2}$，同上可证 $\lambda_2=0$。同理可证 $\lambda_3=\lambda_4=\cdots=\lambda_k=0$，从而得证 $\vec{a},\boldsymbol{A}\vec{a},\ldots,\boldsymbol{A}^{k-1}\vec{a}$ 线性无关。

考研题 3.18 已知 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性无关，证明：$\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1$ 线性无关。

错误解法：本题先来告诉大家一种常见的错误解法。一看见 $\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1$，可能就立刻想到了第 1 章的 1.14 节，将矩阵 $(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1)$，写为：

$$(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1)=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix} \quad \text{（1）式}$$

（1）式完全没有问题，接下来将（1）式的等式两侧取行列式，得：

$$\left|\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1\right|=\left|(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)\times\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\right| \quad \text{（2）式}$$

$$\Rightarrow\left|\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1\right|=\left|(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)\right|\times\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix} \quad \text{（3）式}$$

已知 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性无关，根据 3.11 节的定理 3 的①，可以知道向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 的秩为 3。根据 3.6 节（向量组的秩等于矩阵的秩），可以知道矩阵 $(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$ 的秩为 3。根据第 2 章 2.4 节的大总结可知，$\left|\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right|\neq0$，又通过计算发现 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}\neq0$，所以 $\left|\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1\right|\neq0$。根据第 2 章 2.4 节的大总结可知，矩阵 $(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1)$ 的秩为 3。根据 3.6 节（向量组的秩等于矩阵的秩）可知，向量组 $\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1$ 的秩为 3。根据 3.11 节的定理 3 的①可知，$\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1$ 是线性无关的。

这种证明方法是错误的。错就错在：把 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 都当成了三维向量。而实际上，题中没有说 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 是三维向量。也就是说，$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 有可能是三维向量也有可能不是三维向量。如果 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 不是三维向量，则：$\left|\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right|$、$\left|\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1\right|$ 根本不存在。如果 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 是四维向量的话，那么矩阵 $\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)$ 就是一个四行三列的矩阵，根本不存在对应的行列式（因为行列式的行数和列数是相等的），所以这种做法是错误的。

正确解法：利用本节方法 2 来做。

$$k_1(\vec{a}_1+\vec{a}_2)+k_2(\vec{a}_2+\vec{a}_3)+k_3(\vec{a}_3+\vec{a}_1)=\vec{0} \quad \text{（1）式}$$

（1）式是 $\vec{a_1}+\vec{a_2},\vec{a_2}+\vec{a_3},\vec{a_3}+\vec{a_1}$ 线性相/无关的定义式。仅当 k_1、k_2、k_3 全为零时上式才能成立，则说明 $\vec{a_1}+\vec{a_2},\vec{a_2}+\vec{a_3},\vec{a_3}+\vec{a_1}$ 是线性无关的。即要证明的是：仅当 k_1、k_2、k_3 全为零时，（1）式才能成立。

对（1）式进行整理，得：

$$(k_1+k_3)\vec{a_1}+(k_1+k_2)\vec{a_2}+(k_2+k_3)\vec{a_3}=\vec{0} \qquad \text{（2）式}$$

由于题中说 $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$ 是线性无关的，根据线性无关的定义，有：

$$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases} \qquad \text{（3）式}$$

（3）式是一个齐次方程组，由于系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$，根据第 1 章的 1.12 节可知，此齐次方程组只有唯一零解，即 $k_1=k_2=k_3=0$。这说明只有当 $k_1=k_2=k_3=0$ 时，1 式才能成立。所以，$\vec{a_1}+\vec{a_2},\vec{a_2}+\vec{a_3},\vec{a_3}+\vec{a_1}$ 是线性无关的。

使用的是本节中的方法 2 来证明的，相对比较简单。简单之处在于：本题仅仅用到了线性相/无关的定义式，没有像上题一样既用到定义式又用到了左右乘和代入法。

第 4 章

解线性方程组

4.1　求两个方程组的公共解

在第 3 章中，我们已经了解到如何求解齐次方程组和非齐次方程组。本节要告诉大家的是如何求两个方程组的公共解。**只要将这两个方程组联立即可，以下举例说明。**

$\boxed{\text{考研题 4.1}}$ 设线性方程组 (I)$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$　(II)$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

（1）分别求方程组（I）、（II）的通解。

（2）求方程组（I）、（II）的公共解。

解：本题有两问。第 1 问不属于本节的知识点，完全可以用第 3 章介绍的方法求解，而第 2 问属于本节的新知识点。

第（1）问：求方程组（I）的通解。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

（1）将此方程组写为矩阵的形式并求秩。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}，r(\boldsymbol{A}) = 2$$

（2）判断解的类型。

由于 $2 < 4$，即 $r < n$，所以该齐次方程组有无穷多解。

（3）求解。

将 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 化为 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$

由于 $n - r = 2$，说明 4 个未知数中有两个可以自由取值并且取两组：

第一组：$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，解得：$x_1 = 0$，$x_4 = 0$。

第二组：$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，解得：$x_1 = -1$，$x_4 = 1$。

所以基础解系为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 C_1、C_2 为任意常数。

再来求方程组（II）的通解。

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

（1）将此方程组写为矩阵的形式并求秩。

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$、$r(\boldsymbol{B})=2$

（2）判断解的类型。

由于$2<4$，即$r<n$，所以该齐次方程组有无穷多解。

（3）求解。

将$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$化为$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\ x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$

由于$n-r=2$，说明 4 个未知数中有两个可以自由取值并且取两组：

第一组：$\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$，解得：$x_1=0$、$x_2=1$。

第二组：$\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$，解得：$x_1=-1$、$x_2=-1$。

所以基础解系为$\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$。

通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，其中$C_1,C_2$为任意常数。

第（2）问：该问是本节的新知识点，之前已经介绍过，将这两个方程组联立即可。

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_2-x_4=0\\ x_1-x_2+x_3=0\\ x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$$

（1）将此方程组写为矩阵的形式并求秩。

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

按照求秩的步骤（先化为阶梯形，再数非零行的个数）来求秩。

第（1）问中之所以可以直接得出秩，是因为两个矩阵本身已经是阶梯形矩阵，只要数非零行的个数即可：第（1）问中的两个矩阵都是两行四列的，$2<4$，$2(2-1)=2$，化阶梯形需要两步。第 1 步是将第 1 行第 1 列的数化为 1，第 2 步是将第 1 行第 1 列的数正下方的数都化为 0，而第（1）问中的两个矩阵第 1 行第 1 列的数本来就是 1，其正下方的数本来就都是 0，所以本来就是阶梯形矩阵。

第（2）问则不同，只能一步一步地化阶梯形，$2(4-1)=6$，说明此矩阵化阶梯形需要 6 步。

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$r(\boldsymbol{C})=3$

（2）判断解的类型。

由于$3<4$，$r<n$，所以该齐次方程组有无穷多解。

（3）求解。

将$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$化为$\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_2-x_4=0\\ x_3-2x_4=0\end{cases}$

由于$n-r=1$，说明 4 个未知数中有 1 个可以自由取值并且取 1 组。

取 $x_2=1$，解得：$x_1=-1$，$x_3=2$，$x_4=1$

所以基础解系为$\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$。

通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$，其中 C 为任意常数。

考研题 4.2 求线性方程组$\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3+3x_4=11\\-3x_1+x_2-4x_3-2x_4=-6\\-x_1-9x_2+3x_4=15\end{cases}$满足条件 $x_1=x_2$ 的全部解。

解：此题虽然没有明显写出“公共解”这 3 个字，但可以判断出这道题求的就是$\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3+3x_4=11\\-3x_1+x_2-4x_3-2x_4=-6\\-x_1-9x_2+3x_4=15\end{cases}$与 $x_1-x_2=0$ 的公共解。

所以本题与上题一样，属于“公共解”问题，联立即可。也就是说，求非齐次方程组$\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3+3x_4=11\\-3x_1+x_2-4x_3-2x_4=-6\\-x_1-9x_2+3x_4=15\\x_1-x_2=0\end{cases}$的通解即可。

再按照第 3 章所介绍的方法去求解即可。这里只给出最后答案：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\-\frac{6}{5}\\\frac{8}{5}\\1\end{pmatrix}\text{(唯一解)}$$

4.2 同解方程组的证明

本节要讨论的问题是“同解方程组”。“同解方程组”与 4.1 节所讨论的问题“两个方程组的公共解”有共同点也有不同点。

共同点在于：都涉及两个方程组。

不同点在于：所谓两个方程组的公共解，指的是第 1 个方程组的解与第 2 个方程组的解的交集部分。如果用集合 A 代表第 1 个方程组的解，用集合 B 代表第 2 个方程组的解，<u>求两个方程组的公共解则可以表示为求 $A\cap B$</u>，即求集合 A 与 B 的交集；而同解方程组，指的是第 1 个方程组的解与第 2 个方程组的解是一样的。如果用集合 A 代表第 1 个方程组的解，用集合 B 代表第 2 个方程组的解，<u>证明两个方程组是同解方程组则可以表示为证明 $A=B$。</u>

了解了“同解方程组”与“两个方程组的公共解”的相同点与不同点之后，我们正式来看同解方程组。

两个方程组为同解方程组的大前提是这两个方程组的未知数个数相同，如果两个方程组未知数个数不相同（比如方程组 I 中的未知数是 x_1，x_2，x_3，方程组 II 中的未知数是 x_1，x_2，x_3，x_4），那么这两个方程组不可能是同解方程组。

同解方程组一定是出成证明题的形式。也就是说，与同解方程组有关的题的出题形式肯定是让证明两个方程组为同解方程组。那么这样的证明题我们应该如何去做呢？有两种方法。

4.2.1 方法 1

互推法。

考研题 4.3 证明：方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 和方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 是同解方程组。

解：本题采用互推法来证明。即先从 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 推 $\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$，再从 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 推 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$。

从 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 推 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$。

将 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 等式两边左乘 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，得：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\vec{0}=\vec{0}$（任何矩阵乘以零向量都等于零向量)。

再来从 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 推 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$。

将 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 等式两侧左乘 $\vec{X}^{\mathrm{T}}$，得：

$$\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{X}^{\mathrm{T}}\vec{0}=0 \tag{4-1}$$

注意：式（4-1）右侧是数 0 而不是零向量，因为 $\vec{X}^{\mathrm{T}}$ 是行向量，$\vec{0}$ 是列向量，在 2.5 节中给大家总结过，1 个行向量乘以 1 个列向量等于 1 个数。

根据 2.8 节所讲的关于矩阵的转置的 4 个公式中的公式 3：$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，式（4-1）的等式左侧可以变为 $(\boldsymbol{A}\vec{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}$。所以式（4-1）可以变为：

$$(\boldsymbol{A}\vec{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}=0 \tag{4-2}$$

式（4-2）的等式左侧是 3 个矩阵相乘的形式。这 3 个矩阵分别是：$(\boldsymbol{A}\vec{X})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}$，$\vec{X}$。根据 2.6 节所讲，矩阵乘法具有结合律（可以任意加括号），所以式（4-2）左侧可以变为 $(\boldsymbol{A}\vec{X})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\vec{X})=0$。$\boldsymbol{A}\vec{X}$ 是一个列向量（在 2.5 节中就总结过，1 个矩阵乘以 1 个列向量后的形式是列向量)。

设 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$

则 $(\boldsymbol{A}\vec{X})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\vec{X})=0$ 可以化为：

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=0$$

所以 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$。

即：$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$

即：$\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$

我们由 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 推出 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$，又由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 推出 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$。所以方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 与方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 为同解方程组。

4.2.2　方法 2

只从一侧推另一侧，并且证明 $n-r$ 相等。

通过以上的考研题，大家对于证明两个方程组为同解方程组的方法 1 应该已经掌握，现在给大家介绍方法 2。**方法 2 是"只从一侧推另一侧，并且证明 $n-r$ 相等。"**

方法 1 是互推，也就是互相推。而方法 2 不用"互相"，只用从一侧推另一侧，也就是说方法 2 比方法 1 少了"反推"的过程，但方法 2 比方法 1 多了 1 个条件，就是证明 $n-r$ 相等。只要证明 r 相等就够了，因为 n 代表未知数的个数，既然出题人让证明两个方程组为同解方程组，那么这两个方程组的未知数个数 n 就一定是相等的。尽管如此，方法 2 仍然要求的是"$n-r$"而不是"$\boldsymbol{r}$"相等，这是因为 $n-r$ 相等说明两个方程组的基础解系中所含的向量个数相等，这是方法 2 的本质。

考研题 4.4　证明：若方程组：

$$\begin{cases}a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n=b_1\\a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n=b_2\\\vdots\\a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\cdots+a_{mn}y_n=b_m\end{cases}$$

有解，则方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m=0 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0 \end{cases}$$

和方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m=0 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0 \\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m=0 \end{cases}$$

是同解方程组。

解：

为了方便讲解，对方程组和矩阵做如下标记。

记方程组 $\begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n=b_1 \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\cdots+a_{mn}y_n=b_m \end{cases}$ 为方程组（1）。

记方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m=0 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0 \end{cases}$ 为方程组（2）。

记方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m=0 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0 \\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m=0 \end{cases}$ 为方程组（3）。

记矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，向量 $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，向量 $\vec{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$，向量 $\vec{Y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$。

则方程组（1）可以表示为 $\boldsymbol{A}\vec{Y}=\vec{b}$，方程组（2）可以表示为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\vec{X}=\vec{0}$，方程组（3）可以表示为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ b^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\vec{X}=\vec{0}$。

则本题的已知条件和问题可以表示为：已知方程组（1）$\boldsymbol{A}\vec{Y}=\vec{b}$ 有解，证明方程组（2）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\vec{X}=\vec{0}$ 和方程组（3）$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ b^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\vec{X}=\vec{0}$ 是同解方程组。

本题我们采用方法 2 来做。方法 2 是：只从一侧推另一侧，并且证明 $n-r$ 相等。

"只从一侧推另一侧"证明如下。

由于方程组（3）是在方程组（2）的基础上多了 1 个方程，所以方程组（3）的解必然满足方程组（2）。证明完毕。

"$n-r$ 相等"证明如下。

要证明的是方程组（2）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\vec{X}=\vec{0}$ 和方程组（3）$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ b^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\vec{X}=\vec{0}$ 的 $n-r$ 相等。n 肯定相等，因为 n 指的是未知数个数，所以只需证明矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的秩与矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ b^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$ 的秩相等即可。现在来看方程组（1）$\boldsymbol{A}\vec{Y}=\vec{b}$，题中已知方程组（1）$\boldsymbol{A}\vec{Y}=\vec{b}$ **有解**，根据 3.10 节中非齐次方程组的解法中的第 2 步（判断非齐次方程组解的类型）可知，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\,|\,\vec{b})$。根据 3.14 节（关于矩阵的秩的一些公式）中的公式 2（一个矩阵的秩与该矩阵转置后所得到的矩阵的秩相等）可知

$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，

$r(\boldsymbol{A} \mid \vec{b}) = r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ b^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$。所以 $r(\boldsymbol{A}^{T}) = r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ b^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$。

综上所述，方程组（2）与方程组（3）是同解方程组。

4.3　已知齐次方程组的基础解系，反求齐次方程组

以前的考研题目中曾出现过这类题：已知齐次方程组的基础解系，反求齐次方程组。

现在给出这类题的解题方法：**用题目中所给的基础解系来构造一个方程组，然后求此方程组的基础解系，最后用求得的基础解系构造方程组，此方程组即为所求方程组。**此方法在这里不做证明，大家记住就可以。

$\boxed{\text{考研题 4.5}}$ 已知两个方程 4 个未知数的齐次线性方程组的通解为 $\vec{X} = k_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，求原方程组。

解：本题属于“已知齐次方程组的基础解系，反求齐次方程组”的题，所以本题用刚介绍的方法即可。

由题意可知，$\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$是原方程组的 1 个基础解系，利用此基础解系构造方程组为：

$$\begin{cases} y_1 + 2y_3 + 3y_4 = 0 \\ y_2 - y_3 + y_4 = 0 \end{cases}$$

下面来解此齐次方程组。

（1）将齐次方程组化为矩阵的形式并求秩。

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$r(\boldsymbol{A}) = 2$

（2）判断解的类型。

由于 $2 < 4$，即 $r < n$，所以此齐次方程组有无穷多解。

（3）求解。

$4 - 2 = 2$，说明 4 个未知数中有两个未知数可以自由取值且取两组。

将 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$化为$\begin{cases} y_1 + 2y_3 + 3y_4 = 0 \\ y_2 - y_3 + y_4 = 0 \end{cases}$

第 1 组：$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，解得：$y_1 = -2$，$y_2 = 1$。

第 2 组：$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，解得：$y_1 = -3$，$y_2 = -1$。

所以基础解系为：$\vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{\alpha}_2 = \begin{pmatrix}-3\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$。

所以原方程组为：$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$。

注意：本题答案不唯一，因为，让 k_1、k_2 取其他的值的话还可以得到其他基础解系，并且自由未知量也不一定选取 y_3、y_4，另外 y_3、y_4 也不一定取1,0和0,1。

4.4　线性方程组解的性质

线性方程组解的性质就五句话。

第一句话：若 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{A}\vec{X} = \vec{0}$ 的 $n-r$ 个线性无关的解，则 $k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + k_{n-r}\vec{\alpha}_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{A}\vec{X} = \vec{0}$ 的通解

（其中 n 为未知数的个数，r 为矩阵 A 的秩，$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数）。

解释：这句话大家应该再熟悉不过了，因为之前一直这么求齐次方程组的通解。早在第 3 章的就已经介绍，而且还给这 $n-r$ 个线性无关的解所组成的向量组起了个名字叫基础解系。

第二句话：设 $k_1\vec{\alpha}_1 k_2\vec{\alpha}_2\cdots k_{n-r}\vec{\alpha}_{n-r}$ 为 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的通解，$\vec{c}$ 为非齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的 1 个解，则 $k_1\vec{\alpha}_1 k_2\vec{\alpha}_2\cdots k_{n-r}\vec{\alpha}_{n-r}+\vec{c}$ 为非齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的通解（其中 n 为未知数的个数，r 为矩阵 A 的秩，$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数）。

解释：第二句话大家也很熟悉，因为之前一直这么求非齐次方程组的通解。早在第 3 章的就已经介绍过。

第三句话：若 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$ 是齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解，则 $k_1\vec{\alpha}_1 k_2\vec{\alpha}_2\cdots k_s\vec{\alpha}_s$ 是齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解（其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为任意常数）。

解释：第三句话是从前没有介绍过的新知识点。想要理解第三句话，最好的方法就是将这第三句话和前面的第一句话对比着看。第一句话和第三句话都是只涉及齐次方程组而不涉及非齐次方程组。那么它们的区别是什么呢？首先条件上的区别：第一句话的条件中要求了“线性无关”和“n-r 个”，而第三句话的条件中则没有这两个要求，其次结论上的区别：第一句话的结论中说的是“通解”，而第三句话的结论中只是说“解”。

第四句话：若 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 是非齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的两个解，则 $\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2$ 一定是齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解。

解释：第四句话也是新知识点，它告诉大家：非齐次方程组的两个解之差是这个非齐次方程组所对应的齐次方程组的解。

第五句话：若 $\vec{\alpha}$ 是齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的 1 个解，$\vec{c}$ 是非齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的 1 个解，则 $k\vec{\alpha}+\vec{c}$ 一定是非齐次方程组的 1 个解，即 $A(k\vec{\alpha}+\vec{c})=\vec{b}$。

解释：第五句话也是新知识点，它告诉大家：1 个非齐次方程组所对应的齐次方程组的任意一个解向量乘以任意常数 k 之后，再加上该非齐次方程组的 1 个解，所得到的结果一定是该非齐次方程组的 1 个解。

考研题 4.6 设 A 是秩为 $n-1$ 的 n 阶矩阵，$\vec{\alpha}_1$ 与 $\vec{\alpha}_2$ 是方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的两个不同的解向量，则 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的通解必定是：

（A）$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$　　（B）$k\vec{\alpha}_1$　　（C）$k(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)$　　（D）$k(\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)$

解： $A\vec{X}=\vec{0}$ 是 1 个齐次方程组。已知 $r(A)=n-1$，所以 $n-r=n-(n-1)=1$，说明 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系中只含 1 个向量。做到这儿，直接把选项（A）、（C）、（D）都排除了，是完全错误的。比如设 $\vec{\alpha}_3=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$，那么（C）选项就变为 $k\vec{\alpha}_3$，这就是 1 个向量，所以不能把（A）、（C）、（D）都排除。但是（A）选项可以刚读完题就直接排除，因为题目的问题是“通解”，一定要乘以任意常数 k，所以（A）选项可以首先排除。从（B），（C），（D）中选择答案。

（B）选项错误。因为如果 $\vec{\alpha}_1$ 是零向量的话，则 $\vec{\alpha}_1$ 不能作为基础解系（单个零向量是线性相关的而不是线性无关的）。

（C）选项错误。因为当 $\vec{\alpha}_1=-\vec{\alpha}_2$ 时，$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2=\vec{0}$，即 $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$ 是零向量。

（D）选项正确。因为已知 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$ 不同，所以 $\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2$ 不可能是零向量，而单个非零向量是线性无关的。又因为 $\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2$ 可以看成是 $k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2$，其中 $k_1=1$、$k_2=-1$。由本节的“第三句话”可知，$\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2$ 是齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解，所以 $\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2$ 可以作为齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系，所以齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的通解可以表示为 $k(\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)$。

考研题 4.7 已知 $\vec{\beta}_1$、$\vec{\beta}_2$ 是 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的两个不同的解，$\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$ 是齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系，k_1、k_2 是任意常数，则 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的通解是：

（A）$k_1\vec{\alpha}_1+k_2(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)+\dfrac{\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2}{2}$　　（B）$k_1\vec{\alpha}_1+k_2(\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)+\dfrac{\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2}{2}$

（C）$k_1\vec{\alpha}_1+k_2(\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2)+\dfrac{\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2}{2}$　　（D）$k_1\vec{\alpha}_1+k_2(\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2)+\dfrac{\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2}{2}$

解： 已知 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$ 是 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系，所以 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系中含有两个向量。由本节的“第三句话”可知，$\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2$ 也是 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解。

$$(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

由于 $\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0$，所以 $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 为可逆矩阵，所以 $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 可以写为若干初等矩阵的乘积，即 $(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2)P_1P_2\cdots P_n$，其中 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 为初等矩阵。$(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2)P_1P_2\cdots P_n$ 相当于给矩阵 $(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2)$ 进行了若干次初等列变换，又因为初等变换不改变矩阵的秩，所以 $r(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)=r(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2)$。由于 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系，所以 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$ 线性无关，$r(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2)=2$，$r(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)=2$，所以 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2$ 线性无关。因此，$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2$ 可以作为 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系，$\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 的通解为 $k_1\vec{\alpha}_1+k_2(\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)$。

$\boldsymbol{A}\times\dfrac{\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2}{2}=\dfrac{1}{2}A(\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2)$，由于矩阵乘法对于矩阵加减法满足分配律，所以 $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}(\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2)=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}\vec{\beta}_1+\boldsymbol{A}\vec{\beta}_2)$。

已知 $\vec{\beta}_1$、$\vec{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{b}$ 的解，所以有 $\boldsymbol{A}\vec{\beta}_1=\vec{b}$、$\boldsymbol{A}\vec{\beta}_2=\vec{b}$，$\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}\vec{\beta}_1+\boldsymbol{A}\vec{\beta}_2)=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{b})=\dfrac{1}{2}(2\vec{b})=\vec{b}$，即 $\boldsymbol{A}\times\dfrac{\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2}{2}=\vec{b}$，所以 $\dfrac{\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2}{2}$ 为 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{b}$ 的一个特解。

由于 $k_1\vec{\alpha}_1+k_2(\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)$ 为 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 的通解，$\dfrac{\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2}{2}$ 为 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{b}$ 的特解，由本节的“第二句话”可知，$k_1\vec{\alpha}_1+k_2(\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)+\dfrac{\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2}{2}$ 为 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{b}$ 的通解。本题答案为（B）选项。

（D）选项错误的原因在于：根据本节的“第四句话”，$\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 的解，但是 $\vec{\alpha}_1$ 与 $\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2$ 到底是不是线性无关的不一定，所以不能把 $\vec{\alpha}_1$，$\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2$ 作为 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系。而（A）、（C）两个选项中出现的 $\dfrac{\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2}{2}$ 不是解，因为 $\boldsymbol{A}\times\dfrac{\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2}{2}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}\vec{\beta}_1-\boldsymbol{A}\vec{\beta}_2)=\dfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{b})=\vec{0}\neq\vec{b}$，所以（A）、（C）两个选项均不能选。

答案：（B）。

考研题 4.8　设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*\neq 0$，若 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$ 是非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{b}$ 的互不相等的解，则对应齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系：

（A）不存在　　（B）仅含一个非零解向量

（C）含有两个线性无关的解向量　　（D）含有三个线性无关的解向量

解： $\boldsymbol{A}^*$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中所有元素的代数余子式所组成的矩阵。**方阵 $\boldsymbol{A}$ 中某元素的代数余子式必定是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $n-1$ 阶子式。**这很好推导，因为方阵中的一个元素的代数余子式就是方阵去掉该元素所在行和所在列后剩下的矩阵所对应的行列式，而方阵的 $n-1$ 阶子式的定义也是这个。

而此题说 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$，这就意味着矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的 n^2 个数中至少有一个不为零，也就是说方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n^2 个元素中至少有一个元素的代数余子式不为零。我们知道，矩阵秩的定义是：若存在 r 阶子式不为零，而 $r+1$ 阶子式都为零，则矩阵的秩为 r。所以此题立刻可以得出这样的结论：矩阵 A 的秩为 $n-1$ 或 n。

若 n 阶方阵 A 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*\neq O$，则 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 n-1 或 n。

在本题中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩到底是 $n-1$ 还是 n 呢？已知 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{b}$ 有 4 个不同的解，根据第 3 章中的非齐次方程组的解法的第 2 步（判断解的类型），可以知道非齐次方程组解的类型只有 3 种：无解、唯一解、无穷多解。而本题说该非齐次方程组有 4 个不同的解，则显然该非齐次方程组有无穷多解。也就是 $r_1=r_2<n$，所以可以知道矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$ 而不是 n。

因为齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 的未知数个数为 n，$r(\boldsymbol{A})=n-1$，所以齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系中所含向量的个数为 $n-r(\boldsymbol{A})=n-(n-1)=1$。本题应选择（B）选项。

答案：（B）。

考研题 4.9　对于 n 元方程组，下列命题正确的是：

（A）如果 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 只有零解，则 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{b}$ 有唯一解；

（B）如果 $A\vec{X}=\vec{0}$ 有非零解，则 $A\vec{X}=\vec{b}$ 有无穷多解；

（C）如果 $A\vec{X}=\vec{b}$ 有两个不同的解，则 $A\vec{X}=\vec{0}$ 有无穷多解；

（D）$A\vec{X}=\vec{b}$ 有唯一解的充要条件是 $r(A)=n$；

解：（A）选项：此选项是说如果齐次方程组只有零解，则对应的非齐次方程组有唯一解。根据 $A\vec{X}=\vec{0}$ 只有零解，$r(A)=n$；$A\vec{X}=\vec{b}$ 有唯一解，意味着 $r(A)=r(A\,|\,\vec{b})=n$。所以此选项是不对的，因为 $r(A)=n$ 推不出 $r(A)=r(A\,|\,\vec{b})=n$。当 $r(A)\neq r(A\,|\,\vec{b})$ 时，$A\vec{X}=\vec{b}$ 是无解的。

（B）选项：根据 $A\vec{X}=\vec{0}$ 有非零解，$r(A)<n$；$A\vec{X}=\vec{b}$ 有无穷多解，意味着 $r(A)=r(A\,|\,\vec{b})<n$。所以此选项是不对的，因为 $r(A)<n$ 推不出 $r(A)=r(A\,|\,\vec{b})<n$。当 $r(A)\neq r(A\,|\,\vec{b})$ 时，$A\vec{X}=\vec{b}$ 是无解的。

（C）选项：$A\vec{X}=\vec{b}$ 有两个不同的解，意味着 $A\vec{X}=\vec{b}$ 有无穷多解。根据 $A\vec{X}=\vec{b}$ 有无穷多解，$r(A)=r(A\,|\,\vec{b})<n$；$A\vec{X}=\vec{0}$ 有无穷多解，意味着 $r(A)<n$。所以此选项是正确的，因为 $r(A)=r(A\,|\,\vec{b})<n$ 可以推出 $r(A)<n$。

（D）选项：根据 3.10 节可知，$A\vec{X}=\vec{b}$ 有唯一解的充要条件是 $r(A)=r(A\,|\,\vec{b})=n$ 而不是 $r(A)<n$，所以此选项错误。

答案：（C）。

4.5　由方程组中参数的取值判断解的类型

3.10 节中，给出了求解齐次方程组和求解非齐次方程组的步骤。无论是求解齐次方程组还是求解非齐次方程组都是 3 个步骤，第 1 步是将所给方程组化为矩阵的形式并且求秩，第 2 步是判断解的类型，第 3 步是求解。

这里强调 3 个步骤中的第 1 步，**即将所给方程组化为矩阵的形式并且求秩。**

“将所给方程组化为矩阵的形式”很简单，一个一个数照着写即可。而“求秩”可就要好好研究研究了。

因为以前解的方程组都是不带未知参数的方程组。然而，考研数学中多次出现带参数的方程组，有时是带 1 个参数，有时是带两个参数。这个时候，求秩就会比较困难。具体地说，参数会影响化阶梯形时的奇数步，对于偶数步没有影响。

现在先将总结的解题方法写在这里，并马上就会通过例题来讲解。总结的万能解题方法是：

在化矩阵为阶梯形矩阵的奇数步时，如果 a_{ii}（指矩阵中第 i 行第 i 列的数）中含未知参数，那么此时就看其正下方的数。具体来说就是：

- **如果其正下方有非零的数，则进行换行即可。**
- **如果其正下方没有非零的数，就需要进行分类讨论：$a_{ii}=0$ 为一类，$a_{ii}\neq 0$ 为一类。**

考研题 4.10　已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$

（1）a、b 为何值时，方程组无解？a、b 为何值时，方程组有解？

（2）有解时，求出方程组全部解。

解：本题是 1 道求解非齐次方程组的题。**本题与以往做的解方程组的题的不同之处在于：方程组中含有两个未知参数** a、b，但是不管是不含参数的方程组还是含参数的方程组，都需要按照 3.10 节所讲的 3 个步骤来做。

第（1）问题

第一步：将所给方程组化为矩阵的形式并求两个秩。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & b \end{pmatrix}$$

这个矩阵有四行六列。$4<6$，$2(4-1)=6$，所以化阶梯形需要 6 步。

化阶梯形 6 步之①：将 a_{11} 化为 1。由于 a_{11} 本来就是 1，所以这一步略过。

化阶梯形 6 步之②：将 a_{11} 正下方的 a_{21}、a_{31}、a_{41} 都化为 0。方法是第 1 行×(−3) 加到第 2 行，第 1 行×(−5) 加到第 4 行。

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3&a\\0&1&2&2&6&3\\5&4&3&3&-1&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6&a-3\\0&1&2&2&6&3\\0&-1&-2&-2&-6&b-5\end{pmatrix}$$

化阶梯形 6 步之③：将 a_{22} 化为 1。方法是第 2 行×(−1)。

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6&a-3\\0&1&2&2&6&3\\0&-1&-2&-2&-6&b-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3-a\\0&1&2&2&6&3\\0&-1&-2&-2&-6&b-5\end{pmatrix}$$

化阶梯形 6 步之④：将 a_{22} 正下方的 a_{32},a_{42} 都化为 0。方法是×(−1)第 2 行加到第 3 行，第 2 行×1 加到第 4 行。

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3-a\\0&1&2&2&6&3\\0&-1&-2&-2&-6&b-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3-a\\0&0&0&0&0&a\\0&0&0&0&0&b-a-2\end{pmatrix}$$

现在要进行第 5 步。然而却不能写“化阶梯形 6 步之⑤”，这是因为这一步要分类讨论。

第⑤小步是将 a_{33} 化为 1，可 a_{33} 是 0，**由 2.3.3 节（利用初等行变换来求矩阵的秩）所讲的“特殊情况”可知，当奇数步（化 1 的步骤）出现 0 时，先看该数正下方有没有非零的数。若有，则将该数所在行与该数正下方的非零的数所在行互换；若没有，则改为将该数右侧的那个数化为 1。**本题中 a_{33} 正下方的数只有一个，就是 0，所以不能换行，而要关注 a_{33} 右侧的 a_{34}，a_{34} 也是 0，那就再看 a_{34} 正下方有没有非零的数，a_{34} 正下方的数只有一个，就是 0，所以不能换行，而要关注 a_{34} 右侧的 a_{35}，结果 a_{35} 也是 0。继续看 a_{35} 正下方有没有非零的数，a_{35} 正下方的数只有一个，就是 0，所以不能换行，所以关注 a_{35} 右侧的 a_{36}。**第⑤步要做的事是把 a_{33} 化为 1，却转化为把 a_{36} 化为 1。**

值得注意的是，之前所述和本节所讲的解题方法无关，本节的解题方法是用于奇数步（化 1 的步骤）出现字母时的情况。

第 5 步要做的事已经从原先的把 a_{33} 化为 1 变为了现在的把 a_{36} 化为 1，而 a_{36} 是 a，a 是参数。这里**要用到本节给大家总结的解题方法。**

本节给大家总结的解题方法是：**当奇数步（化 1 的步骤）出现参数时，就看其正下方的数。具体来说，如果其正下方有非零的数，则进行换行即可；如果其正下方没有非零的数，就需要进行分类讨论：$a_{ii}=0$ 为一类，$a_{ii}\neq 0$ 为一类。**

本题，a 的正下方是 $b-a-2$，$b-a-2$ 不是非零的数。此时要分类讨论，分 $a=0$ 与 $a\neq 0$ 两种情况来讨论。

下面说两点需要注意的地方：

第一点，本节所讲的是“当奇数步出现参数时，看其正下方有没有非零的数，有就换行，没有才讨论”。

2.3.3 节所讲的特殊情况是“当奇数步出现 0 时，看其正下方有没有非零的数，有的话就换行，没有的话就把该数右侧的数化 1”。

这两句话中都出现了“非零的数”，但这两个“非零的数”不是一回事。本节中所提到的“非零的数”的范围特别窄，既不能是 0 也不能含参数（也就是说，必须得是非零的纯数字）；而 2.3.3 节中所提到的“非零的数”范围比较宽，只要不是明显地写着“0”，就叫非零的数。

本题，a 的正下方是 $b-a-2$，$b-a-2$ 不是非零的数。所以要讨论而不是换行。如果 a_{36} 不是 a 而是 0，然后 0 的正下方是 $b-a-2$，这就属于 2.3.3 节所讲的特殊情况，$b-a-2$ 是非零的数，要换行。

第二点，如果 a_{36} 不是 a 而是 $f(a)$，那么分类讨论时应该分 $f(a)=0$ 和 $f(a)\neq 0$ 两种情况。例如，如果 a_{36} 是 $a-100$，则分类讨论时就应该分 $a-100=0$ 与 $a-100\neq 0$ 两种情况来讨论。

说完需要注意的两点，继续解本题。

当 $a=0$ 时，矩阵变为：

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&b-2\end{pmatrix}$$

根据 2.3.3 节所讲的特殊情况，当奇数步出现 0 时，看其正下方有没有非零的数，有的话就换行，没有的话就把该数右侧的数化为 1 即可。现在 a_{36} 正下方的数为 $b-2$，是非零的数，所以换行。

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&b-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&b-2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

现在又要用到本节所讲的解题方法，因为奇数步出现了参数。由于$b-2$正下方只有1个数，是0，不是非零的数，所以要分类讨论。分$b-2=0$和$b-2\neq 0$，即$b=2$和$b\neq 2$两种情况来讨论。值得注意的是，现在对b进行的讨论的前提是$a=0$。

情况1：当$a=0$且$b=2$时，矩阵变为：

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

在$a=0$且$b=2$的情况下化阶梯形6小步之⑤：把a_{36}化为1。a_{36}是0，a_{36}的正下方也全是0，a_{36}右侧没有数，所以第⑤步因无法进行而结束。

在$a=0$且$b=2$的情况下化阶梯形6步之⑥：把a_{36}的正下方的数全化为0，因为上一步已无法进行，所以这一步也直接结束。

$r_1=r_2=2$

情况2：当$a=0$且$b\neq 2$时，矩阵变为：

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&b-2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

在$a=0$且$b\neq 2$的情况下化阶梯形6小步之⑤：把a_{36}化为1。方法：第3行$\times\dfrac{1}{b-2}$。

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&b-2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

在$a=0$且$b\neq 2$的情况下化阶梯形6小步之⑥：把a_{36}正下方的数全化为0，a_{46}本来就是0，所以不用化了。

$r_1=2$，$r_2=3$

情况3：当$a\neq 0$时，矩阵变为：

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3-a\\0&0&0&0&0&a\\0&0&0&0&0&b-a-2\end{pmatrix}$$

在$a\neq 0$的情况下化阶梯形6步之⑤：将a_{36}化为1。方法：第3行$\times\dfrac{1}{a}$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3-a\\0&0&0&0&0&a\\0&0&0&0&0&b-a-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3-a\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&b-a-2\end{pmatrix}$$

在$a\neq 0$的情况下化阶梯形6步之⑥：把a_{46}化为0。方法：第3行$\times(-b+a+2)$加到第4行。可明显看出，偶数步遇参数什么都不影响。

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3-a\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&b-a-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3-a\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$r_1=2$，$r_2=3$

第二步：判断解的类型。

当 $a=0$ 且 $b=2$ 时，$r_1=r_2<n$，该方程组有无穷多解。

当 $a=0$ 且 $b\neq 2$ 时，$r_1\neq r_2$，该方程组无解。

当 $a\neq 0$ 时，　$r_1\neq r_2$，该方程组无解。

第（1）问已经做完，虽篇幅较长，但逻辑非常清晰，完全利用 2.3.3 节讲的求矩阵的秩的方法，只是在进行奇数步骤时如果出现参数，则利用本节所讲的方法分类讨论。

现在来看这第（2）问，问题是：有解时，求出方程组的全部解。由此可知，此问问的是当 $a=0$ 且 $b=2$ 时的情况。这一问不涉及任何本节的新知识点，用 3.10 节所介绍的方法求解即可。这一问不给大家写答案了，因为 $a=0$ 且 $b=2$ 时，本题与考研题 3.3 是一模一样的。

4.6　已知方程组解的类型，求方程组中的参数

如果上节的解题方法掌握得很好的话，本节的知识点会比较容易掌握。因为本节所涉及的题型是上一节所涉及的题型换了一种问法。

上节所涉及的题型的问法是：**“当参数为何值时，方程组无解？当参数为何值时，方程组有无穷多解？”**而本节所涉及的题型的问法是：**“已知方程组无解，求参数？已知方程组有无穷多解，求参数？”**只是换了一种问法而已，本质完全没变，都是让求参数。所以本节所涉及的题型的解题方法与上节所讲的解题方法完全一致。

考研题 4.11　已知线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1 \\ (a+2)x_1+3x_2+2x_3=3 \\ -2x_1+ax_2+x_3=0 \end{cases}$$

无解，则参数 a 应满足什么条件？

解：将所给方程组化为矩阵的形式：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ a+2 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

由于此矩阵有三行四列，$3<4$，$2(3-1)=4$，所以此矩阵化为阶梯形矩阵需要 4 步。

化阶梯型 4 步之①：将 a_{11} 化为 1，a_{11} 本来就是 1，所以此步骤省略。

化阶梯型 4 步之②：将 a_{21}，a_{31} 化为 0，方法：第 1 行×$(-a-2)$ 加到第 2 行，第 1 行×2 加到第 3 行。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ a+2 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & a & 1 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -(2a+1) & -a & 1-a \\ 0 & a+4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

由于 a_{22} 为 $-(2a+1)$，其正下方也没有非零的数，所以要讨论。

情况 1：当 $-(2a+1)\neq 0$ 即 $a=-\frac{1}{2}$ 时，矩阵变为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

在 $a=-\frac{1}{2}$ 的情况下化阶梯形 4 步之③：将 a_{22} 化为 1。方法：互换第 2 行和第 3 行，然后将新的第 2 行×$\frac{2}{7}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & 3 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

在 $a=-\frac{1}{2}$ 的情况下化阶梯形 4 步之④：将 a_{22} 正下方的数化为 0。a_{22} 正下方只有一个数，而且本身就是零，所

以此步骤省略。

由于 $r_1 = r_2 = n = 3$ 可知，该方程组有唯一解而不是无解，所以不符合题意。

情况 2：当 $-(2a+1) \neq 0$ 即 $a \neq -\dfrac{1}{2}$ 时，矩阵变为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -(2a+1) & -a & 1-a \\ 0 & a+4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

在 $a \neq -\dfrac{1}{2}$ 的情况下化阶梯形 4 步之③：将 a_{22} 化为 1。方法：第 2 行 $\times\left(-\dfrac{1}{2a+1}\right)$。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -(2a+1) & -a & 1-a \\ 0 & a+4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dfrac{a}{2a+1} & \dfrac{a-1}{2a+1} \\ 0 & a+4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

在 $a \neq -\dfrac{1}{2}$ 的情况下化阶梯形 4 步之④：将 a_{22} 正下方的数化为 0。方法：第 2 行 $\times(-a-4)$ 加到第 3 行。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dfrac{a}{2a+1} & \dfrac{a-1}{2a+1} \\ 0 & a+4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dfrac{a}{2a+1} & \dfrac{a-1}{2a+1} \\ 0 & 0 & 3-\dfrac{a^2+4a}{2a+1} & 2-\dfrac{a^2+3a-4}{2a+1} \end{pmatrix}$$

现在已经把化阶梯形矩阵的 4 步都进行完了，题中说此方程组无解，则有如下式子成立。

设：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \dfrac{a}{2a+1} \\ 0 & 0 & 3-\dfrac{a^2+4a}{2a+1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dfrac{a}{2a+1} & \dfrac{a-1}{2a+1} \\ 0 & 0 & 3-\dfrac{a^2+4a}{2a+1} & 2-\dfrac{a^2+3a-4}{2a+1} \end{pmatrix}$$

则 $r(\boldsymbol{A}) \neq r(\boldsymbol{B})$。

所以 $3-\dfrac{a^2+4a}{2a+1} = 0$，解得 $a = 3$ 或 $a = -1$。

$2-\dfrac{a^2+3a-4}{2a+1} \neq 0$，解得 $a \neq 3$ 或 $a \neq -2$。

综上：$a \neq -\dfrac{1}{2}$ 且 $a = -1$（因为是在 $a \neq -\dfrac{1}{2}$ 这个大前提下做的），所以此题答案为 $a = -1$。

第5章

特征值、特征向量、相似矩阵

5.1 特征值、特征向量的基本概念

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 行 n 列的方阵，$\vec{\xi}$ 是一个 n 维列向量。那么 $\boldsymbol{A}\vec{\xi}$ 存在吗？当然存在，因为 $\vec{\xi}$ 可以看成是一个 n 行一列的矩阵，一个 n 行 n 列的矩阵当然可以左乘一个 n 行一列的矩阵，乘完之后得到的是一个 n 行一列的矩阵，即 $\boldsymbol{A}\vec{\xi}$ 是 n 维列向量。这是早在第 1 章就讲过的知识点。

下面来看另一个问题，λ 是一个数字，$\vec{\xi}$ 是一个 n 维列向量，那么 $\lambda\vec{\xi}$ 存在吗？当然存在，它就是第 1 章讲到的数字与矩阵相乘，只不过这个矩阵比较特殊（是向量），乘完的结果 $\lambda\vec{\xi}$ 是 n 维列向量。

通过以上分析，我们知道 $\boldsymbol{A}\vec{\xi}$ 是一个 n 维列向量，$\lambda\vec{\xi}$ 也是一个 n 维列向量。后来人们发现了这样一个现象：只要 $\boldsymbol{A}$ 是一个方阵，那么总能找出数 λ 与**非零向量** $\vec{\xi}$，使得 $\boldsymbol{A}\vec{\xi}=\lambda\vec{\xi}$。下面说一下特征值、特征向量的定义式。

设 $\boldsymbol{A}$ 是方阵，使得 $\boldsymbol{A}\vec{\xi}=\lambda\vec{\xi}$（$\vec{\xi}\neq\vec{0}$）成立的数 λ 和非零向量 $\vec{\xi}$ 分别称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量（或称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 所对应的特征向量）。

5.2 特征值、特征向量的计算方法

一个方阵的特征值和特征向量可以通过某种计算方法计算出来吗？当然可以。下面我就来给大家推导一下特征值和特征向量的计算方法。

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$、矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ、矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量 $\vec{\xi}$ 这三者满足关系式 $A\vec{\xi}=\lambda\vec{\xi}$（$\vec{\xi}\neq\vec{0}$），所以有 $A\vec{\xi}-\lambda\vec{\xi}=\vec{0}$，即有 $(A-\lambda E)\vec{\xi}=\vec{0}$。

现在构造一个齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\vec{X}=\vec{0}$。由于 $\boldsymbol{E}$ 为方阵，所以 $\lambda\boldsymbol{E}$ 为方阵。$\boldsymbol{A}$ 肯定也为方阵（要不然根本不能减），所以 $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$ 为方阵。也就是说，这里构造的方程组是一个“方程个数等于未知数个数”的方程组。由 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\vec{\xi}=\vec{0}$ 可知，$\vec{\xi}$ 是齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\vec{X}=\vec{0}$ 的解，又因为 $\vec{\xi}$ 是非零向量（特征向量的定义规定特征向量必须是非零向量），所以这里构造的齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\vec{X}=\vec{0}$ 有非零解。根据第 1 章 1.12 节中讲的充分必要条件，立刻可以得到行列式 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$。

利用这个等式可以计算特征值，因此很多人只记住了这个计算特征值的公式，完全不管这个公式是如何推导出来的，以后碰到求特征值的题就直接用这个公式。这当然是可以的，但是这种学习习惯不提倡，而且这样记得也不牢靠，所以建议考生知道此公式的推导过程。

下面探讨如何求特征向量。首先，方阵 $\boldsymbol{A}$ 是几阶方阵，利用 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 求出的特征值就会有几个，这一点在接下来的题中就会体现出来。**既然矩阵的特征值不止一个，在求特征向量时，就必须针对每个不同的特征值分别求各自的特征向量。**下面举例说明特征向量到底该怎么求。

设矩阵 A 是一个三阶方阵（三行三列的矩阵），假设已经利用求特征值的公式 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 求出了矩阵 A 的三个不同的特征值 λ_1、λ_2、λ_3。现在来求特征值 λ_1 对应的特征向量，把 λ_1 代入到之前推导出的含 λ 的方程组 $(A-\lambda E)\vec{\xi}=\vec{0}$ 中，得到了一个不含未知参数的方程组 $(A-\lambda_1 E)\vec{\xi}=\vec{0}$，然后用第 **3** 章第 **3.10** 节所讲的求解齐次方程组的方法来求解这个齐次方程组就行了，求得的通解就是 λ_1 这个特征值对应的特征向量（但有一点需要注意，由于定义中规定特征向量 $\vec{\xi}$ 必须是非零向量，所以“求特征向量”与“求齐次方程组通解”唯一的区别就在于，乘在基础解系中的每个向量前面的常数不能同时为零）。求解 λ_2 所对应的特征向量和 λ_3 所对应的特征向量也是用同样的方法。

$\boxed{\text{考研题 5.1}}$ 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解： 根据之前讲的，必须先求特征值，然后对不同的特征值分别求各自对应的特征向量。**虽然此时此刻还没有求特征值，但可以知道该矩阵共有三个特征值，因为该矩阵是一个三行三列的矩阵。**

下面求矩阵 A 的特征值。**根据之前讲的，需要通过** $|A-\lambda E|=0$ **来解出特征值** λ。

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda E=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

令 $|A-\lambda E|=0$，即 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0$

根据第 1 章讲的行列式的解法，得：

$\lambda^2(\lambda+2)=0$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=-2$（**记住，千万不要写成** $\boldsymbol{\lambda_1=0,\lambda_2=-2}$**，这是致命性的错误，因为** $\boldsymbol{\lambda^2(\lambda+2)=0}$ **相当于是** $\boldsymbol{(\lambda-0)(\lambda-0)(\lambda+2)=0}$）。**当然，也可以写成** $\boldsymbol{\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=0}$。

现在已经求完矩阵 A 的特征值了，共三个特征值。其中有两个特征值相等，即 $\lambda_1=\lambda_2=0$，还有一个特征值是 $\lambda_3=-2$。下面开始求特征向量。**之前讲过，要针对不同的特征值求其对应的特征向量。**此题中矩阵 A 有两个不同的特征值 0 和 -2。所以我们现在分别针对特征值 0 和特征值 -2 求特征向量。

当 $\lambda_1=\lambda_2=0$ **时：**

齐次方程组 $(A-\lambda E)\vec{\xi}=\vec{0}$ 变为了 $(A-0E)\vec{\xi}=\vec{0}$，即 $A\vec{\xi}=\vec{0}$。解出方程组 $A\vec{\xi}=\vec{0}$ 的通解即可。用第 3 章第 3.10 节所讲的方法求解，但是不要忘记通解中的任意常数不能同时为 0。

（1）将 $A\vec{\xi}=\vec{0}$ **中的** A **化为矩阵的形式并求秩。**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r=1$

（2）判断解的类型。

由于 $r<n$,所以此齐次方程组有无穷多解。

（3）求解。

$x_1-x_2+x_3=0$。因为 $n-r=2$，所以取 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，解得 $x_1=-1$；取 $\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，解得 $x_1=1$。

所以此方程组的基础解系为 $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$。

所以此方程组的通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，其中 k_1、k_2 是任意常数。

所以特征值 0 对应的特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，其中 k_1、k_2 是不同时为零的任意常数。

到此为止，$\lambda_1=\lambda_2=0$ 所对应的特征向量已经求解完了。由此可知，特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 所对应的特征向量有无数个，但是这无数个特征向量所组成的向量组的最大无关组中只含两个向量，也就是说，虽然特征值 0 对应着无数个特征向量，但是从中挑出 $a(a>2)$ 个特征向量，则这 a 个特征向量一定是线性无关的。

当 $\lambda_3=-2$ 时：

齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\vec{\xi}=\vec{0}$ 变为了 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\vec{\xi}=\vec{0}$，解出方程组 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\vec{\xi}=\vec{0}$ 的通解即可。用第 3 章第 3.10 所讲的方法求解，但是不要忘记通解中的任意常数不能同时为 0。

（1）将 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\vec{\xi}=\vec{0}$ 中的 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 化为矩阵的形式并求秩。

$$\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&2\\-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$r=2$

（2）判断解的类型。

由于 $r<n$，所以此齐次方程组有无穷多解。

（3）求解。

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3=0\\x_2+2x_3=0\end{cases}$$

因为 $n-r=1$，所以取 $x_2=2$（当然 x_2 也可以不取 2 而是取别的数，或者根本不取 x_2 而是取 x_3），解得 $x_1=1$，$x_3=-1$。

所以此方程组的基础解系为：$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$。

所以此方程组的通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，其中 k 是任意常数。

所以特征值−2 对应的特征向量为 $k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，其中 k 是不为零的任意常数。

到此为止，$\lambda_3=-2$ 所对应的特征向量已经求解完了。由此可知，特征值 $\lambda_3=-2$ 所对应的特征向量有无数个，但是这无数个特征向量所组成的向量组的最大无关组中只含一个向量。也就是说，虽然特征值–2 对应着无数个特征向量，但是从中挑出 $a(a>1)$ 个特征向量，这 a 个特征向量一定是线性相关的。

告诉大家一个很有用的结论：设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，$\vec{\xi_1}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_1 的无数个特征向量中的一个，$\vec{\xi_2}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_2 的无数个特征向量中的一个，则 $\vec{\xi_1}$、$\vec{\xi_2}$ 必线性无关。**这个结论可以简记为：对于至少存在两个不同特征值的任意矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来说，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个来自于不同特征值的特征向量必线性无关。**

5.3 对称矩阵、正交矩阵的复习

本节的内容纯属复习，对称矩阵的概念在第 2 章中已讲过，正交矩阵的概念则出现在第 3 章。本章要大量用到对称矩阵以及正交矩阵，因此本小节为复习内容。

对称矩阵：如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，简称对称阵。

例. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}8&5&3\\5&4&6\\3&6&7\end{pmatrix}$，问矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否为对称矩阵？

解： $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}8&5&3\\5&4&6\\3&6&7\end{pmatrix}$，由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵。

正交矩阵：如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，简称正交阵。

正交矩阵的等价定义：如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，简称正交阵。

再来复习一下正交矩阵的充分必要条件：$\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 中的任意两个行向量都是正交的且 $\boldsymbol{A}$ 中的任意一个行向量都是单位向量 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 中的任意两个列向量都是正交的，并且 $\boldsymbol{A}$ 中的任意一个列向量都是单位向量。

例. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$，问矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否为正交矩阵？

解：利用正交矩阵的充分必要条件来做。

设 $\boldsymbol{A}=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$，其中 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$。

$(\vec{a}_1,\vec{a}_2)=\frac{1}{\sqrt2}\times0+0\times1+\frac{1}{\sqrt2}\times0=0$，所以 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$ 正交。

$(\vec{a}_1,\vec{a}_3)=\frac{1}{\sqrt2}\times\left(-\frac{1}{\sqrt2}\right)+0\times0+\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}=0$，所以 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_3$ 正交。

$(\vec{a}_2,\vec{a}_3)=0\times\left(-\frac{1}{\sqrt2}\right)+1\times0+0\times\frac{1}{\sqrt2}=0$，所以 $\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$ 正交。

$\sqrt{(\vec{a}_1,\vec{a}_1)}=\sqrt{\frac12+0+\frac12}=1$，所以 $\vec{a}_1$ 为单位向量。

$\sqrt{(\vec{a}_2,\vec{a}_2)}=\sqrt{0+1+0}=1$，所以 $\vec{a}_2$ 为单位向量。

$\sqrt{(\vec{a}_3,\vec{a}_3)}=\sqrt{\frac12+0+\frac12}=1$，所以 $\vec{a}_3$ 为单位向量。

由正交矩阵的充分必要条件可知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵。

此题还可以按如下做法来做。

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\vec{b}_1\\\vec{b}_2\\\vec{b}_3\end{pmatrix}$，$\vec{b}_1=\left(\frac{1}{\sqrt2},0,-\frac{1}{\sqrt2}\right)$，$\vec{b}_2=(0,1,0)$，$\vec{b}_3=\left(\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2}\right)$。

$\left(\vec{b}_1,\vec{b}_2\right)=\frac{1}{\sqrt2}\times0+0\times1+\left(-\frac{1}{\sqrt2}\right)\times0=0$，所以 $\vec{b}_1$、$\vec{b}_2$ 正交。

$\left(\vec{b}_1,\vec{b}_3\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+0\times0+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\frac{1}{\sqrt{2}}=0$，所以$\vec{b}_1$、$\vec{b}_3$ 正交。

$\left(\vec{b}_2,\vec{b}_3\right)=0\times\frac{1}{\sqrt{2}}+1\times0+0\times\frac{1}{\sqrt{2}}=0$，所以$\vec{b}_2$、$\vec{b}_3$ 正交。

$\sqrt{\left(\vec{b}_1,\vec{b}_1\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}}=1$，所以$\vec{b}_1$ 为单位向量。

$\sqrt{\left(\vec{b}_2,\vec{b}_2\right)}=\sqrt{0+1+0}=1$，所以$\vec{b}_2$ 为单位向量。

$\sqrt{\left(\vec{b}_3,\vec{b}_3\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}}=1$，所以$\vec{b}_3$ 为单位向量。

由正交矩阵的充分必要条件可知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵。

5.4 矩阵有多少个特征值为零

5.2 节中讲述了求特征值的方法。本节将讨论一个矩阵有多少个特征值为 0。看到这里，估计有很多同学认为讲本节是多余的，认为只要用前面的第 5.2 节所讲的方法求出所有特征值，自然就知道有多少个特征值为 0 了。然而实际上，本节并不多余。

本节要给大家讲的是：通过方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})$ 来判断方阵 A 到底有多少个特征值为 0。

方阵 A 为 n 阶方阵（n 行 n 列的矩阵），设方阵 A 的秩为 r。

若 $r=n$，则方阵 A 的 n 个特征值中没有任何一个特征值为 0；

若 $r<n$，则方阵 A 的 n 个特征值中<u>至少有</u> $n-r$ 个特征值为 0。并且还是在 $r<n$ 的情况下，若方阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，则方阵 A 的 n 个特征值中<u>只有</u> $n-r$ 个特征值为 0。

例．$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\8&16&-8\end{pmatrix}$，问矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有几个特征值为 0？

解：由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 肯定有三个特征值，这在 5.2 节中讲过。

现在来看本题的问题。本题的问题是求解矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值中有几个为 0，共有两种做法：

- **第一种做法是按照本章第 5.2 节所讲的求特征值的方法，把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值都求出来，这样一来自然就知道矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有几个特征值为 0 了；**
- **第二种做法是按照本节所讲的方法，通过矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩来解此题。**

采用第二种做法时，有两点需要注意的地方。第一，由于此题给出的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 很明显不是对称矩阵，所以用本节的方法只能判断出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 至少有多少个特征值为 0，而无法判断出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 究竟有多少个特征值为 0；第二，本节所讲的方法只关注 0，而不关注其他特征值。

因此，先用本节所讲的方法判断一下矩阵 $\boldsymbol{A}$ 至少有多少个特征值为 0，然后再真正地去求这三个特征值。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\8&16&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(\boldsymbol{A})=1, n-r(\boldsymbol{A})=2$。由本节所讲内容可知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值中至少有两个是 0。现在来真正求一下矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，看看是不是这么回事。

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\8&16&-8\end{pmatrix}$$

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}1-\lambda&2&-1\\2&4-\lambda&-2\\8&16&-8-\lambda\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-1\\2&4-\lambda&-2\\8&16&-8-\lambda\end{vmatrix}$$

令 $|A-\lambda E|=0$，即 $\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-1\\2&4-\lambda&-2\\8&16&-8-\lambda\end{vmatrix}=0$

根据第一章讲的行列式的计算方法，得：

$\lambda^2(\lambda+3)=0$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=-3$。

由此可见，符合“至少有两个特征值是 0”，这也验证了本节所讲结论的正确性。

5.5 相似矩阵

这一节给大家介绍相似矩阵。**设 A 是 n 阶矩阵，B 也为 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，则称矩阵 A 相似于矩阵 B，记为 $A\sim B$。**

相似矩阵的定义很简单，但有一个隐含的知识点需要大家注意。相似矩阵的定义式中的矩阵 P 是可逆矩阵，矩阵 P^{-1} 当然也是可逆矩阵。之前已经讲过，可逆矩阵可以写为若干初等矩阵乘积的形式，而一个矩阵左/右乘初等矩阵相当于给该矩阵进行相应的初等行/列变换，又因为初等变换是不改变矩阵的秩的，所以“矩阵 A 相似于矩阵 B”可以推出“A、B 两个矩阵等秩”。**即若 $P^{-1}AP=B$，则 $r(A)=r(B)$。**

最后，归纳相似矩阵的性质如下：

（1）$A\sim A$，反身性；

（2）若 $A\sim B$，则 $B\sim A$，对称性；

（3）若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$，传递性。

5.6 对角化

对角矩阵已在第 1 章讲过了。对角矩阵与本节所要讲的新知识点有着密切的联系，因此先复习一下对角矩阵。

对角矩阵首先得是方阵。也就是说，如果一个矩阵连方阵都不是（行数不等于列数），那它绝对不可能是对角矩阵。接下来，**对角矩阵不仅是方阵，而且还是特殊的方阵，其特殊性体现在：除了对角线（矩阵中从左上到右下的斜线）以外的所有数都为 0（对角线上的数有没有 0 无所谓）。**

千万别把对角矩阵和对称矩阵弄混了，这是完全不同的两个概念。对角矩阵一般用符号“Λ”表示，所以以后看见“Λ”，应明白这指的是对角矩阵。

现在讲解本节的新知识点。在 5.5 节中，我们了解到，若 $P^{-1}AP=B$，则称矩阵 A 相似于矩阵 B。**若 $P^{-1}AP=B$ 中的 B 是对角矩阵 Λ，则称矩阵 A 相似于对角矩阵 Λ，也称矩阵 A 可以对角化。换言之，若 $P^{-1}AP=\Lambda$，则称矩阵 A 相似于对角矩阵 Λ，也称矩阵 A 可以对角化。**

5.7 合同矩阵

本节要介绍的知识点是合同矩阵。设 A、B 是两个 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 P，使得 $P^{\mathrm{T}}AP=B$，则称 A 合同于 B，记为 $A\cong B$。

合同矩阵的定义式与相似矩阵的定义式类似，所以请大家务必要区分清楚，千万别记混了。**相似矩阵的定义式是 $P^{-1}AP=B$，而合同矩阵的定义式是 $P^{\mathrm{T}}AP=B$；两个矩阵相似记为 $A\sim B$，而两个矩阵合同记为 $A\cong B$。**

刚才强调的是相似矩阵和合同矩阵的区别，现在说一下相似矩阵和合同矩阵的相同点。相似矩阵和合同矩阵的相同点有两个。

- 矩阵 A 相似于矩阵 B 可以推出两个矩阵等秩，矩阵 A 合同于矩阵 B 也可以推出两个矩阵等秩。
- 合同与相似一样，也具有反身性、对称性、传递性。即 $A\cong A$（反身性）；若 $A\cong B$，则 $B\cong A$（对称性）；若 $A\cong B$，$B\cong C$，则 $A\cong C$（传递性）。

5.8　证明两个矩阵有相同的特征值

方法 1. 把矩阵 A 和矩阵 B 的特征值都求出来（用于矩阵 A、矩阵 B 都显化给出的题）。

方法 2. 若能证明 $|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$，则矩阵 A 和矩阵 B 有相同的特征值。

考研题 5.2　证明方阵 A 和 A^{T} 有相同的特征值。

解：由于 A 和 A^{T} 没有显化地给出，所以采用方法 2 来做。

$|A-\lambda E|=|(A-\lambda E)^{\mathrm{T}}|=|A^{\mathrm{T}}-(\lambda E)^{\mathrm{T}}|=|A^{\mathrm{T}}-\lambda E^{\mathrm{T}}|=|A^{\mathrm{T}}-\lambda E|$

由方法 2 可知，A 和 A^{T} 有相同的特征值。此题是利用方法 2 来证明的，而此题的结论又可以当成是证明两个矩阵有相同的特征值的一种方法——这就是下面的方法 3。

方法 3. 方阵 A 和 A^{T} 有相同的特征值。

考研题 5.3　若 $A\sim B$，证明：A、B 有相同的特征值。

解：$A\sim B$ 的意思是矩阵 A 相似于矩阵 B（这在之前讲过），本题采用上述三种方法中的方法 2 来做。

只要证明 $|B-\lambda E|$ 与 $|A-\lambda E|$ 相等即可。

$|B-\lambda E|$

$=|P^{-1}AP-\lambda E|$（因为 A、B 是相似矩阵）

$=|P^{-1}AP-\lambda P^{-1}P|$（因为 $P^{-1}P=E$）

$=|P^{-1}(A-\lambda E)P|$（因为矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律）

$=|P^{-1}|\times|A-\lambda E|\times|P|$（因为当 A、B、C 为同阶方阵时，$|ABC|=|A||B||C|$）

$=|A-\lambda E|$（因为 $=|P^{-1}|\times|P|=1$，这在第 1 章就讲过）

所以 A、B 有相同的特征值。与考研题 5.2 一样，此题的结论可以当成是证明两个矩阵有相同特征值的一种方法——这就是下面的方法 4。

方法 4. 若 $A\sim B$，则 A、B 有相同的特征值。

考研题 5.4　设 A、B 均为 n 阶矩阵，且这两个矩阵还都是对称矩阵，证明 AB 和 BA 有相同的特征值。

解法 1：利用上述四种方法中的方法 3，证明 $(AB)^{\mathrm{T}}=BA$ 即可。

$(AB)^{\mathrm{T}}$

$=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$（这是第 2 章的公式）

$=BA$（因为 A、B 为对称矩阵，所以有 $B^{\mathrm{T}}=B,A^{\mathrm{T}}=A$）

解法 2：利用上述四种方法中的方法 2，证明 $|\lambda E-AB|=|\lambda E-BA|$ 即可。

$|\lambda E-AB|$

$=|(\lambda E-AB)^{\mathrm{T}}|$（一个行列式的转置等于它本身）

$=|(\lambda E)^{\mathrm{T}}-(AB)^{\mathrm{T}}|$（因为 $(A\pm B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\pm B^{\mathrm{T}}$）

$=|\lambda E^{\mathrm{T}}-B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}|$（因为 $(\lambda E)^{\mathrm{T}}=\lambda E^{\mathrm{T}},(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$）

$=|\lambda E-B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}|$（因为 $E^{\mathrm{T}}=E$）

$=|\lambda E-BA|$（因为 A、B 为对称矩阵，所以有 $B^{\mathrm{T}}=B,A^{\mathrm{T}}=A$）

考研题 5.5　设 A、B 均为 n 阶矩阵，A 为可逆矩阵，证明 AB 和 BA 有相同的特征值。

解：此题利用上述四种方法中的方法 4，证明 $AB\sim BA$ 即可。证明 AB 和 BA 相似，也就是证明存在矩阵 P，使得 $P^{-1}(AB)P=BA$。

由于 A 为可逆矩阵，所以 A^{-1} 存在。

$A^{-1}(AB)A$

$=(A^{-1}A)BA$（矩阵乘法具有结合律，可以随便加括号）

$=BA$（$A^{-1}A=E$，而 E 乘以任何矩阵都等于该矩阵本身）

所以 $AB\sim BA$，所以 AB 和 BA 有相同的特征值。

5.9 几个需要记住的结论

5.9.1 结论 1

一个矩阵的所有特征值之和等于该矩阵对角线上的所有数字之和。

例. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，求该矩阵的所有特征值之和。

解：该矩阵是一个三阶矩阵，所以该矩阵一共有 3 个特征值。记该矩阵的 3 个特征值为 λ_1，λ_2，λ_3，根据结论 1，$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+5+9=15$。

一定要注意，结论 1 说的是“之和”等于“之和”，也就是说，仅仅是“之和”相等。以本题为例，并不是说矩阵 A 的 3 个特征值就是对角线上的 3 个数 1、5、9，而是矩阵 A 的 3 个特征值之和等于对角线上的 3 个数之和。

例. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\8&16&-8\end{pmatrix}$，求该矩阵的特征值。

解： $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\8&16&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$r(A)=1, n-r(A)=3-1=2$

由 5.4 节所介绍的内容可知，矩阵 A 的 3 个特征值中至少有两个特征值是 0。记为 $\lambda_1=\lambda_2=0$，λ_3 未知。根据结论 1，$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+4+(-8)=-3$，解得 $\lambda_3=-3$。容易看出，这比用常规的方法去解特征值要容易得多。

5.9.2 结论 2

一个矩阵的所有特征值之积等于该矩阵所对应的行列式的值。

例. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\8&16&-8\end{pmatrix}$，求该矩阵 A 的所有特征值之积。

解： $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\8&16&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$r(A)=1, n-r(A)=3-1=2$

由于矩阵 A 不满秩，所以根据 2.4 节的大总结，$|A|=0$。我们将矩阵 A 的 3 个特征值记为 λ_1、λ_2、λ_3。根据结论 2，有 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$。

5.9.3 结论 3

对角矩阵、上三角矩阵、下三角矩阵的特征值就是对角线上的元素。

例. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&5&0\\3&0&2\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}3&0&2\\0&2&9\\0&0&7\end{pmatrix}$ 的特征值。

解：由于 A 是对角矩阵，所以 A 的 3 个特征值 $\lambda_1=3$、$\lambda_2=4$、$\lambda_3=0$。

由于 B 是下三角矩阵，所以 B 的 3 个特征值 $\lambda_1=1$、$\lambda_2=5$、$\lambda_3=2$。

由于 C 是上三角矩阵，所以 C 的 3 个特征值 $\lambda_1=3$、$\lambda_2=2$、$\lambda_3=7$。

5.9.4　结论 4

如果一个 n 阶矩阵的每行元素之和都相等的话（记每行元素之和为数 a），则 a 就是该矩阵的 n 个特征值中的一个特征值，且特征值 a 所对应的特征向量为 $k\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{n\times 1}$，其中 k 是不为零的任意常数。

例. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&b&b&b\\b&1&b&b\\b&b&1&b\\b&b&b&1\end{pmatrix}$，根据结论 4，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值以及对应的特征向量。

解： 本题所给的矩阵的每行元素之和都相等，都是 $3b+1$。根据结论 4，$3b+1$ 即为该矩阵的 4 个特征值中的一个，且特征值 $3b+1$ 对应的特征向量为 $k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 是不为零的任意常数 。

5.10　与特征向量有关的证明题通常会用到反证法

考研题 5.6 设 λ_1、λ_2 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个**不同的**特征值，$\vec{\xi}$ 是特征值 λ_1 所对应的特征向量。证明：$\vec{\xi}$ 不是特征值 λ_2 所对应的特征向量（即一个特征向量不能对应两个不同的特征值）。

解： 本题利用反证法来证明。

由题意可知：$\boldsymbol{A}\vec{\xi}=\lambda_1\vec{\xi}$。

利用反证法，假设 $\vec{\xi}$ 也是 λ_2 所对应的特征向量，则有 $\boldsymbol{A}\vec{\xi}=\lambda_2\vec{\xi}$。

所以有 $\lambda_1\vec{\xi}=\lambda_2\vec{\xi}$，变形得 $(\lambda_1-\lambda_2)\vec{\xi}=\vec{0}$。由于定义中规定特征向量不能是零向量，即 $\vec{\xi}\neq\vec{0}$，所以只能是 $\lambda_1-\lambda_2=0$，这与已知 λ_1、λ_2 是两个不同的特征值相矛盾，所以假设不成立，$\vec{\xi}$ 不是 λ_2 所对应的特征向量。

考研题 5.7 设 $\vec{\xi}_1$、$\vec{\xi}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分别对应于不同特征值 λ_1、λ_2 的特征向量。证明：$\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。

解： 本题和上题一样，利用反证法来证明。

假设 $\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，其对应的特征值是 μ。则有：

$\boldsymbol{A}(\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2)=\mu(\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2)$　　（1）式

由于 $\vec{\xi}_1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_1 的特征向量，所以有：

$\boldsymbol{A}\vec{\xi}_1=\lambda_1\vec{\xi}_1$　　（2）式

由于 $\vec{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_2 的特征向量，所以有：

$\boldsymbol{A}\vec{\xi}_2=\lambda_2\vec{\xi}_2$　　（3）式

将（1）式的左侧用分配律展开，有：

$\boldsymbol{A}\left(\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2\right)=\boldsymbol{A}\vec{\xi}_1+\boldsymbol{A}\vec{\xi}_2$　　（4）式

用（1）式的右侧替换（4）式的左侧，有：

$\mu\left(\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2\right)=\boldsymbol{A}\vec{\xi}_1+\boldsymbol{A}\vec{\xi}_2$　　（5）式

用（2）式、（3）式的右侧替换（5）式的右侧，有：

$\mu\left(\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2\right)=\lambda_1\vec{\xi}_1+\lambda_2\vec{\xi}_2$　　（6）式

将（6）式的左侧展开得：

$\mu\left(\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2\right)=\mu\vec{\xi}_1+\mu\vec{\xi}_2$ （7）式

将（6）式的右侧替换成（7）式的左侧，有：

$\lambda_1\vec{\xi}_1+\lambda_2\vec{\xi}_2=\mu\vec{\xi}_1+\mu\vec{\xi}_2$ （8）式

将（8）式整理得：

$(\lambda_1-\mu)\vec{\xi}_1+(\lambda_2-\mu)\vec{\xi}_2=\vec{0}$ （9）式

由 5.2 节可知，不同特征值所对应的特征向量线性无关。而 $\vec{\xi}_1$、$\vec{\xi}_2$ 正好是两个不同的特征值 λ_1、λ_2 所对应的特征向量，所以 $\vec{\xi}_1$、$\vec{\xi}_2$ 线性无关。由线性无关的定义再结合（9）式可得：

$\lambda_1-\mu=0$，解得 $\lambda_1=\mu$。

$\lambda_2-\mu=0$，解得 $\lambda_2=\mu$。

所以 $\lambda_1=\lambda_2$，这与已知"λ_1、λ_2 是不同的特征值"相矛盾，所以假设不成立，$\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。

5.11 由 *A* 的特征值、特征向量推 *A* 的多项式的特征值、特征向量

设 λ_1 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，$\vec{\xi}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_1 的特征向量（矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_1 的特征向量有无数个，$\vec{\xi}_1$ 只是其中一个），$f(\boldsymbol{A})$ 是关于 $\boldsymbol{A}$ 的一个多项式（比如 $f(\boldsymbol{A})=5\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}$），则有如下结论成立：$f(\lambda_1)$ 是矩阵 $f(\boldsymbol{A})$ 的一个特征值；$\vec{\xi}_1$ 是矩阵 $f(\boldsymbol{A})$ 对应于特征值 $f(\lambda_1)$ 的特征向量。

上述可能比较抽象，这里用比较通俗的话解释一遍。上述介绍了两件事，一件是关于特征值的，另一件是关于特征向量的。**若 λ_1 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则把 λ_1 代到含 $\boldsymbol{A}$ 的多项式中去替换 $\boldsymbol{A}$，得到的数 $f(\lambda_1)$ 就是矩阵 $f(\boldsymbol{A})$ 的一个特征值；若某向量是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_1 的特征向量，则该向量一定也是矩阵 $f(\boldsymbol{A})$ 对应于特征值 $f(\lambda_1)$ 的特征向量。**

考研题 5.8 三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值-1、1、2。$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{A}^2$，则 $|\boldsymbol{B}|=$______

解：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有 3 个，$\lambda_1=-1$、$\lambda_2=1$、$\lambda_3=2$。本题要求的是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 所对应的行列式的值，$\boldsymbol{B}$ 是一个关于 $\boldsymbol{A}$ 的多项式，所以 $\boldsymbol{B}$ 也是三阶矩阵。也就是说，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 也是有 3 个特征值，记矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 3 个特征值为 $\bar{\lambda}_1$、$\bar{\lambda}_2$、$\bar{\lambda}_3$。由 5.9 节的结论 2 可知，$|\boldsymbol{B}|=\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3$，所以这里只要把矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 3 个特征值 $\bar{\lambda}_1$、$\bar{\lambda}_2$、$\bar{\lambda}_3$ 都求出来即可。

根据刚刚介绍的知识点：

$\bar{\lambda}_1=-1-3\times(-1)^2=-4$

$\bar{\lambda}_2=1-3\times1^2=-2$

$\bar{\lambda}_3=2-3\times2^2=-10$

$|\boldsymbol{B}|=\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3=-4\times(-2)\times(-10)=-80$

考研题 5.9 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，有特征值 1、−1、2，则下列哪个矩阵是可逆矩阵？

（A）$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ （B）$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ （C）$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ （D）$2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$

解：根据 2.4 节的大总结，本题的问题可以转化为：$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$、$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$、$|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$、$|2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$ 这 4 个行列式哪个不为零。所以只需要求出这 4 个行列式的值就可以了。这四个行列式的求法和考研题 5.8 是一样的。具体来说，就是利用特征值来计算。

（A）选项：设矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值为 λ_1、λ_2、λ_3。

$\lambda_1=1-1=0$、$\lambda_2=1-(-1)=2$、$\lambda_3=1-2=-1$

$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0\times2\times(-1)=0$

（B）选项：设矩阵 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值为 λ_1、λ_2、λ_3。

$\lambda_1=1+1=2$、$\lambda_2=1+(-1)=0$、$\lambda_3=1+2=3$

$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=2\times0\times3=0$

（C）选项：设矩阵 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值为 λ_1、λ_2、λ_3。

$\lambda_1=2-1=1$、$\lambda_2=2-(-1)=3$、$\lambda_3=2-2=0$

$|2E-A|=1\times3\times0=0$

（D）选项：设矩阵 $2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值为 λ_1、λ_2、λ_3。

$\lambda_1 = 2+1 = 3$、$\lambda_2 = 2+(-1) = 1$、$\lambda_3 = 2+2 = 4$

$|2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}| = 3\times1\times4 = 12 \neq 0$

答案：（D）

考研题 5.10　设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，$\lambda_1=1$、$\lambda_2=2$、$\lambda_3=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，对应的特征向量分别是 $\vec{\xi}_1=(2,2,-1)^{\mathrm{T}}$、$\vec{\xi}_2=(-1,2,2)^{\mathrm{T}}$、$\vec{\xi}_3=(2,-1,2)^{\mathrm{T}}$，又 $\vec{b}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，计算：（1）$\boldsymbol{A}^n\vec{\xi}_1$、（2）$\boldsymbol{A}^n\vec{b}$。

解：（1）由于 λ_1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\vec{\xi}_1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ_1 的特征向量，由本节所讲的知识点可知，矩阵 $\boldsymbol{A}^n$ 有特征值 $\lambda_1{}^n$，且 $\vec{\xi}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^n$ 对应于特征值 $\lambda_1{}^n$ 的无数个特征向量中的一个。根据特征值、特征向量的定义式有：

$\boldsymbol{A}^n\vec{\xi}_1 = \lambda_1{}^n\vec{\xi}_1 = \vec{\xi}_1$（因为 $\lambda_1 = 1^n = 1$）

$$=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

（2）令 $\vec{b}=x_1\vec{\xi}_1+x_2\vec{\xi}_2+x_3\vec{\xi}_3$。解此齐次方程组，发现此方程组有唯一解 $x_1=\dfrac{1}{3}, x_2=1, x_3=\dfrac{2}{3}$。所以 $\vec{b}=\dfrac{1}{3}\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2+\dfrac{2}{3}\vec{\xi}_3$。

所以 $\boldsymbol{A}^n\vec{b}=\boldsymbol{A}^n\left(\dfrac{1}{3}\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2+\dfrac{2}{3}\vec{\xi}_3\right)$

$$=\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^n\vec{\xi}_1+\boldsymbol{A}^n\vec{\xi}_2+\frac{2}{3}\boldsymbol{A}^n\vec{\xi}_3$$

$$=\frac{1}{3}\lambda_1{}^n\vec{\xi}_1+\lambda_2{}^n\vec{\xi}_2+\frac{2}{3}\lambda_3{}^n\vec{\xi}_3$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}+2^n\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}+2\times3^{n-1}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{3}-2^n+2^2\times3^{n-1}\\ \dfrac{2}{3}+2^{n+1}-2\times3^{n-1}\\ -\dfrac{1}{3}+2^{n+1}+2^2\times3^{n-1}\end{pmatrix}$$

考研题 5.11　$\boldsymbol{A}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\vec{0}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的取值范围是______

解：令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ（λ 代表矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值中的任意一个），则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda^2-2\lambda+1$，已知，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为零矩阵，零矩阵的所有特征值都为零，（这一点大家一定要牢记）。所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的所有特征值都为 0，即 $\lambda^2-2\lambda+1=0$，解得 $\lambda=1$。

5.12　怎样的方阵可以对角化

5.6 节中，给大家介绍了对角化的概念。若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，也称方阵 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化。但并不是任意的一个方阵 $\boldsymbol{A}$，都一定可以对角化。**本节要研究的是“什么样的方阵可以对角化”，而 5.13 节要研究的是“若方阵可以对角化，那么 $\boldsymbol{P}$ 以及 $\boldsymbol{\Lambda}$ 该怎么求。”**

判断 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 是否可以对角化的步骤如下：

第 1 步：看 $\boldsymbol{A}$ 是否有 n 个互不相同的特征值。若有 n 个互不相同的特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化；否则，进行下一步。

第 2 步：只关注 $\boldsymbol{A}$ 的 r（r>1）重根特征值。若其所对应的特征向量的最大无关组中含有 r 个向量，则 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化；否则，$\boldsymbol{A}$ 不能对角化。

例. 本章的考研题 5.1 中所给的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可以对角化？

解：本章的考研题 5.1 中所给的矩阵是一个三阶矩阵（三行三列的矩阵），所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个特征值。现在利用刚刚讲的方法来判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可以对角化。

首先，进行第 1 步，判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值是否互不相同。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$、$\lambda_3=-2$。由此可知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值并非互不相同（有两个特征值相同，都是 0），所以此时无法判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可以对角化，需要进行第 2 步。

第 2 步只需要关注 r（$r>1$）重根特征值所对应的特征向量的最大无关组中所含的向量的个数是否为 r 就可以，不需要关注一重根（单根）特征值。本题中，0 是二重根特征值，−2 是一重根（单根）特征值，所以我们只需要关注二重根特征值（即 0）所对应的特征向量的最大无关组中所含的向量的个数是否为 2 就可以了。特征值 0 所对应的所有特征向量为：

$k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，其中 k_1、k_2 是不同时为零的任意常数。

由此可知，特征值 0 所对应的这无数个特征向量所组成的向量组的最大无关组中含两个向量，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化。

例. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，它的 3 个特征值分别为 $\lambda_1=1$、$\lambda_2=-2$、$\lambda_3=4$。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可以对角化？

解： 本题所给的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个特征值。

这里用刚刚讲的方法来判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可以对角化。

先进行第 1 步，判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值是否互不相同。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值为 $\lambda_1=1$、$\lambda_2=-2$、$\lambda_3=4$。由此可知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值是互不相同的。所以不需要再进行第 2 步，可以断定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定可以对角化。

$\boxed{\text{考研题 5.12}}$ 下列矩阵中能相似于对角矩阵的是：

（A）$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

解： 仔细观察一下这 4 个选项所给的矩阵，很容易发现这 4 个矩阵都是上三角矩阵（对角线下方都是 0）。

由 5.9 节的结论 3（对角矩阵、上三角矩阵、下三角矩阵这三种特殊矩阵的特征值就是对角线上的元素）可知，这 4 个矩阵具有相同的特征值，即（A）、（B）、（C）、（D）选项中所给的矩阵的特征值都为 $\lambda_1=\lambda_2=1$、$\lambda_3=2$。

本题问的是“下列矩阵中能相似于对角矩阵的是”。“相似于对角矩阵”与“对角化”是一个意思，所以本题的问题可以改为“下列矩阵中能对角化的是”。所以这里要按照之前讲的判断某矩阵是否可以对角化的两个步骤来做。

（A）选项

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

第 1 步： 由于该矩阵的 3 个特征值并非互不相同（$\lambda_1=\lambda_2=1$、$\lambda_3=2$），所以进行第 2 步，只关注特征值 1。

第 2 步： 不需要把 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 所对应的特征向量求出来（也可以那样做），只需要计算出 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$，然后用 $3-r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 即可。$3-r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 就是特征值 1 所对应的特征向量的最大无关组中所含向量的个数。这是为什么呢？现在来解释一下。

大家知道，求特征值 1 所对应的特征向量的方法就是解齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\vec{\xi}=\vec{0}$，这个齐次方程组的基础解系中含几个向量，特征值 1 所对应的特征向量的最大无关组中就含几个向量。而在 3.10 节中介绍过，齐次方程组 $\boldsymbol{A}\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系中含的向量个数是 $n-r(\boldsymbol{A})$，那么齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\vec{\xi}=\vec{0}$ 的基础解系中含的向量个数就是 $n-r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$。（B）、（C）、（D）选项也是一样的。

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$r\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)=2$，$3-r\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)=3-2=1$

由此可知，$\lambda_1=\lambda_2=1$所对应的特征向量的最大无关组中含 1 个向量，而特征值 1 是二重根特征值，$1\neq 2$，所以（A）选项所给的矩阵不能对角化。

（B）选项

$$B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

第 1 步：由于该矩阵的 3 个特征值并非互不相同（$\lambda_1=\lambda_2=1$、$\lambda_3=2$），所以进行第 2 步，只关注特征值 1。

第 2 步：计算$3-r\left(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\right)$。

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$r\left(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\right)=2$，$3-r\left(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\right)=3-2=1$

由此可知，$\lambda_1=\lambda_2=1$所对应的特征向量的最大无关组中含 1 个向量，而特征值 1 是二重根特征值，$1\neq 2$，所以（B）选项所给的矩阵不能对角化。

（C）选项

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

第 1 步：由于该矩阵的 3 个特征值并非互不相同（$\lambda_1=\lambda_2=1$、$\lambda_3=2$），所以进行第 2 步，只关注特征值 1。

第二步：计算$3-r\left(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}\right)$。

$$\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&2&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$r\left(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}\right)=1$，$3-r\left(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}\right)=3-1=2$

由此可知，$\lambda_1=\lambda_2=1$所对应的特征向量的最大无关组中含两个向量，而特征值 1 也是二重根特征值，$2=2$，所以（C）选项所给的矩阵可以对角化。

（D）选项

$$D=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

第 1 步：由于该矩阵的 3 个特征值并非互不相同（$\lambda_1=\lambda_2=1$、$\lambda_3=2$），所以进行第 2 步，只关注特征值 1。

第二步：计算$3-r\left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{E}\right)$。

$$\boldsymbol{D}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{E})=2$，$3-r(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{E})=3-2=1$

由此可知，$\lambda_1=\lambda_2=1$所对应的特征向量的最大无关组中含 1 个向量，而特征值 1 是二重根特征值，$1\neq 2$，所以（D）选项所给的矩阵不能对角化。

答案：（C）。

5.13 若方阵可以对角化，$\boldsymbol{\Lambda}$和$\boldsymbol{P}$怎么求

本节要研究的问题是建立在 5.12 节研究的问题的基础上的。具体来说，5.12 节研究的问题是“什么样的方阵可以对角化”，而本节要研究的问题是“若方阵可以对角化（即存在对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$，存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$），$\boldsymbol{\Lambda}$和$\boldsymbol{P}$到底应该如何去求”。

先来说一下对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$应该如何去求。对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$除对角线以外的数都是 0，所以讨论“对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$应该如何去求”实际上就是讨论“对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$对角线上的数是多少”。现在告诉大家：**$\boldsymbol{\Lambda}$的对角线上的n个数就是方阵$\boldsymbol{A}$的n个特征值（无论这n个特征值中有没有相同的特征值）**。另外，强调一点：**方阵$\boldsymbol{A}$的n个特征值在对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$的对角线上的位置是可以随便换的，因此对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$并不是唯一的。**

例. 三阶矩阵$\boldsymbol{A}$有 3 个不同的特征值$\lambda_1=1$、$\lambda_2=2$、$\lambda_3=4$。

（1）$\boldsymbol{A}$可以对角化吗（$\boldsymbol{A}$可以相似于对角矩阵吗）？

（2）若可以，请写出对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$。

解：

（1）由于$\boldsymbol{A}$的 3 个特征值互不相同，根据上节所介绍的知识，方阵$\boldsymbol{A}$可以对角化。

（2）根据刚刚介绍的知识，对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$可以是如下矩阵。

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}、\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}、\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}、\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}、\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例. $\boldsymbol{A}$为三阶矩阵，$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$，特征值 2 所对应的无数个特征向量中可以找出两个线性无关的特征向量。

（1）$\boldsymbol{A}$可以对角化吗（$\boldsymbol{A}$可以相似于对角矩阵吗）？

（2）若可以，请写出对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$。

解：

（1）特征值 2 所对应的特征向量中可以找出两个线性无关的特征向量，这说明特征值 2 所对应的特征向量的最大无关组中包含向量的个数是大于等于 2 的。又因为特征值 2 是二重根特征值，r重根特征值所对应的特征向量的最大无关组中包含向量的个数不可能大于r。所以，本题特征值 2 所对应的特征向量的最大无关组中必包含两个向量。

因为 2=2，所以A可以对角化。

（2）根据刚刚介绍的知识，对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$可以是如下矩阵。

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}、\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}、\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

接下来介绍可逆矩阵P应该如何去求。首先，先和大家介绍一个重要的知识点：由于$\boldsymbol{\Lambda}$不唯一，而$\boldsymbol{P}$与$\boldsymbol{\Lambda}$是相关的，所以$\boldsymbol{P}$也不唯一。

$\boldsymbol{P}$的求法：矩阵$\boldsymbol{P}$的第i列是$\boldsymbol{\Lambda}$中处于a_{ii}位置的特征值所对应的特征向量。

例. $\boldsymbol{A}$为三阶矩阵，它有 3 个不同的特征值$\lambda_1=-2$、$\lambda_2=8$、$\lambda_3=9$。λ_1所对应的特征向量是$k\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$ $(k\neq 0)$，λ_2所对应的特征向量是$k\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}$ $(k\neq 0)$，λ_3所对应的特征向量是$k\begin{pmatrix}1\\2\\8\end{pmatrix}$ $(k\neq 0)$。

（1）$\boldsymbol{A}$可以对角化吗？

（2）若可以，请求出 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$。

解：

（1）由于 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值互不相同，根据 5.12 节所讲的知识，$\boldsymbol{A}$ 可以对角化。

（2）这里已经知道矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化，也就是说，存在 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$。现在要把 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 求出来。

① 当 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&8&0\\0&0&9\end{pmatrix}$ 时，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&5&2\\5&8&8\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}2&2&1\\4&5&2\\10&8&8\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}1&4&3\\2&10&6\\5&16&24\end{pmatrix}$ 等。$\boldsymbol{P}$ 有多种情况，但无论哪一种情况，$\boldsymbol{P}$ 的第 1 列一定是特征值−2 所对应的特征向量，$\boldsymbol{P}$ 的第 2 列一定是特征值 8 所对应的特征向量，$\boldsymbol{P}$ 的第 3 列一定是特征值 9 所对应的特征向量。

② 当 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&9&0\\0&0&8\end{pmatrix}$ 时，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&5\\5&8&8\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}2&4&4\\4&8&10\\10&32&16\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}1&1&8\\2&2&20\\5&8&32\end{pmatrix}$ 等。$\boldsymbol{P}$ 有多种情况。但无论哪一种情况，$\boldsymbol{P}$ 的第 1 列一定是特征值−2 所对应的特征向量，$\boldsymbol{P}$ 的第 2 列一定是特征值 9 所对应的特征向量，$\boldsymbol{P}$ 的第 3 列一定是特征值 8 所对应的特征向量。

③ 当 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&-2&0\\0&0&8\end{pmatrix}$ 时，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&5\\8&5&8\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}2&1&2\\4&2&5\\16&5&8\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}2&2&4\\4&4&10\\16&10&16\end{pmatrix}$ 等。$\boldsymbol{P}$ 有多种情况。但无论哪一种情况，$\boldsymbol{P}$ 的第 1 列一定是特征值 9 所对应的特征向量，$\boldsymbol{P}$ 的第 2 列一定是特征值−2 所对应的特征向量，$\boldsymbol{P}$ 的第 3 列一定是特征值 8 所对应的特征向量。

④ 当 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&8&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 时，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&5&2\\8&8&5\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}2&4&1\\4&10&2\\16&16&5\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}1&4&1\\2&10&2\\8&16&5\end{pmatrix}$ 等。$\boldsymbol{P}$ 有多种情况，但无论哪一种情况，$\boldsymbol{P}$ 的第 1 列一定是特征值 9 所对应的特征向量，$\boldsymbol{P}$ 的第 2 列一定是特征值 8 所对应的特征向量，$\boldsymbol{P}$ 的第 3 列一定是特征值-2 所对应的特征向量。

⑤ 当 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&9&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 时，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}2&1&1\\5&2&2\\8&8&5\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}4&1&1\\10&2&2\\16&8&5\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}4&2&1\\10&4&2\\16&16&5\end{pmatrix}$ 等。$\boldsymbol{P}$ 有多种情况，但无论哪一种情况，$\boldsymbol{P}$ 的第 1 列一定是特征值 8 所对应的特征向量，$\boldsymbol{P}$ 的第 2 列一定是特征值 9 所对应的特征向量，$\boldsymbol{P}$ 的第 3 列一定是特征值−2 所对应的特征向量。

⑥ 当 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&-2&0\\0&0&9\end{pmatrix}$ 时，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}2&1&1\\5&2&2\\8&5&8\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}4&1&1\\10&2&2\\16&5&8\end{pmatrix}$、$P_3=\begin{pmatrix}2&1&2\\5&2&4\\8&5&16\end{pmatrix}$ 等。$\boldsymbol{P}$ 有多种情况，但无论哪一种情况，$\boldsymbol{P}$ 的第 1 列一定是特征值 8 所对应的特征向量，$\boldsymbol{P}$ 的第 2 列一定是特征值−2 所对应的特征向量，$\boldsymbol{P}$ 的第 3 列一定是特征值 9 所对应的特征向量。

可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的求法还没完全介绍完，还有一种情况没介绍。若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 r（r>1）重根特征值，记此 r 重根特征值为 λ。根据之前介绍的内容，我们可以知道对角矩阵的对角线上有 r 个 λ，那么 $\boldsymbol{P}$ 中自然也有 r 列都是特征值 λ 所对应的特征向量。这里要告诉大家的是：这 r 列必须是线性无关的。

例. 三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=-2$。特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 所对应的特征向量为：$k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，其中 k_1、k_2 不同时为 0。特征值 $\lambda_3=-2$ 所对应的特征向量为：$k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ $(k\neq 0)$。

（1）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化吗？

（2）若可以，请求出 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$。

解：

（1）$\boldsymbol{A}$ 有二重根特征值 0，特征值 0 所对应的特征向量为：$k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，由此可知特征值 0 所对应的特征向量的最大无关组中含两个向量。2=2，根据上节所介绍的知识，$\boldsymbol{A}$ 可以对角化。

（2）① 当 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 时，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&1&4\\1&0&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&2&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$ 等。$\boldsymbol{P}$ 有多种情况，但无论哪一种情况，$\boldsymbol{P}$ 的第 1 列和第 2 列一定是特征值 0 所对应的特征向量，且这两列是线性无关的，$\boldsymbol{P}$ 的第 2 列一定是特征值−2 所对应的特征向量。下面分别对上述 3 个 $\boldsymbol{P}$ 进行解释。

对 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$ 的解释：$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 是 $k_1=1$、$k_2=0$ 时的情况，$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ 是 $k_1=0$、$k_2=1$ 时的情况，所以这两列都是特征值 0 所对应的特征向量。又因为这两个列向量不成比例，之前给大家总结过，两个不成比例的向量是线性无关的，所以 $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ 是线性无关的。综上所述，$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ 既是特征值 0 所对应的特征向量，又是线性无关的，因此可以作为矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的第 1 列和第 2 列。而 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 是 $k=1$ 时的情况，所以 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 是特征值−2 所对应的特征向量，因此可以作为矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的第 3 列。

对 $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&1&4\\1&0&-2\end{pmatrix}$ 的解释：第 1 列、第 2 列与刚才的 $\boldsymbol{P}_1$ 的第 1 列、第 2 列一样，这里不再解释。而 $\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ 是 $k=2$ 时的情况，所以 $\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ 是特征值−2 所对应的特征向量，因此可以作为矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的第 3 列。

对 $\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&2&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$ 的解释：$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 是 $k_1=1$、$k_2=0$ 时的情况，$\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ 是 $k_1=0$，$k_2=2$ 时的情况，所以这两列都是特征值 0 所对应的特征向量。又因为这两个列向量不成比例，所以 $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ 是线性无关的。综上所述，$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ 既是特征值 0 所对应的特征向量，又是线性无关的，因此可以作为矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的第 1 列和第 2 列。而 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 是 $k=1$ 时的情况，所以 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 是特征值−2 所对应的特征向量，因此可以作为矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的第 3 列。

下面举一个 $\boldsymbol{P}$ 的反例，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ 是 $k_1=0$、$k_2=1$ 时的情况，$\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ 是 $k_1=0$、$k_2=2$ 时的情况，所以这两列都是特征值 0 所对应的特征向量。但是，这两个向量成比例，$2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$。由 3.9 节可知，若一个向量组中包含有成比例的向量，则该向量组线性相关。所以向量组 $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ 是线性相关的。综上所述，$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ 虽然都是特征值 0 所对应的特征向量，但它们是线性相关的，所以它们不能作为矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的第 1 列和第 2 列。

② 当 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 时，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}2&-1&1\\4&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}$ 等。$\boldsymbol{P}$ 有多种情况，但无论哪一种情况，$\boldsymbol{P}$ 的第 1 列一定是特征值−2 所对应的特征向量，$\boldsymbol{P}$ 的第 2 列和第 3 列一定是特征值 0 所对应的特

征向量，且这两列是线性无关的。

③ 当$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$时，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&1\\2&-1&0\end{pmatrix}$等。$\boldsymbol{P}$ 有多种情况，但无论哪一种情况，$\boldsymbol{P}$ 的第 1 列和第 3 列一定是特征值 0 所对应的特征向量，且这两列是线性无关的，$\boldsymbol{P}$ 的第 2 列一定是特征值−2 所对应的特征向量。

当一个方阵可以对角化时，对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 以及可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的求法已经都介绍完了，下面来看一道考研题。

$\boxed{\text{考研题 5.13}}$ 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$，$f(x)=x^3-2x+5$，问 $\boldsymbol{B}=f(\boldsymbol{A})$ 能否相似于对角阵。若能，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{\Lambda}$。

解：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是四阶方阵，一定有 4 个特征值。现在，就来求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 4 个特征值以及相应的特征向量。

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1-\lambda&-1&-1&-1\\-1&1-\lambda&-1&-1\\-1&-1&1-\lambda&-1\\-1&-1&-1&1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1&-1\\-1&1-\lambda&-1&-1\\-1&-1&1-\lambda&-1\\-1&-1&-1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

令$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$，即：

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1&-1\\-1&1-\lambda&-1&-1\\-1&-1&1-\lambda&-1\\-1&-1&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

解得：$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$。

当$\lambda_1=-2$时，用 5.2 节所介绍的方法计算出特征向量为：$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$k\neq0$。

当$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$时，用 5.2 节所介绍的方法计算出特征向量为：$k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$，$k_1$，$k_2$，$k_3$不同时为 0。

由于$f(x)=x^3-2x+5$，所以$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E}$。又因为$\boldsymbol{B}=f(\boldsymbol{A})$，所以$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E}$。根据 5.11 节中

所介绍的知识，四阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 4 个特征值分别为 $f(\lambda_1)$、$f(\lambda_2)$、$f(\lambda_3)$、$f(\lambda_4)$。

$$f(\lambda_1)=f(-2)=-8+4+5=1$$

$$f(\lambda_2)=f(\lambda_3)=f(\lambda_4)=f(2)=8-4+5=9$$

所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 4 个特征值分别为 $f(\lambda_1)=1$，$f(\lambda_2)=f(\lambda_3)=f(\lambda_4)=9$

根据 5.11 节中所介绍的知识：$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应于特征值 1 的特征向量，$k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$ 为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应于特征值 9 的特征向量。由此可知，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有三重根特征值 9，此特征值对应的特征向量的最大无关组中含 3 个向量，3=3，所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可以对角化（$\boldsymbol{B}$ 可以相似于对角矩阵）。

根据本节所介绍的知识，有如下结论：

① 当 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&9&0&0\\0&0&9&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}$ 时，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&-1&0\\1&-1&0&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}$ 等。

② 当 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}9&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&9&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}$ 时，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&1&0&0\\0&1&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&0\\-1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$ 等。

③ 当 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}9&0&0&0\\0&9&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}$ 时，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&0&1&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&0\\-1&0&1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$ 等。

④ 当 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}9&0&0&0\\0&9&0&0\\0&0&9&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 时，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&0&0&1\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&1\\-1&0&0&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$ 等。

5.14 关于相似矩阵的五个小结论

矩阵 $\boldsymbol{A}$、矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则有如下 5 个结论成立：

① $k\boldsymbol{A}\sim k\boldsymbol{B}$（$k$ 为任意常数）

② $\boldsymbol{A}^2\sim\boldsymbol{B}^2$

③ $\boldsymbol{A}^k\sim\boldsymbol{B}^k$（$k$ 为正整数）

④ $f(\boldsymbol{A})\sim f(\boldsymbol{B})$，其中 $f(x)$ 是关于 x 的多项式

⑤ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sim\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

5.15 实对称阵的两个来自不同特征值的特征向量必正交

先来介绍实对称矩阵的概念。若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。

例. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&4\\3&7&5\\4&5&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&5&7\\5&4&6\\7&6&9\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}8&5&6\\5&4&3\\6&3&11\end{pmatrix}$ 都是对称矩阵。

实对称矩阵的定义是：若方阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，且方阵 $\boldsymbol{A}$ 中的每一个数都为实数，则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵。

上例中的矩阵 $\boldsymbol{A}$、矩阵 $\boldsymbol{B}$、矩阵 $\boldsymbol{C}$ 都是实对称矩阵。其实对于实对称矩阵中的“实”字，并不用关注太多，因为考研数学线性代数部分的题中所给的对称矩阵，都是实对称矩阵。

再来复习一下两个向量正交的概念。**若两个维数相同的行向量（或列向量）内积为 0，则称这两个向量正交。**

例. $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$、$\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\10\\-8\end{pmatrix}$，问$\vec{a}$、$\vec{b}$是否正交？

解：计算$\vec{a}$、$\vec{b}$的内积即可。

$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=1\times4+2\times10+3\times(-8)=0$

由于$\vec{a}$、$\vec{b}$的内积为 0，所以$\vec{a}$、$\vec{b}$正交。

例. $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$，问$\vec{a}$、$\vec{b}$是否正交？

解：计算$\vec{a}$，$\vec{b}$的内积即可。

$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=1\times4+2\times5+3\times6=32$

由于$\vec{a}$、$\vec{b}$的内积不为 0，所以$\vec{a}$、$\vec{b}$不正交。

现在进入本节的重点。本节的标题是：实对称阵的两个来自于不同特征值的特征向量必正交。

为了让大家能够深入理解这句话，接下来给大家来分析一下。5.2 节中的最后一句话是**对于至少存在两个不同特征值的任意矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来说，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个来自于不同特征值的特征向量必线性无关。**5.2 节中的最后一句话与本节的标题对比一下，可以把本节的标题翻译为：**对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来说，两个来自于不同特征值的特征向量不仅是线性无关的，而且还是正交的（正交必线性无关，线性无关是正交的前提，可以把线性无关理解成“不平行”，而把正交理解成“垂直”，垂直肯定是不平行，所以两个向量正交肯定能推出两个向量线性无关）。**

例. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称阵，它的 3 个特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1$、$\lambda_3=-2$。特征值$\lambda_3=-2$对应的特征向量为：$k\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，其中$a$、$b$、$c$都是特定的常数，$k$是不等于 0 的常数；特征值$\lambda_1=\lambda_2=1$对应的特征向量为：$k_1\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix}$，其中$d$、$e$、$f$、$h$、$i$、$j$都是特定的常数，$k_1$、$k_2$是不同时为 0 的常数。试证：$(2d+g)a+(2e+h)b+(2f+i)c=0$。

解：由于$k_1\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix}$是特征值 1 所对应的全体特征向量，所以$\begin{pmatrix}2d+g\\2e+h\\2f+i\end{pmatrix}$为特征值 1 所对应的特征向量（$k_1=2$、$k_2=1$）；由于$k\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$是特征值−2 所对应的全体特征向量，所以$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$是特征值−2 所对应的特征向量（$k$=1）。

已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，实对称矩阵的两个来自于不同特征值的特征向量必正交，所以有$\begin{pmatrix}2d+g\\2e+h\\2f+i\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$正交。即$(2d+g)a+(2e+h)b+(2f+i)c=0$。

5.16　实对称阵一定可以相似于对角矩阵

5.12 节中，介绍了判断某矩阵是否可以对角化的两个步骤。**这里要告诉大家的是：实对称矩阵是一定可以对角化的，不需要用那两个步骤去判断。**

实对称矩阵一定可以对角化的意思是：对于任意实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来说，一定存在对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 和可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$。那么在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵的情况下，该如何去求上述对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 和可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 呢？有以下两种方法可以使用。

方法 1：按照 5.13 节中所讲的方法求解对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 和可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 即可。即对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角线上的数为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的

特征值（由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值在对角线上的排列顺序可以不同，$\boldsymbol{\Lambda}$ 不唯一）；可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的第 $\boldsymbol{i}$ 列是 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中处于 a_{ii} 位置的特征值所对应的特征向量【若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 r（r>1）重根特征值 λ，则 $\boldsymbol{P}$ 中对应于特征值 λ 的 r 列特征向量必须线性无关】。求出的 $\boldsymbol{\Lambda}$、$\boldsymbol{P}$ 肯定满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$。

方法 2：对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的求法同上。可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的求法：基于某个对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，按照方法 1 中求出的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 在方法 2 中记为矩阵 $\boldsymbol{Q}$。将矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的列向量组单位正交化，单位正交化后得到的就是最终结果，即矩阵 $\boldsymbol{P}$。就是说，按照方法 2 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 比按照方法 1 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 多一步“单位正交化”。然而，按照方法 2 求得的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足 $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$。按照方法 2 求得的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵，按照方法 1 求得的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 不能实现（尽管按照两种方法求得的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 均满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$）。

注意，所有能对角化的方阵都可以用方法 1 来求对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 和可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，而只有对称矩阵才可以用方法 2 来求对角矩阵 Λ 和可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$。

考研题 5.14 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角阵。

解： $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化，即一定存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$。根据刚刚介绍的知识点，有两种方法可以求出矩阵 $\boldsymbol{P}$。无论用哪种方法，都需要先求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值以及每个不同特征值所对应的特征向量。

先求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|&=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}\\
&=(3-\lambda)\times\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}\\
&=(3-\lambda)\times\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-\lambda&0\\0&0&-\lambda\end{vmatrix}\\
&=(3-\lambda)\times\begin{vmatrix}-\lambda&0\\0&-\lambda\end{vmatrix}\\
&=(3-\lambda)\times\lambda^2\\
&=0
\end{aligned}
$$

解得：$\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=3$。

再求每个不同特征值所对应的特征向量。

当 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 时，齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\vec{\xi}=\vec{0}$ 变为了 $(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E})\vec{\xi}=\vec{0}$，即 $A\vec{\xi}=\vec{0}$。求 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 所对应的特征向量的方法就是解此齐次方程组。用 3.10 节所介绍的方法去求解即可，注意通解中的任意常数不能同时为 0。

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$r=1$，$r<n$，说明此齐次方程组有无穷多解。

$x_1+x_2+x_3=0$，$n-r=3-1=2$，取 $\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$，解得 $x_1=1$；取 $\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$，解得 $x_1=1$。

所以此方程组的基础解系为：$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

因此此方程组的通解为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，其中 k_1 、 k_2 是任意常数。

特征值 0 所对应的特征向量为：$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，其中 k_1 、 k_2 是不同时为 0 的任意常数。

当 $\lambda_3 = 3$ 时，齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E})\vec{\xi} = \vec{0}$ 变为 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\vec{\xi} = \vec{0}$ 。求 $\lambda_3 = 3$ 所对应的特征向量的方法就是解此齐次方程组。用 3.10 节所介绍的方法去求解即可，注意通解中的任意常数不能同时为 0。

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r = 2$ ， $r < n$ ，说明此齐次方程组有无穷多解。

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$， $n - r = 3 - 2 = 1$ ，取 $x_2 = 1$，解得 x_1 、 $x_3 = 1$ 。

所以此方程组的基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

因此此方程组的通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 k 是任意常数。

特征值 3 所对应的特征向量为：$k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 k 是不为 0 的常数。

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值以及每个特征值所对应的特征向量都已经求完了。接下来，要求使等式 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$ 成立的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 。

根据本节所讲，有两种方法可以求出可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 。

利用本节介绍的方法 1 来求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 。

① 当 $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 时， $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ， $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等。

② 当 $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 时， $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ， $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 等。

③ 当 $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 时， $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ， $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 等。

注意，这里写出了 3 种对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，而且对于同一个对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，又写出了不止 1 种 $\boldsymbol{P}$。实际上，只要能写出 1 种对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，然后针对该 $\boldsymbol{\Lambda}$ 写出 1 种 $\boldsymbol{P}$，本题就算是做完了。

利用本节介绍的方法 2 来求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$（只有对称矩阵才能用此方法来求 $\boldsymbol{P}$）。

① 当 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ 时，$\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$ 等。

$\boldsymbol{Q}_1$ 对应的 $\boldsymbol{P}_1$ 的求法如下。

记 $\boldsymbol{Q}_1$ 的第 1 列为向量 $\vec{a_1}$，$\boldsymbol{Q}_1$ 的第 2 列为向量 $\vec{a_2}$，$\boldsymbol{Q}_3$ 的第 3 列为向量 $\vec{a_3}$。则 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$、$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$、$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$。

根据之前的讲解，需要把 $\vec{a_1}$、$\vec{a_2}$、$\vec{a_3}$ 这 3 个向量单位正交化。所谓单位正交化，指的是“先正交化，后单位化”，在 3.15 节中介绍过。接下来将这 3 个向量正交化。

正交化的过程如下：

由于 $\vec{a_3}$ 是特征值 3 所对应的特征向量，而 $\vec{a_1}$、$\vec{a_2}$ 是特征值 0 所对应的特征向量，而本题所给的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 又是实对称矩阵，3.15 节中介绍过，实对称矩阵的两个来自于不同特征值的特征向量必正交。由此可知，$\vec{a_3}$ 与 $\vec{a_1}$ 正交，$\vec{a_3}$ 与 $\vec{a_2}$ 正交。因此，“将 $\vec{a_1}$、$\vec{a_2}$、$\vec{a_3}$ 正交化”可以变为“将 $\vec{a_1}$、$\vec{a_2}$ 正交化”，这样一来计算量就减小了（当然，也可以不简化）。现在利用 3.15 节中介绍的“施密特正交法”将 $\vec{a_1}$、$\vec{a_2}$ 正交化。

取 $\vec{b}_1=\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$$\vec{b}_2=\vec{a}_2-\frac{\left(\vec{a}_2,\vec{b}_1\right)}{\left(\vec{b}_1,\vec{b}_1\right)}\cdot\vec{b}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$\vec{b_1}$、$\vec{b_2}$、$\vec{a_3}$ 即为 $\vec{a_1}$、$\vec{a_2}$、$\vec{a_3}$ 正交化后的向量。然后再对 $\vec{b_1}$、$\vec{b_2}$、$\vec{a_3}$ 进行“单位化”。

单位化的过程如下：

$$\vec{c}_1=\frac{\vec{b}_1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_2=\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_3=\frac{\vec{a}_3}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\vec{c_1}$、$\vec{c_2}$、$\vec{c_3}$ 即为 $\vec{b_1}$、$\vec{b_2}$、$\vec{a_3}$ 单位化后的向量。

所以 $\boldsymbol{Q}_1$ 对应的 $\boldsymbol{P}_1$ 为：$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}\vec{c}_1&\vec{c}_2&\vec{c}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

同理可得 $\boldsymbol{Q}_2$ 对应的 $\boldsymbol{P}_2$ 为：$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

综上所述：

① $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$时，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$等。

② 当$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$时，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix}$等。

③ $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$时，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0\end{pmatrix}$等。

本题解完了。大家一定要注意，用方法 2 求出的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 必为正交矩阵。换言之，用方法 2 求出的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 必满足 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{-1}$。

$\boxed{\text{考研题 5.15}}$ 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，**求正交阵 $\boldsymbol{P}$**，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角阵。

解：这里出现本题，是为了和上题对比。本题与上题唯一的区别就在于：**本题明确说明 $\boldsymbol{P}$ 是正交阵，而上题让求的 $\boldsymbol{P}$ 则没有此要求。所以，本题在求完特征值以及不同特征值所对应的特征向量后，只能用方法 2 去求矩阵 $\boldsymbol{P}$，而不能用方法 1。**

$\boxed{\text{考研题 5.16}}$ 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称矩阵，$\lambda_1=-1$、$\lambda_2=\lambda_3=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\lambda_1=-1$ 所对应的特征向量为 $\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$。

解：由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 必能对角化。即必存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 使得：

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ **（1）式**

在（1）式的等式两侧左乘矩阵 $\boldsymbol{P}$，得：

$\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$ **（2）式**

由于 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{E}$，所以（2）式可以变为：

$\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$ **（3）式**

由于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 乘以任何矩阵等于该矩阵，所以③式可以变为：

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$ **（4）式**

在（4）式的等式两侧右乘矩阵 $\boldsymbol{P}^{-1}$，得：

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$ **（5）式**

由于矩阵乘法满足结合律，所以（5）式可以变为：

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1})=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$ **（6）式**

由于 $PP^{-1}=E$，所以（6）式可以变为：

$$AE=P\Lambda P^{-1} \qquad \text{（7）式}$$

由于单位矩阵 E 乘以任何矩阵都等于该矩阵，所以（7）式可以变为：

$$A=P\Lambda P^{-1} \qquad \text{（8）式}$$

本题让求矩阵 A，根据（8）式，$A=P\Lambda P^{-1}$。这里只要求出对角矩阵 Λ、对角矩阵 Λ 所对应的矩阵 P 以及 P^{-1} 即可。

由之前介绍的内容可知，Λ 可以是 $\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 3 种中的 1 种。不妨取 $\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，现在来求这个对角矩阵所对应的可逆矩阵 P，这里选用方法 1 来求 P。

设 $P=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$，其中 $\vec{a}_1$ 为特征值−1 所对应的特征向量。$\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 为特征值 1 所对应的特征向量且线性无关。题中所给的 $\vec{\xi}_1$ 就可以作为 $\vec{a}_1$，但 $\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 还不知道，需要求出。

设 $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，由于实对称阵的两个来自于不同特征值的特征向量必正交，所以 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 正交。所以有：

$x_1\times 0+x_2\times 1+x_3\times 1=0$。只要取满足此关系的任意 x_1,x_2,x_3 就行，这里取 $x_1=1,x_2=0,x_3=0$，所以 $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$。

设 $\vec{a}_3=\begin{pmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{pmatrix}$，同理有 $x_4\times 0+x_5\times 1+x_6\times 1=0$。这里取 $x_4=0,x_5=1,x_6=-1$，所以 $\vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$。

现在 $\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 都已经求出，且 $\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 不成比例，所以它们是线性无关的。因此，它们可以作为矩阵 P 的第 2 列和第 3 列。

现在 P 和 Λ 都已经求出，即 $\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$，还差一个 P^{-1}。第 1 章就介绍过逆矩阵的求法，这里不再赘述。

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

所以 $A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&1\;0\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$

5.17 实对称阵一定可以合同于对角矩阵

5.16 节告诉大家**实对称阵一定可以相似于对角矩阵**。即若方阵 A 为实对称阵，则一定存在对角矩阵 Λ 和可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$。

现在要告诉大家的是，**实对称阵也一定可以合同于对角矩阵**。即若 A 为实对称阵，则一定存在对角矩阵 Λ 和可逆矩阵 P，使得 $P^{\mathrm{T}}AP=\Lambda$。那么，$P^{\mathrm{T}}AP=\Lambda$ 中的可逆矩阵 P 以及对角矩阵 Λ 该如何去求呢？有两种方法。

方法 1.与 5.16 节中所介绍的方法 2 完全一样。在介绍 5.16 节的方法 2 时就告诉过大家：按此方法求出的 P 满足 $P^{-1}=P^{\mathrm{T}}$。所以，按照 5.16 节的方法 2 求出 Λ 和 P，同时满足 $P^{\mathrm{T}}AP=\Lambda$ 和 $P^{-1}AP=\Lambda$。

方法 2.用配方法求 Λ 和 P。

下面通过例子来介绍配方法的步骤。

考研题 5.17 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&4&5\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P，使得 $P^{\mathrm{T}}AP=\Lambda$。

解：由于 $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&4&5\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵。又由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的 9 个数都是实数，所以矩阵 A 为实对称矩阵。由于实对称矩阵一定可以合同于对角矩阵，所以对本题的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来说，一定存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$。本题的问题就是让大家求出 $\boldsymbol{\Lambda}$ 和 $\boldsymbol{P}$，这里用方法 2（配方法）来求。

先将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 写为相应的多项式。

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_xx_3$

为什么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式是这样？**因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的 $\boldsymbol{a_{11},a_{22},a_{33}}$ 位置的数字是 1、2、5，所以 x_1^2 的系数为 1，$\boldsymbol{x_2^2}$ 的系数为 2，$\boldsymbol{x_3^2}$ 的系数为 5；矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的 $\boldsymbol{a_{12}}$、$\boldsymbol{a_{21}}$ 位置的数字是 1，1×2=2，所以 $\boldsymbol{x_1x_2}$ 的系数为 2；矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中 $\boldsymbol{a_{13}}$、$\boldsymbol{a_{31}}$ 的位置的数字是 1，1×2=2，所以 $\boldsymbol{x_1x_3}$ 的系数为 2；矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中 $\boldsymbol{a_{23}}$、$\boldsymbol{a_{32}}$ 位置的数字是 4，4×2=8，所以 $\boldsymbol{x_2x_3}$ 的系数为 8。**

下面开始配方，由于此多项式中含 3 个未知数，所以要配 3 次。

首先，进行第 1 次配方（配 x_1）：关注这 6 项里面所有含 x_1 的项：$x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$，要将 $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 写为 $k(x_1+\Delta)^2+\boldsymbol{X}$ 的形式，其中常数 k 的取值与 x_1^2 的系数一样，$x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 中 x_1^2 的系数是 1，所以 k=1。

Δ 的求法是 $\dfrac{2x_1x_2+2x_1x_3}{2kx_1}=\dfrac{2x_1x_2+2x_1x_3}{2x_1}=x_2+x_3$。

$\boldsymbol{X}$ 的求法用 $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-k(x_1+\Delta)^2$ 即可。所以 $\boldsymbol{X}=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-(x_1+x_2+x_3)^2=-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2$。

$x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 配方后变为 $(x_1+x_2+x_3)^2-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2$

所以

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3\\&=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+5x_3^2+8x_2x_3\\&=(x_1+x_2+x_3)^2-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2+2x_2^2+5x_3^2+8x_2x_3\\&=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_3^2+6x_xx_3\end{aligned}$$

接着，进行第 2 次配方（配 x_2）：$(x_1+x_2+x_3)^2$ 是配出来的，暂时忽略。现在关注 x_2^2、$4x_3^2$、$6x_2x_3$ 这 3 项里面所有含 x_2 的项：$x_2^2+6x_2x_3$。要将 $x_2^2+6x_2x_3$ 写为 $k(x_2+\Delta)^2+\boldsymbol{X}$ 的形式，其中常数 k 的取值与 x_2^2 的系数一样，$x_2^2+6x_2x_3$ 中 x_2^2 的系数是 1，所以 k=1。

Δ 的求法是：$\dfrac{6x_2x_3}{2kx_2}=3x_3$。

$\boldsymbol{X}$ 的求法用 $x_2^2+6x_2x_3-k(x_2+\Delta)^2$ 即可。所以 $\boldsymbol{X}=x_2^2+6x_2x_3-(x_2+3x_3)^2=-9x_3^2$。

综上所述：$x_2^2+6x_2x_3$ 配方后变为 $(x_2+3x_3)^2-9x_3^2$。

所以：

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_3^2+6x_2x_3\\&=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+6x_2x_3+4x_3^2\\&=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2-9x_3^2+4x_3^2\\&=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2-5x_3^2\end{aligned}$$

最后，进行第 3 次配方（配 x_3）：$(x_1+x_2+x_3)^2$、$(x_2+3x_3)^2$ 是配出来的，暂时忽略。现在关注 $-5x_3^2$。要将 $-5x_3^2$ 写为 $k(x_3+\Delta)^2+\boldsymbol{X}$ 的形式，这里可以明显看出，Δ 和 $\boldsymbol{X}$ 都是 0，k 是 5。

所以：

$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2-5x_3^2$

x_1、x_2、x_3 都已经配方完成。那么到底对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 以及可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是什么呢？接下来继续讲解。

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3\\y_2=x_2+3x_3\\y_3=x_3\end{cases}$

则上式变为 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1{}^2+y_2{}^2-5y_3^2$。其中，$y_1{}^2$、$y_2{}^2$、$y_3^2$ 的系数就是对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角线上的 a_{11}、a_{22}、a_{33}。

所以 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-5\end{pmatrix}$

那么可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 呢？

由$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + 3x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$，可解得$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_2 - 3y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$，所以$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

现在$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{\Lambda}$都已经求出，求得的$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{\Lambda}$必满足$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{\Lambda}$，本题就解完了。当然，也可以用方法 1 去求解$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{\Lambda}$（由于本节的方法 1 与上节的方法 2 完全一样，大家都应该会了，这里就不用方法 1 做了）。

通过上题，大家应该已经掌握了配方法，但为了巩固，再来看一道题。接下来的题中不涉及任何新知识点，只对配方进行巩固。

考研题 5.18 矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{\Lambda}$。

解：由于$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$，所以$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$，即矩阵$\boldsymbol{A}$为对称矩阵。又由于矩阵$\boldsymbol{A}$中的 16 个数都是实数，所以矩阵$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵。由于实对称矩阵一定可以合同于对角矩阵，所以对本题的矩阵$\boldsymbol{A}$来说，一定存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$和对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$，使得$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{\Lambda}$。本题的问题就是让大家求出可逆矩阵$\boldsymbol{P}$和对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$。这里方法 2（配方法）来求。

先将矩阵$\boldsymbol{A}$写为相应的多项式

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 + 8x_3x_4$

下面开始配方。

对x_1的配方结果：x_1^2

所以$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 + 8x_3x_4$

对x_2的配方结果：x_2^2

所以$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 + 8x_3x_4$

对x_3的配方结果：$5(x_3 + \frac{4}{5}x_4)^2 - \frac{16}{5}{x_4}^2$

所以$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 5(x_3 + \frac{4}{5}x_4)^2 - \frac{16}{5}x_4^2 + 5x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + 5(x_3 + \frac{4}{5}x_4)^2 + \frac{9}{5}x_4^2$

对x_4的配方结果：$\frac{9}{5}x_4^2$

所以$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 5(x_3 + \frac{4}{5}x_4)^2 + \frac{9}{5}x_4^2$

令$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 + \frac{4}{5}x_4 \\ y_4 = x_4 \end{cases}$。

则上式变为$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2 + \frac{9}{5}y_4^2$

所以$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{5} \end{pmatrix}$

由$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 + \frac{4}{5}x_4 \\ y_4 = x_4 \end{cases}$得$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 - \frac{4}{5}y_4 \\ x_4 = y_4 \end{cases}$，所以$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

第6章

二 次 型

6.1 二次型的定义

“二次型”这3个字从没有在前面的章节中出现过，大家可能会认为二次型是1个全新的知识点，但实际上不是这样。

二次型的定义：

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = a_{11}x_1^2 &+ a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ &+ a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ &+ \cdots \\ &+ a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为 ***n*** 元二次型，简称二次型。

由上式可知二次型是每项均由“常数×变量×变量”所组成的多项式。

例. 判断多项式 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+6x_2x_3+x_3^2$ 是不是三元二次型。

解：由于此多项式的每项均由“常数×变量×变量”组成（第 1 项 x_1^2 可以看成是 $1\times x_1\times x_1$，第 2 项 $2x_1x_2$ 可以看成是 $2\times x_1\times x_2$，第 3 项 $4x_1x_3$ 可以看成是 $4\times x_1\times x_3$，第 4 项 $2x_2^2$ 可以看成是 $2\times x_2\times x_2$，第 5 项 $6x_2x_3$ 可以看成是 $6\times x_2\times x_3$，第 6 项 x_3^2 可以看成是 $1\times x_3\times x_3$），所以此多项式是二次型。又由于此二次型中含 3 个变量 (x_1,x_2,x_3)，所以此二次型是三元二次型。

例. 判断多项式 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$ 是不是三元二次型。

解：由于此多项式的每项均由“常数×变量×变量”组成（第 1 项 $2x_1^2$ 可以看成是 $2\times x_1\times x_1$，第 2 项 $3x_2^2$ 可以看成是 $3\times x_2\times x_2$，第 3 项 $3x_3^2$ 可以看成是 $3\times x_3\times x_3$，第 4 项 $-4x_2x_3$ 可以看成是 $-4\times x_2\times x_3$），所以此多项式是二次型。又由于此二次型中含 3 个变量 (x_1,x_2,x_3)，所以此二次型是三元二次型。

现在来看两个并非是二次型的多项式。

例. 判断多项式 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$ 是不是三元二次型。

解：由于此多项式中的 $2x_1$ 这一项并非由“常数×变量×变量”组成（$2x_1$ 是“常数×变量”，而不是“常数×变量×变量”），所以此多项式不是二次型。连二次型都不是，就更不是三元二次型了。

例. 判断多项式 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2x_3$ 是不是三元二次型。

解：由于此多项式中的 $-4x_1x_2x_3$ 这一项并非由“常数×变量×变量”组成（$-4x_1x_2x_3$ 是“常数×变量×变量×变量”，而不是“常数×变量×变量”），所以此多项式不是二次型。连二次型都不是，就更不是三元二次型了。

6.2 二次型的对应矩阵

每个二次型都有对应矩阵。换句话说：**根据二次型就可以写出二次型的对应矩阵；根据二次型的对应矩阵也可以写出二次型。下面举例说明。**

例. 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+6x_2x_3+x_3^2$ 的对应矩阵。

解：此二次型的对应矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$。由于是 $x_1^2,2x_2^2,x_3^2$，所以对角线上的数是 1、2、1。由于是 $2x_1x_2$，$2\div 2=1$ 所以矩阵中第 1 行第 2 列的数和第 2 行第 1 列的数都是 1；由于是 $4x_1x_3$，$4\div 2=2$，所以矩阵中第 1 行第 3 列的数和第 3 行第 1 列的数都是 2；由于是 $6x_2x_3$，$6\div 2=3$，所以矩阵中第 2 行第 3 列的数和第 3 行第 2 列的数都是 3。

例. 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+6x_2^2-9x_3^2+7x_1x_3+9x_1x_2++8x_2x_3$ 的对应矩阵。

解：此二次型的对应矩阵为$\begin{pmatrix} 4 & \frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{9}{2} & 6 & 4 \\ \frac{7}{2} & 4 & -9 \end{pmatrix}$。由于是$4x_1^2,6x_2^2,-9x_3^2$，所以对角线上的数是 4，6，−9。再来看：由于是$9x_1x_2$，$9\div 2=\frac{9}{2}$，所以矩阵中第 1 行第 2 列的数和第 2 行第 1 列的数都是$\frac{9}{2}$；由于是$7x_1x_3,7\div 2=\frac{7}{2}$，所以矩阵中第 1 行第 3 列的数和第 3 行第 1 列的数都是$\frac{7}{2}$；由于是$8x_2x_3,8\div 2=4$，所以矩阵中第 2 行第 3 列的数和第 3 行第 2 列的数都是 4。

通过以上两个例子，大家应该会写二次型的对应矩阵（一定要注意：平方项是不需要除以 2 的，只有非平方项才需要除以 2），而通过二次型的对应矩阵也可以写出二次型。

例. 已知某二次型的对应矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$，请写出该二次型。

解：该二次型为$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+7x_3^2+4x_1x_2+10x_1x_3+16x_2x_3$。由于对角线是“$\begin{matrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 7 \end{matrix}$”，所以有$x_1^2+4x_2^2+7x_3^2$。由于矩阵中第 1 行第 2 列的数和第 2 行第 1 列的数都是 2，$2\times 2=4$，所以有$4x_1x_2$；由于矩阵中第 1 行第 3 列的数和第 3 行第 1 列的数都是 5，$2\times 5=10$，所以有$10x_1x_3$；由于矩阵中第 2 行第 3 列的数和第 3 行第 2 列的数都是 8，$2\times 8=16$，所以有$16x_2x_3$。

注意：二次型的对应矩阵一定是对称矩阵。也就是说：若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是某二次型的对应矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定满足$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$（所以不可能出现比如“二次型的对应矩阵中第 1 行第 2 列的数和第 2 行第 1 列的数不相等”的情况）。

6.3 利用矩阵乘法来表示二次型

任何一个二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$都可以表示成$\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}$（其中$\vec{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ 为二次型的对应矩阵）。

例. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+6x_2x_3+x_3^2$可以表示为：

$$(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

接下来验证一下：

$$(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\times\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}=(x_1+x_2+2x_3 \quad x_1+2x_2+3x_3 \quad 2x_1+3x_2+x_3)$$

$$(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\times\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=(x_1+x_2+2x_3 \quad x_1+2x_2+3x_3 \quad 2x_1+3x_2+x_3)\times\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &=(x_1+x_2+2x_3)x_1+(x_1+2x_2+3x_3)x_2+(2x_1+3x_2+x_3)x_3 \\ &=x_1^2+x_1x_2+2x_1x_3+x_1x_2+2x_2^2+3x_2x_3+2x_1x_3+3x_2x_3+x_3^2 \\ &=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+6x_2x_3+x_3^2 \end{aligned}$$

例. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$可以表示为：

$$(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}。$$

6.4　标准形

标准形一定是二次型，而且是特殊的二次型，其特殊性体现在：只含平方项。

例. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+6x_2x_3+x_3^2$ 是二次型，但不是标准形。

例. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$ 是二次型，但不是标准形。

例. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2$ 是二次型，同时也是标准形。

例. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1+3x_2^2+3x_3^2$ 不是二次型，也不是标准形（如果连二次型都不是，那么就不可能是标准形）。

接下来给大家介绍正惯性指数和负惯性指数。**正惯性指数和负惯性指数是针对标准形而言的，而不是针对任意一个二次型而言。**

那么，什么叫正惯性指数、负惯性指数呢？标准形中只有平方项。**标准形中正平方项的个数称为正惯性指数，负平方项的个数称为负惯性指数。**

例. 标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1{}^2+3x_2{}^2+3x_3{}^2$ 的正惯性指数、负惯性指数分别是多少？

解： 由于 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1{}^2+3x_2{}^2+3x_3{}^2$ 的 3 个平方项都是正平方项，没有负平方项，所以此标准形的正惯性指数是 3，负惯性指数是 0。

例. 标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1{}^2+x_2{}^2+4x_3{}^2$ 的正惯性指数、负惯性指数分别是多少？

解： 由于 $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1{}^2+x_2{}^2+4x_3{}^2$ 的 3 个平方项中有 2 个正平方项，1 个负平方项，所以此标准形的正惯性指数是 2，负惯性指数是 1。

例. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1{}^2+3x_2{}^2+3x_3{}^2-4x_2x_3$ 的正惯性指数、负惯性指数分别是多少？

解： 由于 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1{}^2+3x_2{}^2+3x_3{}^2-4x_2x_3$ 不是标准形，所以不存在“它的正惯性指数、负惯性指数是多少”这种说法。

6.5　规范形

上节中，告诉大家：标准形是特殊的二次型，其特殊性体现在：只含有平方项。

本节要告诉大家的是：规范形是特殊的标准形，其特殊性体现在：平方项的系数在 1、−1、0 中取值。

例. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+6x_2x_3+x_3^2$ 是二次型，不是标准形，不是规范形。

例. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$ 是二次型，不是标准形，不是规范形。

例. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2$ 是二次型，是标准形，不是规范形。

例. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2$ 是二次型，是标准型，是规范形（是标准形，是因为只含有平方项；是规范形，是因为平方项的系数为 1、−1、1）。

例. $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ 是二次型，是标准型，是规范形（是标准形，是因为只含平方项；是规范形，是因为平方项的系数为 1、1）。

例. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1+3x_2^2+3x_3^2$ 不是二次型，不是标准形，不是规范形（如果连二次型都不是，那么就不可能是标准形、规范形）。

最后要说的是：二次型、标准形、规范形三者之间的关系像极了方阵、对角矩阵、单位矩阵三者之间的关系。标准形是特殊的二次型（对角矩阵是特殊的方阵），而规范形又是特殊的标准形（而单位矩阵又是特殊的对角矩阵）。

6.6　化二次型为标准形

本节要给大家介绍“化二次型为标准形”。所谓“化二次型为标准形”，指的是“把一个普通的二次型化为标准形”。

那么，到底应该怎么化呢？只要找到一个使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{\Lambda}$ 成立的矩阵 $\boldsymbol{C}$，然后令 $\vec{X}=\boldsymbol{C}\vec{Y}$ 即可。

接下来详细地给大家解释一下。

在 6.3 节中，介绍过：任何一个二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都可以表示成 $\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}$，现在令 $\vec{X}=\boldsymbol{C}\vec{Y}$，则 $\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}$ 就变

成了$(\boldsymbol{C}\vec{Y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\vec{Y})$，根据公式$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，可得$(\boldsymbol{C}\vec{Y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\vec{Y})=\vec{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\vec{Y})$，又因为矩阵乘法满足结合律（可以随便加括号），所以$\vec{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\vec{Y})=\vec{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC})\vec{Y}$。如果$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{\Lambda}$，那么$\vec{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC})\vec{Y}$就变为了$\vec{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\vec{Y}$，这就是标准形（只不过未知数不是$x_i$，而是$y_i$）。

如果想把一个普通的二次型化为标准形，只要找到一个使得$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{\Lambda}$成立的矩阵$\boldsymbol{C}$，然后令$\vec{X}=\boldsymbol{C}\vec{Y}$即可。

那么，应该怎么去求矩阵$\boldsymbol{C}$呢？矩阵$\boldsymbol{C}$的求法在6.9节中要给大家介绍，现在只要明白“化二次型为标准形”指的是什么意思就可以了。

最后要告诉大家的是，对于对称矩阵$\boldsymbol{A}$而言，上述的“矩阵$\boldsymbol{C}$”并不唯一，导致“$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{\Lambda}$”中的对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$也不唯一，因此同一个二次型很可能可以被化为不同的标准形。但是大家要记住一点：虽然同一个二次型可以化成不同的标准形，但是这些不同的标准形的正、负惯性指数一定是一样的。

6.7 合同二次型

第5章，已经清楚地介绍了合同矩阵的概念（设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$是两个n阶方阵，若存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$，使得$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$，则称矩阵$\boldsymbol{A}$和矩阵$\boldsymbol{B}$是合同矩阵）。那么，合同二次型是什么意思？

合同二次型的定义：若两个二次型的对应矩阵是合同矩阵，那么称这两个二次型为合同二次型。

例．已知矩阵$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$和矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$是合同矩阵，问二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2$和二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2$是合同二次型吗？

解：由于矩阵$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2$的对应矩阵，矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$是二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2$的对应矩阵，又$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$是合同矩阵（本题已知条件），所以二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2$和二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2$是合同二次型。

6.8 正定二次型、正定矩阵

正定二次型是二次型，并且是特殊的二次型。本特殊性体现在：当$x_1,x_2,\cdots,x_n$不全为零时，二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$恒大于零。

例．$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2$是二次型，也是正定二次型（因为当$x_1$、$x_2$、$x_3$不全为零时，$x_1^2+2x_2^2+x_3^2$恒大于零）。

例．$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-x_3^2$是二次型，但不是正定二次型（因为当$x_1$、$x_2$、$x_3$不全为零时，$x_1^2+2x_2^2-x_3^2$并不恒大于零。如当$x_1=1$、$x_2=1$、$x_3=10$时，$x_1^2+2x_2^2-x_3^2=-97<0$）。

正定二次型的对应矩阵叫做正定矩阵。

例．矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是正定矩阵。因为该矩阵是正定二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2$的对应矩阵，而二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2$是正定二次型。

最后要提醒大家：正定二次型不一定是标准形，不要认为只有标准形才有可能是正定二次型。例如$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$就是一个普通的二次型，不是标准形，但它却是正定二次型。

6.9 用正交变换法化二次型为标准形

由6.6节可知，化二次型$\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}$为标准形实际上指的就是：找到矩阵$\boldsymbol{C}$，使得$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{\Lambda}$。那么该如何去找矩阵$\boldsymbol{C}$呢？有两种方法：

- 利用正交变换法找矩阵$\boldsymbol{C}$。
- 利用配方法找矩阵$\boldsymbol{C}$。

二次型$\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}$中的矩阵$\boldsymbol{A}$一定是对称矩阵（因为二次型的对应矩阵都是对称矩阵）。$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{\Lambda}$指的是对称矩

阵合同于对角矩阵。这说明现在讨论的"如何求使得 $C^{\mathrm{T}}AC=\Lambda$ 成立的矩阵 C"就是 5.17 节（实对称阵一定可以合同于对角矩阵）中给大家介绍的"如何求使得 $P^{\mathrm{T}}AP=\Lambda$ 成立的矩阵 P"。

5.17 节中介绍过，求可逆矩阵 P 有两种方法：方法 1 为正交变换法，方法 2 为配方法。

考研题 6.1 用正交变换法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准形。

解：本题要求把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 化为标准形，而且指定了只能用"正交变换法"。说明只能用 5.17 节中所讲的方法 1 来求"使得 $C^{\mathrm{T}}AC=\Lambda$ 成立"的 C 和 Λ，而不能用 5.17 节中所讲的方法 2 来求。

此二次型的对应矩阵为：$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$

先求矩阵 A 的特征值。

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\lambda E=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$$

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}$$

令 $|A-\lambda E|=0$

即：$\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=0$

解得：$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$。

再求矩阵 A 的每个不同特征值所对应的特征向量。

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时：

齐次方程组 $(A-\lambda E)\vec{\xi}=\vec{0}$ 化为 $(A-E)\vec{\xi}=\vec{0}$。解出方程组 $(A-E)\vec{\xi}=\vec{0}$ 的通解即可。利用 3.10 节所介绍的方法求解，但要注意通解中的任意常数不能同时为 0。

由于求解特征向量的题目在第 5 章练得很多，所以这里不具体写出求解特征向量的过程了，直接给出最终结果。

特征值 1 对应的特征向量为：$k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 k_1,k_2 是不同时为零的任意常数。

当 $\lambda_3=10$ 时：

同理可得，特征值 10 对应的特征向量为：$k\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$，其中 k 是不为零的任意常数。

现在在 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&10&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 这 3 个对角矩阵中任选一个作为"$C^{\mathrm{T}}AC=\Lambda$"中的 Λ 吧，这里选

的是$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}$。最终可得，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 化为标准形后会变为 $y_1^2+y_2^2+10y_3^2$。

这还不算做完。还需要求出矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$ 才行。求矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的方法用的是 5.17 节中所介绍的方法。

记 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\vec{a}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\vec{a}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$。由 5.17 节中所介绍的方法 1 可知，现在需要将 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 单位正交化。

正交化过程如下。

取 $\vec{b}_1=\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\vec{b}_2=\vec{a}_2-\frac{(\vec{a}_2,\vec{b}_1)}{(\vec{b}_1,\vec{b}_1)}\times\vec{b}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{-4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$$

$\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{a}_3$ 即为 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 正交化后所得的向量（由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，对称矩阵的两个来自于不同特征值的特征向量必正交，所以有 $\vec{a}_1$ 与 $\vec{a}_3$ 正交、$\vec{a}_2$ 与 $\vec{a}_3$ 正交，因此 $\vec{a}_3$ 不需要参与正交化）。

接下来进行“单位化”，这里要将 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{a}_3$ 单位化。

单位化过程如下。

$$\vec{c}_1=\frac{\vec{b}_1}{\sqrt{(-2)^2+1^2+0^2}}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_2=\frac{\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+4^2+5^2}}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{45}}\\\frac{4}{\sqrt{45}}\\\frac{5}{\sqrt{45}}\end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_3=\frac{\vec{a}_3}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}}{3}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$\vec{c}_1,\vec{c}_2,\vec{c}_3$ 即为 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{a}_3$ 单位化后所得的向量。

设 $\boldsymbol{C}=(\vec{c}_1,\vec{c}_2,\vec{c}_3)=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{45}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{\sqrt{45}}&\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{\sqrt{45}}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，则有：$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}$。

最终，把使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$ 成立的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 求出来了。

令 $\vec{X}=\boldsymbol{C}\vec{Y}$，则原二次型：

$f(x_1,x_2,x_3)=\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}=(\boldsymbol{C}\vec{Y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\vec{Y})=\vec{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\vec{Y})=\vec{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\vec{Y}=\vec{Y}^{\mathrm{T}}\Lambda\vec{Y}=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$ 本题就做完了。

注意：如果只想求出原二次型化成的标准型，那比较容易了，当求出矩阵 A 的 3 个特征值是 1、1、10 之后，就知道原二次型化成的标准型。所以本题并不是“只要写出标准形就可以”，而是“要求出矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得：若令 $\vec{X}=\boldsymbol{C}\vec{Y}$，则原二次型能变为标准形”。

$\boxed{\text{考研题 6.2}}$ 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$，已知 $\lambda_1=1$ 是该二次型的对应矩阵的一个特征值。

（1）求出 a。

（2）将二次型化为标准形。

解：（1）二次形的对应矩阵为：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$。

先求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

$$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&a\\0&a&3-\lambda\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&a\\0&a&3-\lambda\end{vmatrix}$$

令 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$

即 $\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&a\\0&a&3-\lambda\end{vmatrix}=0$　　　　（1）式

（1）式可以化简为：

$(2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+9-a^2)=0$　　　　（2）式

已知 1 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，说明把（2）式中的 λ 换成 1 时，该式一定成立。把 λ=1 代入（2）式。有：

$4-a^2=0$

解得：$a=\pm2$。

第 2 问是“将二次型化为标准形”，而不是“利用正交变换法化二次型为标准形”或者“利用配方法化二次型为标准形”。这说明只要能把题中所给的二次型化成的标准形写出来就可以了，不需要用求矩阵 $\boldsymbol{C}$。

只要是把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值都求出来，就能把标准形写出来。也就是说，第 2 问就是要求把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值都求出来。题中已经说了 λ_1=1 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，所以只要把剩下两个特征值求出来即可。

第 1 问求出了 $a=\pm2$。现在把 $a=\pm2$ 代入到②式中，则有：

$(2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+5)=0$　　　　（3）式

由（3）式可以解得：λ_1=1，λ_2=2，λ_3=5。

所以，二次型化为的标准形是：

$y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$

当然，也可以是 $\begin{cases}2y_1^2+y_2^2+5y_3^2\\5y_1^2+2y_2^2+y_3^2\\5y_1^2+y_2^2+2y_3^2\\2y_1^2+5y_2^2+1y_3^2\\1y_1^2+5y_2^2+2y_3^2\end{cases}$ 这 5 个中的任意一个（因为 $\vec{X}=\boldsymbol{C}\vec{Y}$ 中的 $\boldsymbol{C}$ 不唯一，所以 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\Lambda$ 中的 Λ 也不唯一）。此题不需要求矩阵 $\boldsymbol{C}$，所以已经做完。

$\boxed{\text{考研题 6.3}}$ 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\,(b>0)$，该二次型的对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值之和为 1，所有特征值之积为−12。

（1）求 a、b 的值。

（2）利用正交变换法将二次型化为标准形，并写出所作的正交变换和对应的正交矩阵。

解：（1）二次型的对应矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{pmatrix}$。由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个特征值，设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值为 λ_1、λ_2、λ_3。5.9 节中介绍过：**一个矩阵的所有特征值之和等于该矩阵对角线上的所有数字之和，一**

个矩阵的所有特征值之积等于该矩阵所对应的行列式的值。所以有：

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2+(-2)=1$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|\boldsymbol{A}|=-4a-2b^2=-12$$

解得 $a=1$、$b=\pm2$，已知 $b>0$，所以 $b=2$，即 $a=1$、$b=2$。

（2）第 2 问中“写出所作的正交变换”的意思是要把“$\vec{X}=\boldsymbol{C}\vec{Y}$”这个等式写出，“写出对应的正交矩阵”的意思是要把使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$ 成立的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 求出来。

注意：如果这第 2 问没有后半句“并写出所作的正交变换和对应的正交矩阵”，只有前半句“利用正交变换法将二次型化为标准形”，也必须写出 $\vec{X}=\boldsymbol{C}\vec{Y}$ 并求矩阵 $\boldsymbol{C}$。

换句话说，只有像上题一样问的是“将二次型化为标准形”，才不用写 $\vec{X}=\boldsymbol{C}\vec{Y}$ 和求矩阵 $\boldsymbol{C}$。否则的话（比如问的是“利用正交变换法将二次型化为标准形”或“利用配方法将二次型化为标准形”），必须写出 $\vec{X}=\boldsymbol{C}\vec{Y}$ 并且求矩阵 $\boldsymbol{C}$。

把第 1 问求得的 $a=1$、$b=\pm2$ 代入到二次型的对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&-2\end{pmatrix}$。

然后按照$\boxed{\text{考研题 6.1}}$的做法解题即可。

最后，给出最终答案（答案不唯一）。

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt5}&\frac{-2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$$

令 $\vec{X}=\boldsymbol{C}\vec{Y}$，则原二次型即可化为标准形 $2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$。

6.10 用配方法化二次型为标准形

本节所涉及的方法是 5.17 节的方法 2，所以本节通过习题来巩固该知识点。

$\boxed{\text{考研题 6.4}}$ 用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$ 为标准形，求出所作的可逆线性变换矩阵 $\boldsymbol{C}$。

解：由$\boxed{\text{考研题 6.3}}$可知，即使本题只要求用配方法将二次型化为标准形，而没要求求矩阵 $\boldsymbol{C}$，也必须求矩阵 $\boldsymbol{C}$。

下面开始配方，由于此多项式中含 3 个未知数，所以要配方 3 次。

第 1 次配方（配 x_1）：

关注这 6 项里面所有含 x_1 的项：$x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$，我们要将 $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 写为 $k(x_1+\Delta)^2+\boldsymbol{X}$ 的形式，其中常数 k 的取值与 x_1^2 的系数一样，$x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 中 x_1^2 的系数是 1，所以 k=1。

Δ 的求法是 $\dfrac{2x_1x_2+2x_1x_3}{2kx_1}=\dfrac{2x_1x_2+2x_1x_3}{2x_1}=x_2+x_3$。

X 的求法用 $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-k(x_1+\Delta)^2$ 即可，所以 $X=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-(x_1+x_2+x_3)^2=-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2$。

综上所述：$x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 配方之后变为 $(x_1+x_2+x_3)^2-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2$

所以：

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3\\&=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+5x_3^2+8x_2x_3\\&=(x_1+x_2+x_3)^2-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2+2x_2^2+5x_3^2+8x_2x_3\\&=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_3^2+6x_xx_3\end{aligned}$$

第 2 次配方（配 x_2）：

$(x_1+x_2+x_3)^2$ 是配出来的，暂时忽略。现在关注 x_2^2、$4x_3^2$、$6x_2x_3$ 这 3 项里面所有含 x_2 的项：$x_2^2+6x_2x_3$。要将 $x_2^2+6x_2x_3$ 写为 $k(x_2+\Delta)^2+X$ 的形式，其中常数 k 的取值与 x_2^2 的系数一样，$x_2^2+6x_2x_3$ 中 x_2^2 的系数是 1，所以 k=1。

Δ 的求法是：$\dfrac{6x_2x_3}{2kx_2}=3x_3$。

X 的求法用 $x_2^2+6x_2x_3-k(x_2+\Delta)^2$ 即可，所以 $X=x_2^2+6x_2x_3-(x_2+3x_3)^2=-9x_3^2$。

综上所述：$x_2^2+6x_2x_3$ 配方之后变为 $(x_2+3x_3)^2-9x_3^2$。

所以：

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_3^2+6x_2x_3\\&=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+6x_2x_3+4x_3^2\\&=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2-9x_3^2+4x_3^2\\&=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2-5x_3^2\end{aligned}$$

第 3 次配方（配 x_3）：

$(x_1+x_2+x_3)^2$、$(x_2+3x_3)^2$ 是配出来的，暂时忽略。现在关注 $-5x_3^2$，要将 $-5x_3^2$ 写为 $k(x_3+\varDelta)^2+X$ 的形式，这里可以明显看出，Δ 和 X 都是 0，k 是 5。

所以：

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2-5x_3^2$$

上述配方过程早在 5.17 节中给大家介绍过。现在把 x_1、x_2、x_3 都配完了。接下来求 $\boldsymbol{C}^{\mathrm T}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{\varLambda}$ 中的对角矩阵 $\boldsymbol{\varLambda}$ 以及矩阵 $\boldsymbol{C}$。

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3\\y_2=x_2+3x_3\\y_3=x_3\end{cases}$

则上式变为 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1{}^2+y_2{}^2-5y_3^2$。$y_1{}^2$、$y_2{}^2$、$y_3^2$ 的系数就是对角矩阵 $\boldsymbol{\varLambda}$ 的对角线上的 a_{11}、a_{22}、a_{33}。

所以：$\varLambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-5\end{pmatrix}$

然后求矩阵 $\boldsymbol{C}$。

由 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3\\y_2=x_2+3x_3\\y_3=x_3\end{cases}$，可解得 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2+2y_3\\x_2=y_2-3y_3\\x_3=y_3\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$。

求出的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 满足：

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm T}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{\varLambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-5\end{pmatrix}。$$

令 $\vec{X}=\boldsymbol{C}\vec{Y}$，则原二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=\vec{X}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}\vec{X}=(\boldsymbol{C}\vec{Y})^{\mathrm T}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\vec{Y})=\vec{Y}^{\mathrm T}\boldsymbol{C}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\vec{Y})=\vec{Y}^{\mathrm T}(\boldsymbol{C}^{\mathrm T}\boldsymbol{AC})\vec{Y}=\vec{Y}^{\mathrm T}\boldsymbol{\varLambda}\vec{Y}=y_1^2+y_2^2-5y_3^2$$

$\boxed{\text{考研题 6.5}}$ 用配方法将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+6x_1x_3-2x_2x_3$ 化成标准形、规范形。

解：本题这里不详细地写出配方的过程。

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2-x_2^2+6x_1x_3-2x_2x_3\\&=(x_1+3x_3)^2-9x_3^2-2x_2x_3-x_2^2\\&=(x_1+3x_3)^2-(x_2+x_3)^2-8x_3^2\end{aligned}$$

即：$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+3x_3)^2-(x_2+x_3)^2-8x_3^2$

令：$\begin{cases}y_1=x_1+3x_3\\y_2=x_2+x_3\\y_3=x_3\end{cases}$

则上式变为 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1{}^2-y_2{}^2-8y_3^2$，$y_1{}^2$、$y_2{}^2$、$y_3^2$ 的系数就是对角矩阵 $\boldsymbol{\varLambda}$ 的对角线上的 a_{11}、a_{22}、a_{33}。

所以：$\boldsymbol{\varLambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-8\end{pmatrix}$

然后求矩阵 $\boldsymbol{C}$。

由 $\begin{cases}y_1=x_1+3x_3\\y_2=x_2+x_3\\y_3=x_3\end{cases}$，可解得 $\begin{cases}x_1=y_1-3y_3\\x_2=y_2-y_3\\x_3=y_3\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$。

求出的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 满足：

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-8\end{pmatrix}。$$

令 $\vec{X}=\boldsymbol{C}\vec{Y}$，则原二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}=(\boldsymbol{C}\vec{Y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\vec{Y})=\vec{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\vec{Y})=\vec{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\vec{Y}=\vec{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\vec{Y}=y_1^2-y_2^2-8y_3^2$$

到这里本题还没有做完。本题有两问。第 1 问是：将二次型化为标准形。第 2 问是：将二次型化为规范形。

首先，来复习一下“规范形”。6.5 节中，给大家介绍了规范形。**规范形是特殊的标准形，特殊性体现在：平方项的系数在 1、−1、0 中取值。**

由此可知，要想将一个普通的二次型化为规范形，那么其必须先化为标准形，进而才能化为规范形。

也就是说，如果此题没有第 1 问而只有第 2 问，也必须得先将题中所给的二次型化为标准形。

本题二次型已经化为标准形，接下来把其化为规范形啊。此标准形的 3 个平方项的系数分别为：1、−1、8。只有“8”需要处理（因为“8”并非 1、−1、0 这 3 个数之中的数），“1”和“−1”都不需要处理。那么到底应该怎么处理呢？

$$令\begin{cases}y_1=z_1\\y_2=z_2\\y_3=\dfrac{1}{\sqrt{8}}z_3\end{cases}$$

则 $y_1^2-y_2^2-8y_3^2$ 就变为了 $z_1^2-z_2^2-z_3^2$，也就是规范形了嘛。至此，本题就做完了。

注意：并不是只有这道题化规范形的方法是“引入与 y 有关的 z”，而是所有化规范形的题的解题方法都是“引入与 y 有关的 z，使得标准形的所有平方项的系数都变为 1 或−1。”

考研题 6.6 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3$ 的标准形是：

（A）$3y_1^2-y_2^2-2y_3^2$　　（B）$-3y_1^2-y_2^2-2y_3^2$

（C）$-2y_1^2+y_2^2$　　（D）$2y_1^2+y_2^2+3y_3^2$

解：本题是选择题，没有指定用什么方法，所以用正交变换法或用配方法做都可以，本题不需要求出使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$ 成立的矩阵 $\boldsymbol{C}$，只要求出题中所给的二次型化成的标准形就可以了。换句话说，只要求出对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 即可。

这里用配方法。

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3\\&=2(x_1-x_2)^2-x_2^2-2x_2x_3-4x_3^2\\&=2(x_1-x_2)^2-(x_2+x_3)^2-3x_3^2\end{aligned}$$

$$令\begin{cases}y_1=x_1-x_2\\y_2=x_2+x_3\\y_3=x_3\end{cases}$$

所以二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3$ 化成的标准形是：$2y_1^2-y_2^2-3y_3^2$。

然而，这 4 个选项都不是 $2y_1^2-y_2^2-3y_3^2$，6.6 节（化二次型为标准形）中的最后一句话这样说：**虽然同一个二次型可以化成不同的标准形，但是这些不同的标准形的正、负惯性指数肯定是一样的。**这里标准形 $2y_1^2-y_2^2-3y_3^2$ 的正惯性指数是 1，负惯性指数是 2。由此可知：二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3$ 虽然还可以被化为其他标准形，但正惯性指数一定是 1，负惯性指数一定是 2。由此，可以知道本题的正确选项是（A）选项。

答案：（A）。

6.11　两个对称矩阵合同的充分必要条件

5.7 节中，给大家介绍了两个矩阵合同的定义。设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$，记为 $\boldsymbol{A}\approx\boldsymbol{B}$。

可是实际上，很难通过定义来判断两个矩阵是否合同。例如：矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，若想通过定义来判断这两个矩阵是否合同，需要去找矩阵 $\boldsymbol{P}$。使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 成立，但是矩阵 $\boldsymbol{P}$ 很难找出。所以说，很

难通过定义来判断两个矩阵是否合同。

除了定义之外，两个矩阵合同有没有充分必要条件呢？结果发现，当 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是对称矩阵时，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 合同的确是有充分必要条件的。但若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 中至少一个矩阵不是对称矩阵时，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 合同就没有充分必要条件了。

当 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是对称矩阵时，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件如下。

对称矩阵 $\boldsymbol{A}$、对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 合同 $\Leftrightarrow$ 将对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 写为相应的二次型 f_A，将对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 也写为相应的二次型 f_B。然后将 f_A 化为标准形 f_A'，将 f_B 化为标准形 f_B'。标准形 f_A' 与标准形 f_B' 的正惯性指数、负惯性指数均相同。

考研题 6.7　下列矩阵中与 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 合同的矩阵是：

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

解：由于本题所给的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 以及 4 个选项中所给的矩阵都是对称矩阵，所以可以利用刚刚介绍的充分必要条件来做。

本题所给的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的二次型 $f_A=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2$，现在要把这个二次型化为标准形。用正交变换法或者用配方法都可以，这里用配方法。

$$\begin{aligned}f_A&=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2\\&=(x_1+2x_2)^2-3x_2^2+x_3^2\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+2x_2\\y_2=x_2\\y_3=x_3\end{cases}$

所以二次型 f_A 化为标准形以后得 $f_A'=y_1^2-3y_2^2+y_3^2$，正惯性指数为 2，负惯性指数为 1。

然后来看 4 个选项中所给的矩阵。本题比较简单，简单之处在于：4 个选项中所给的矩阵对应的二次型本身就是标准形，不用再化了。

现在，把这 4 个选项中所给的矩阵写为对应的标准形。

选项（A）中所给的矩阵对应的标准形为：$x_1^2+x_2^2+x_3^2$，正惯性指数为 3，负惯性指数为 0。

选项（B）中所给的矩阵对应的标准形为：$x_1^2+x_2^2-x_3^2$，正惯性指数为 2，负惯性指数为 1。

选项（C）中所给的矩阵对应的标准形为：$x_1^2-x_2^2-x_3^2$，正惯性指数为 1，负惯性指数为 2。

选项（D）中所给的矩阵对应的标准形为：$-x_1^2-x_2^2-x_3^2$，正惯性指数为 0，负惯性指数为 3。

标准形 $f_A'=y_1^2-3y_2^2+y_3^2$ 的正惯性指数为 2，负惯性指数为 1，由对称矩阵合同的充分必要条件可知，（B）选项为正确选项。

答案：（B）。

6.12　正定二次型、正定矩阵的证明方法

6.8 节中，给大家介绍了正定二次型、正定矩阵的定义。先来回顾一下。正定二次型是二次型，**而且是特殊的二次型。其特殊性体现在：当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零时，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 恒大于零。正定二次型的对应矩阵叫做正定矩阵（由此可知正定矩阵一定是对称矩阵，因为任何一个二次型的对应矩阵都是对称矩阵）。**

回顾完正定二次型、正定矩阵的定义后，接下来看正定二次型、正定矩阵的证明方法。

6.12.1　正定矩阵的证明方法

首先先来看正定矩阵的证明方法，正定矩阵的证明方法一共有 5 种。

1．正定矩阵的第 1 种证明方法

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵并且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都大于 0，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

注意：这不是单向的，而是充分必要条件。也就是说，如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不满足“矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵并且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都大于 0”，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定不是正定矩阵。

例. 试证明矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$ 是正定矩阵。

解： $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵；由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值分别为 $\lambda_1=1$、$\lambda_2=1$、$\lambda_3=10$（计算过程省略），所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都大于 0。

综上所述（矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都大于 0），矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵。

例. 试证明矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ 不是正定矩阵。

解： $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵；由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值分别为：$\lambda_1=-1$、$\lambda_2=1$、$\lambda_3=1$（计算过程省略），所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值并非都大于 0。

综上所述（矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值并非都大于 0），不满足矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵的充分必要条件，因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定不是正定矩阵。

2．正定矩阵的第 2 种证明方法

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵并且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式都大于 0，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

注意： 这不是单向的，而是充分必要条件。也就是说：如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不满足“矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵并且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式大于 0”，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定不是正定矩阵。

下面通过例题了解“顺序主子式”的概念。

例. 试证明矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$ 是正定矩阵。

解： 本题刚才做过，这里，用刚刚讲的“正定矩阵的第 2 种证明方法”来做。

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵；由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必然存在一阶顺序主子式、二阶顺序主子式、三阶顺序主子式（顺序主子式是针对方阵而言的，几阶方阵就有几个顺序主子式）。

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一阶顺序主子式为（取第一行、第一列）：$|2|=2$；

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二阶顺序主子式为（取第一、二行，第一、二列）：$\begin{vmatrix}2&2\\2&5\end{vmatrix}=6$；

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三阶顺序主子式为（取第一、二、三行，第一、二、三列）：$\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}=10$。

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式都大于 0。

综上所述（矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式都大于 0），矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵。

3．正定矩阵的第 3 种证明方法

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵并且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 合同，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

注意： 这不是单向的，而是充分必要条件。也就是说：如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不满足“矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵并且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 合同”，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定不是正定矩阵。

例. 试证明矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ 是正定矩阵。

解： 本题用刚刚讲的“正定矩阵的第 3 种证明方法”来证明。

$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}$，所以 $A^{\mathrm{T}}=A$，即矩阵 A 为对称矩阵；接下来只需证明矩阵 A 与单位矩阵 E（$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$）合同即可，这里，用上 6.11 节中所讲的两个对称矩阵合同的充分必要条件来证明。

矩阵 A 对应的二次型为：$f_A=2x_1^2+3x_2^2+5x_3^2$，由于 f_A 已经是标准形，所以 $f_A{}'=2x_1^2+3x_2^2+5x_3^2$，正惯性指数为 3，负惯性指数为 0。

单位矩阵 E 对应的二次型为：$f_B=x_1^2+x_2^2+x_3^2$，由于 f_B 已经是标准形，所以 $f_B{}'=x_1^2+x_2^2+x_3^2$，正惯性指数为 3，负惯性指数为 0。

由于标准形 $f_A{}'$ 与标准形 $f_B{}'$ 的正惯性指数、负惯性指数均相同，根据 6.11 节可知，矩阵 A 与单位矩阵 E 合同。

综上所述（矩阵 A 为对称矩阵且矩阵 A 与单位矩阵 E 合同），矩阵 A 是正定矩阵。

4．正定矩阵的第 4 种证明方法

若矩阵 A 为对称矩阵并且矩阵 A 可表示为 $A=C^{\mathrm{T}}C$（其中 C 为可逆矩阵），则矩阵 A 为正定矩阵。

注意：这不是单向的，而是充分必要条件。也就是说：如果矩阵 A 不满足“矩阵 A 为对称矩阵并且矩阵 A 可表示为 $A=C^{\mathrm{T}}C$（其中 C 为可逆矩阵）”，则矩阵 A 一定不是正定矩阵。

考研题 6.8　已知 n 阶矩阵 A 是正定矩阵，证明矩阵 A^{-1} 也是正定矩阵。

解：本题用刚刚讲的“正定矩阵的第 4 种证明方法”来证明。

由于矩阵 A 是正定矩阵，所以矩阵 A 一定是对称矩阵（正定矩阵一定是对称矩阵，这一点大家一定要牢记），所以有 $A^{\mathrm{T}}=A$。

先来证明 A^{-1} 是对称矩阵，证法如下。

记 A^{-1} 为矩阵 B，由于 A、B 互为逆矩阵，根据可逆矩阵的定义，有 $AB=E$、$BA=E$。由于 $AB=E$，所以 $(AB)^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}$。又因为 $E^{\mathrm{T}}=E$，所以 $(AB)^{\mathrm{T}}=E$。又由于 $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$，所以 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=E$。由于 $A^{\mathrm{T}}=A$，所以 $B^{\mathrm{T}}A=E$。

对比一下 $BA=E$ 和 $B^{\mathrm{T}}A=E$，可得：$B^{\mathrm{T}}=B$。所以矩阵 B 是对称矩阵，即 A^{-1} 是对称矩阵。

我们再来证明存在可逆矩阵 C，使得 $B=C^{\mathrm{T}}C$。证法如下。

已知矩阵 A 是正定矩阵，由“正定矩阵的第 4 种证明方法”可知，存在可逆矩阵 D，使得：

$A=D^{\mathrm{T}}D$　　　　（1）式

（1）式的等式两侧求逆，得：

$A^{-1}=(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}$　　　　（2）式

由于 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，所以（2）式可以变为：

$A^{-1}=D^{-1}(D^{\mathrm{T}})^{-1}$　　　　（3）式

由于任意一个矩阵 A 都满足 $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$，所以（3）式可以变为：

$A^{-1}=((D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}})^{-1}(D^{\mathrm{T}})^{-1}$　　　　（4）式

由第 2 章的公式 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$，再结合（4）式，有：

$A^{-1}=((D^{\mathrm{T}})^{-1})^{\mathrm{T}}(D^{\mathrm{T}})^{-1}$　　　　（5）式

记可逆矩阵 $(D^{\mathrm{T}})^{-1}$ 为矩阵 C，则（5）式变为：

$A^{-1}=C^{\mathrm{T}}C$　　　　（6）式

综上所述【矩阵 A^{-1} 是可逆矩阵并且矩阵 A^{-1} 满足 $A^{-1}=C^{\mathrm{T}}C$（其中矩阵 C 为可逆矩阵）】,所以矩阵 A^{-1} 是正定矩阵。

5．正定矩阵的第 5 种证明方法

若矩阵 A 是正定矩阵，则所有与矩阵 A 合同的矩阵都是正定矩阵。

例．$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，矩阵 B 与矩阵 A 合同，试证明矩阵 B 是正定矩阵。

解：$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，所以 $A^{\mathrm{T}}=A$，即矩阵 A 为对称矩阵；由于矩阵 A 的 3 个特征值为：$\lambda_1=1$、$\lambda_2=1$、$\lambda_3=10$（计算过程省略），所以矩阵 A 的所有特征值都大于 0。

综上所述（矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都大于 0），矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵。又由于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同，根据“正定矩阵的第 5 种证明方法”，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵。

6.12.2 正定二次型的证明方法

再看正定二次型的证明方法，正定二次型的证明方法一共有 3 种。

1．正定二次型的第 1 种证明方法

通过正定二次型的定义来证明。

例．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 是正定二次型，因为当 x_1、x_2、x_3 不全为 0 时，$x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 恒大于 0。

例．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2$ 不是正定二次型，因为当 x_1、x_2、x_3 不全为 0 时，$x_1^2-x_2^2+x_3^2$ 并不是恒大于 0（例如：当 $x_1=0$、$x_2=1$、$x_3=0$ 时，$x_1^2-x_2^2+x_3^2=-1<0$）。

例．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2$ 不是正定二次型，因为当 x_1、x_2、x_3 不全为 0 时，$x_1^2+x_2^2$ 并不是恒大于 0（例如：当 $x_1=0$、$x_2=0$、$x_3=1$ 时，$x_1^2+x_2^2=0$）。

但是大家一定要注意，如果此题的二次型变为 $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$，那么就是正定二次型。

2．正定二次型的第 2 种证明方法

将所给二次型化为标准形（用正交变换法或者用配方法都可以），若标准形的正惯性指数等于 n（n 为未知数的个数。也就是说，f 后面的括号里有几个未知数，n 就是几），则该二次型为正定二次型。

注意：这不是单向的，而是充分必要条件。也就是说：如果将所给二次型化为标准形后，标准形的正惯性指数不等于 n，则所给二次型一定不是正定二次型。

例．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3$ 是不是正定二次型？

解：将所给二次型化为标准形（这里用配方法）。

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3\\&=2(x_1-x_2)^2-x_2^2-2x_2x_3-4x_3^2\\&=2(x_1-x_2)^2-(x_2+x_3)^2-3x_3^2\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1-x_2\\y_2=x_2+x_3\\y_3=x_3\end{cases}$

所以二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3$ 化成的标准形是：$2y_1^2-y_2^2-3y_3^2$。

正惯性指数是 1，而 n 是 3，由于 $1\neq3$，所以该二次型不是正定二次型。

3．正定二次型的第 3 种证明方法

若二次型的对应矩阵为正定矩阵，则该二次型为正定二次型。

这种证明方法说明前面所讲的那 5 种证明正定矩阵的方法也可以用来证明正定二次型。

例．证明二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 是正定二次型。

解：此二次型的对应矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，只要能证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵就可以了。

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵；由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值分别为：$\lambda_1=1$、$\lambda_2=1$、$\lambda_3=10$（计算过程省略），所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都大于 0。

综上所述（矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都大于 0），矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵。所以二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 是正定二次型。

第二部分

高等数学

- 极限与连续
- 导数与微分
- 微分中值定理及其应用
- 一元函数积分学
- 微分方程
- 多元函数微分学
- 二重积分

第1章

极限与连续

1.1 极限长什么样

极限是高等数学中最重要的知识点之一，本节我们来看看极限长什么样。

极限分为两种，分别是：函数的极限、数列的极限。

函数的极限长这个样子：“$\lim\limits_{x\to某某}$”。

数列的极限长这个样子：“$\lim\limits_{n\to某某}$”。

大家看见了吧，函数的极限和数列的极限非常好区分，它们的区别仅仅在于到底是“$x\to$”还是“$n\to$”。如果是“$x\to$”，那么就是函数的极限；如果是“$n\to$”，那么就是数列的极限。

我们来看几个例子。

例. 请判断 $\lim\limits_{x\to3}(2x+3)$、$\lim\limits_{x\to1}(\sin x+\cos x)$、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x}$、$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}$、$\lim\limits_{n\to\infty}2n$、$\lim\limits_{n\to\infty}4n^2$ 各属于哪种极限。

解： 由于 $\lim\limits_{x\to3}(2x+3)$、$\lim\limits_{x\to1}(\sin x+\cos x)$、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x}$、$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$ 这四者都是“$x\to$”，所以这四者属于函数的极限；由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}$、$\lim\limits_{n\to\infty}2n$、$\lim\limits_{n\to\infty}4n^2$ 这三者都是“$n\to$”，所以这三者属于数列的极限。

相信大家现在已经可以轻松地区分开函数的极限与数列的极限了。

1.2 极限的计算方法

由于极限分为“函数的极限”和“数列的极限”两大类，所以在讲解极限的计算方法时，也要分“函数的极限的计算方法”和“数列的极限的计算方法”。

1.2.1 函数的极限的计算方法

函数的极限的计算方法一共有四种，分别是：基本计算方法、等价无穷小法、洛必达法则法、固定套路法。

方法 1. 基本计算方法（包括代入法、画图法、9 个小技巧）

先来讲一下基本计算方法中的“代入法”。

代入法指的是直接将 x 趋于的那个值代入到 $f(x)$ 中。

来看几个例子。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to3}(2x+3)$。

解： 由于此题是“$x\to$”，所以此题属于函数的极限，采用代入法来做。由于是“$x\to3$”，所以直接把 $x=3$ 代入到 $2x+3$ 中即可，有

$$\lim_{x\to3}(2x+3)=2\times3+3=9$$

注意：用代入法时前面的 lim 一定要去掉，如本题中，就不能写成 $\lim\limits_{x\to3}(2x+3)=\lim\limits_{x\to3}(2\times3+3)$，而要写成 $\lim\limits_{x\to3}(2x+3)=2\times3+3$。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to1}(\sin x+\cos x)$。

解： 由于此题是“$x\to$”，所以此题属于函数的极限，采用代入法来做。由于是“$x\to1$”，所以直接把 $x=1$ 代入

到 $\sin x+\cos x$ 中即可，有

$$\lim_{x\to 1}(\sin x+\cos x)=\sin 1+\cos 1$$

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)$ 。

解： 由于此题是“ $x\to$ ”，所以此题属于函数的极限，采用代入法来做。由于是“ $x\to 0$ ”，所以直接把 $x=0$ 代入到 $\sin x+\cos x$ 中即可，有

$$\lim_{x\to 0}(\sin x+\cos x)=\sin 0+\cos 0=0+1=1$$

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{-2x}$ 。

解： 由于此题是“ $x\to$ ”，所以此题属于函数的极限，采用代入法来做。由于是“ $x\to 0$ ”，所以直接把 $x=0$ 代入到 e^{-2x} 中即可，有

$$\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^{-2x})=\mathrm{e}^{-2\times 0}=\mathrm{e}^{0}=1$$

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\mathrm{e}^{-2x}$ 。

解： 本题与上面的 4 道题是有区别的，在于：上面的 4 道题中 x 趋于的值的右上角什么也没写，而本题中 x 趋于的值的右上角写了一个加号。

x 趋于的值的右上角不仅可以写加号，还可以写减号，那么像这种右上角写了加号或减号的题我们应该如何去做呢？

非常简单，在用代入法的时候，根本不用关注 x 趋于的值的右上角是否写加、减号，而是直接把 x 趋于的值代入就可以了。

由此可知，本题的做法和上一道题的做法完全一样，没有任何区别，即

$$\lim_{x\to 0^{+}}(\mathrm{e}^{-2x})=\mathrm{e}^{-2\times 0}=\mathrm{e}^{0}=1$$

那么 $\lim\limits_{x\to 0^{-}}\mathrm{e}^{-2x}$ 大家会不会算呢？答案是多少？答案当然也是1！因为刚刚说了，用代入法时根本不用关注 x 趋于的值的右上角是否写加、减号，而是直接把 x 趋于的值代入就可以了，所以有：$\lim\limits_{x\to 0^{-}}\mathrm{e}^{-2x}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\mathrm{e}^{-2x}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{-2x}=\mathrm{e}^{-2\times 0}$ $=\mathrm{e}^{0}=1$ 。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 4}12$ 。

解： 由于此题是“ $x\to$ ”，所以此题属于函数的极限，采用代入法来做。由于是“ $x\to 4$ ”，所以直接把 $x=4$ 代入到12 中即可，有

$$\lim_{x\to 4}12=12$$

通过这道题想告诉大家的是：**常数的极限永远是它本身。**

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 4}12x$ 。

解： 在做这道题之前先告诉大家一点，那就是：$\lim\limits_{x\to\Delta}cf(x)=c\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)$ ，其中 c 是不为 0 的常数。换句话说，常数可以提到极限之外。

现在就利用这个知识点来做本题，可知

$$\lim_{x\to 4}12x=12\lim_{x\to 4}x$$

也就是说，现在只需算出 $\lim\limits_{x\to 4}x$ ，然后用算出的结果乘以12 即可。

由于是“ $x\to$ ”，所以 $\lim\limits_{x\to 4}x$ 属于函数的极限，采用代入法来做。由于是“ $x\to 4$ ”，所以直接把 $x=4$ 代入到 x 中即可，有

$$\lim_{x\to 4}x=4$$

所以

$$\lim_{x\to 4}12x=12\lim_{x\to 4}x=12\times 4=48$$

当然，本题也可以根本不用知识点 $\lim\limits_{x\to\Delta}cf(x)=c\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)$ 来做，就是说本题可以直接用代入法将 $x=4$ 代入到 $12x$ 中。

相信通过以上几个例子，大家对于代入法已经掌握得很好了。不过有些题无法使用代入法，下面给大家举几个例子。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}$。

解： 由于此题是“$x\to$”，所以此题属于函数的极限，用代入法看看能不能做。由于是“$x\to 0^+$”，所以直接把 $x=0$ 代入到 $\dfrac{1}{x}$ 中，结果发现代入以后是 $\dfrac{1}{0}$，而 $\dfrac{1}{0}$ 没有意义，所以此题根本不能用代入法来做。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$。

解： 由于此题是“$x\to$”，所以此题属于函数的极限，用代入法看看能不能做。由于是“$x\to 0^+$”，所以直接把 $x=0$ 代入到 $\ln x$ 中，结果发现代入以后是 $\ln 0$。而，$y=\ln x$ 的定义域是 $x>0$，$\ln 0$ 没有意义，所以此题根本不能用代入法来做。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}$。

解： 由于此题是“$x\to$”，所以此题属于函数的极限，用代入法看看能不能做。由于是“$x\to +\infty$”，而“$+\infty$”是无法代入的，所以此题也不能用代入法来做。

由此可知，代入法有很大的局限性（当代入后没有定义或者是“$x\to\infty$”时，无法使用代入法）。用代入法不能做出所有函数的极限的计算题，可以使用画图法有效地弥补代入法的不足。

现在我们来讲一下基本计算方法中的“画图法”。

画图法指的是画出 $f(x)$ 的图，然后看一下当 x 越来越接近某个值时，$f(x)$ 越来越接近哪个值。

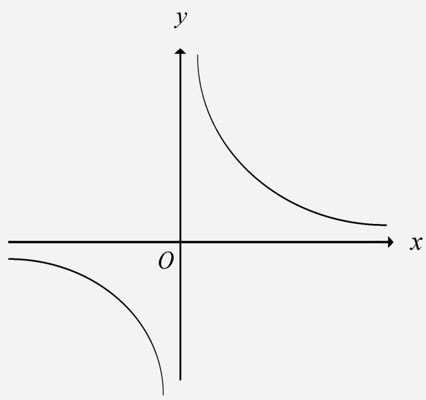
在看例题之前，请大家注意一下，在使用代入法时不用关注 x 趋于的值的右上角的加、减号，而是直接把 x 趋于的值代入就可以了；但是使用画图法时，必须要关注 x 趋于的值的右上角是写加号还是减号。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}$。

解： 由于此题是“$x\to$”，所以此题属于函数的极限，用代入法发现 $\dfrac{1}{0}$ 没有意义，所以此题不能用代入法来做。

因此，使用画图法做，具体做法如下。

首先，在平面直角坐标系中画出 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像。



由于是“$x\to 0^+$”，所以要看看当 x 从右侧（如果是“$x\to 0^-$”，那就是从左侧）越来越接近 0 时，$\dfrac{1}{x}$ 越来越接近什么值。从图中可以很明显地看出，当 x 从右侧越来越接近 0 时（即 x 取 0.3、x 取 0.2、x 取 0.1、x 取 0.01 等），$\dfrac{1}{x}$ 越来越接近 $+\infty$，所以本题的答案是 $+\infty$。

注意： 与代入法一样，用画图法时前面的 lim 一定要去掉，如本题中，就不能写成 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}+\infty$，而要写成 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$。

那么，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}$ 如何计算呢？提示：用不了代入法，只能用画图法，图像和上面的图是一样的，因为都是 $\dfrac{1}{x}$。由于是“$x\to 0^-$”，所以现在来看看当 x 从左侧越来越接近 0 时，$\dfrac{1}{x}$ 越来越接近什么值。从图中可以很明显地看出，

当 x 从左侧越来越接近 0 时（即 x 取 -0.3 、x 取 -0.2 、x 取 -0.1 、x 取 -0.01），$\frac{1}{x}$ 越来越接近 $-\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ 。

最后，给大家讲一个很重要的知识点，那就是：若一道极限的计算题最终的计算结果是 ∞，则表明极限不存在。

这样讲可能有不少同学不太明白，以本题为例，刚才已经计算完 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ 。那么，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$ 存在吗？有两个选项。

选项 1：存在，是 $+\infty$ 。

选项 2：不存在。

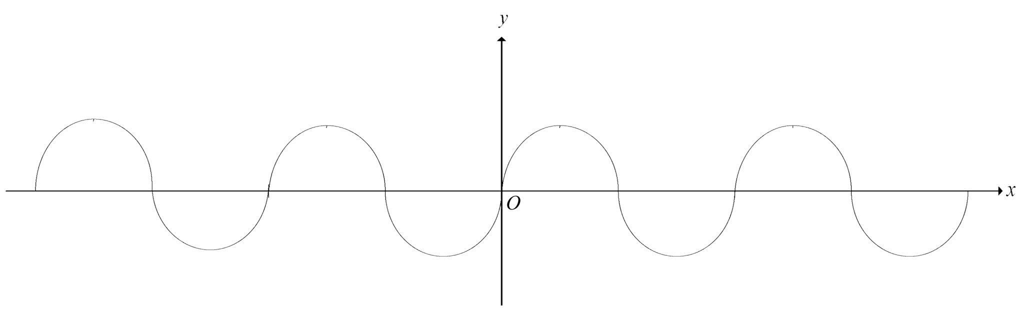
正确的选项应该是选项 **2**。

但是，“极限不存在”这五个字就特指“ ∞ ”这一种情况吗？当然不是，那么“极限不存在”指的是哪些情况呢？

“极限不存在”一共包含两种情况，第一种是“ ∞ ”，第二种是“虽然不存在，但却不是 ∞ ”。

下面举个例子，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 。先来看看 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 能不能用代入法来做，明显不能，因为 ∞ 是无法代入的，于是尝试使用画图法来做。

首先，需要在平面直角坐标系中画出函数 $y=\sin x$ 的图像，图像如下：



从图像中可以明显看出，当 x 越来越接近 $+\infty$ 时，$\sin x$ 并不会越来越接近某个数（因为 $y=\sin x$ 是周期函数），所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在。

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 虽然不存在，但却不是 ∞ 。

总结一下：

“极限不存在”一共包含两种情况，第一种是“ ∞ ”，第二种是“虽然不存在，但却不是 ∞ ”。

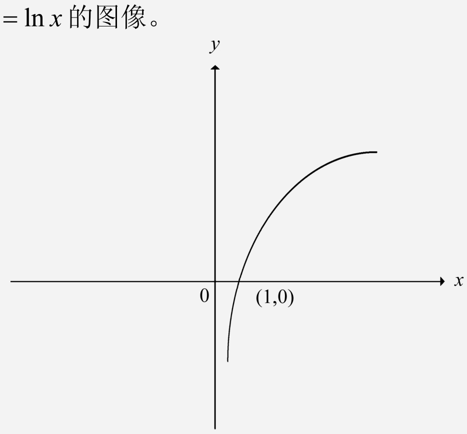
下面再来看几道例题。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$ 。

解： 由于此题是“ $x\to$ ”，所以此题属于函数的极限，用代入法看看能不能做。由于是“ $x\to 0^+$ ”，所以直接把 $x=0$ 代入到 $\ln x$ 中，结果发现代入以后是 $\ln 0$ ，而 $y=\ln x$ 的定义域是 $x>0$ ，所以 $\ln 0$ 没有意义，此题不能用代入法来做。

因此，使用画图法做，具体做法如下。

首先，在平面直角坐标系中画出 $y=\ln x$ 的图像。



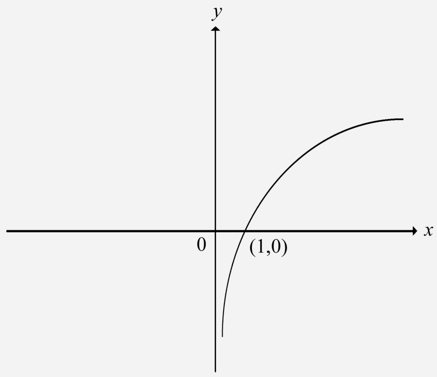
由于是“ $x\to 0^+$ ”，所以观察当 x 从右侧越来越接近 0 时，$\ln x$ 越来越接近什么值。从图中可以明显看出，当 x 从右侧越来越接近 0 时（即 x 取 0.3 、x 取 0.2 、x 取 0.1、x 取 0.01 等），$\ln x$ 越来越接近 $-\infty$ ，所以本题的答案是 $-\infty$ 。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$ 。

解： 由于此题是“ $x\to$ ”，所以此题属于函数的极限，用代入法看看能不能做。由于是“ $x\to+\infty$ ”，而“ $+\infty$ ”

是无法代入的，所以此题不能用代入法来做，可以用画图法做，具体做法如下。

首先，在平面直角坐标系中画出 $y=\ln x$ 的图像。

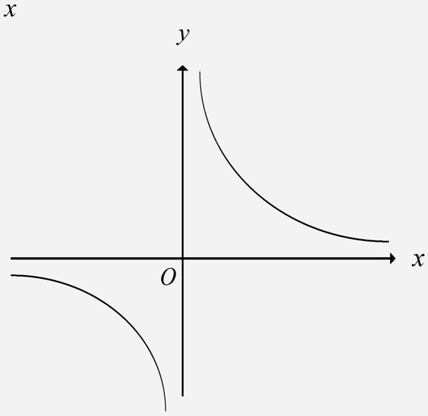


由于是“$x\to+\infty$”，所以观察当 x 越来越接近 $+\infty$ 时，$\ln x$ 越来越接近什么值。从图中可以明显看出，当 x 越来越接近 $+\infty$ 时（即 x 取 1000、x 取 10000、x 取 100000、x 取 1000000 等），$\ln x$ 越来越接近 $+\infty$，所以本题的答案是 $+\infty$。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$。

解： 由于本题是“$x\to$”，所以本题属于函数的极限，用代入法看看能不能做。由于是“$x\to\infty$”，而“∞”是无法代入的，所以此题不能用代入法来做，可以用画图法做，具体做法如下。

首先，在平面直角坐标系中画出 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像。



由于本题说的是“$x\to\infty$”，而“$x\to\infty$”包括“$x\to+\infty$”和“$x\to-\infty$”两类。

也就是说，本题只是笼统地说“$x\to\infty$”，并没有具体指定到底是“$x\to+\infty$”还是“$x\to-\infty$”，那该怎么办？

解决的方法是：这两种情况都要考虑。也就是说，为了计算本题的问题 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$，既要计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}$，又要计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}$。

由前几道题做铺垫，可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$、$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$。

现在已经算出了 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$、$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$，那么 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$ 等于多少呢？下面要给大家讲四个结论，等讲完这四个结论，大家自然就知道 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$ 等于多少了。

注意，接下来的四个结论并不是只针对这道题的，而是通用的。

第一个结论： $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。**注，其中 A 为任意常数或 ∞。**

第二个结论： $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，但不是 ∞。

第三个结论： $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$。**注，其中 A 为任意常数或 ∞。**

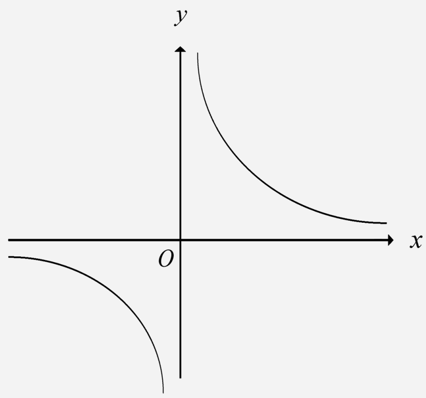
第四个结论： $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在，但不是 ∞。

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$，根据第三个结论可知，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ 。

解： 由于本题是“ $x\to$ ”，所以本题属于函数的极限，用代入法看看能不能做。由于是“ $x\to 0$ ”，所以直接把 $x=0$ 代入 $\dfrac{1}{x}$ 中，结果发现代入以后是 $\dfrac{1}{0}$ ，而 $\dfrac{1}{0}$ 没有意义，所以此题不能用代入法来做，可以用画图法做，具体做法如下。

首先，在平面直角坐标系中画出 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像。



由于本题说的是“ $x\to 0$ ”，而“ $x\to 0$ ”包括“ $x\to 0^-$ ”和“ $x\to 0^+$ ”两类。

也就是说，本题只是笼统地说“ $x\to 0$ ”，并没有具体指定到底是“ $x\to 0^-$ ”还是“ $x\to 0^+$ ”，那该怎么办？

解决的方法是：这两种情况都要考虑。也就是说，为了计算本题的问题 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ ，既要计算 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}$ ，又要计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}$ 。

有前几道题做铺垫，可知 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ 、 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ 。

如果一个极限的计算结果是 $-\infty$ 或者 $+\infty$ ，那么此计算结果也可以写为 ∞ 。

由此可知：

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=\infty$ ， $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\infty$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=\infty$ 、 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\infty$ ，根据上一道题中所讲的四个结论中的第一个结论可知， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$ 。

例. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0\\ 28, & x=0\\ \dfrac{1}{x}, & x<0\end{cases}$ ，请计算 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 。

解： 本题与之前的所有题都不同，之前所有题的 lim 后面跟的都是一个具体的函数表达式，而本题则不同，本题的 lim 后面跟的是 $f(x)$ 。那怎么办？很显然，应该把 $f(x)$ 显化。可是 $f(x)$ 是一个分段函数，有三段，那么应该将 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化成这三段中的哪一段呢？本题说的是“ $x\to 0$ ”，就是“ x 趋于 0”。什么叫“ x 趋于 0”？意思是 x 无限地接近 0 但却永远不到达 0。既然永远不到达 0，因此绝对不能将 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化成 28。那么到底应该将 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化成 $\sin x$ 还是 $\dfrac{1}{x}$ 呢？这就要看 x 到底是怎样趋于 0 的。如果 x 是从左侧趋于 0（如 x 取 $-0.1,-0.01,-0.001$ 等），那么由于 $x<0$ ，所以应该将 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化成 $\dfrac{1}{x}$ ；如果 x 是从右侧趋于 0（如 x 取 $0.1,0.01,0.001$ 等），那么由于 $x>0$ ，所以应该将 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化成 $\sin x$ 。

所以有：

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}$ ，用画图法求得答案为 $-\infty$ 。

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x$ ，用代入法求得答案为 0 。

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ ，所以根据四个结论中的第二个结论可知， $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在。

到目前为止，代入法和画图法就基本讲完了。注意，是“基本”讲完而不是“彻底”讲完。也就是说，还有一

点内容没有讲，那就是：**代入法、画图法都只能把需要求极限的那个函数当成一个整体来考虑，而不能局部使用。**

以上加粗的语句其实是一个非常重要的知识点。现在大家可能还不太明白以上加粗的语句的意思，没关系，下面来看几个例子。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x}{x}$。

解： 有的同学这样做，由代入法可知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x}{x}=\dfrac{0+x}{x}=\dfrac{x}{x}=1$。这种做法完全错误，本题的答案不是 1。这么做为何错了呢？因为只对 $\dfrac{\sin x+x}{x}$ 的一部分（$\sin x$）使用了代入法，相当于是局部使用了代入法，这是不允许的，大家一定要注意。

那么本题究竟应该怎么做呢？这个大家先不用管，后面会讲。

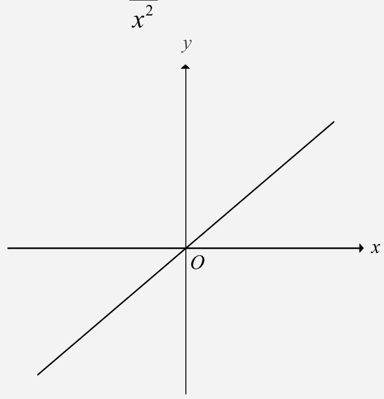
再来看一个例子。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$。

解： 有的同学这样做，由画图法可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\dfrac{0}{\frac{1}{x^2}}=0$。这种做法完全错误，本题的答案不是 0。那么，这么做为何错了呢？因为只对 $\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$ 的一部分（$\dfrac{1}{x}$）使用了画图法，相当于是局部使用了画图法，这是不允许的，大家一定要注意。

那么本题应该怎么做呢？

正确的做法应该是：先对 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$ 进行化简，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{1}{x}\times x^2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x$，然后利用画图法，画出 $y=x$ 的图。



由于是“$x\to+\infty$”，所以观察当 x 越来越接近 $+\infty$ 时，x 越来越接近什么。从图中可以明显看出，当 x 越来越接近 $+\infty$ 时，x 越来越接近 $+\infty$，所以本题的答案是 $+\infty$。

通过以上两个例子，想必大家应该已经明白了为什么**“代入法、画图法都只能把需要求极限的那个函数当成一个整体来考虑，而不能局部使用。”**

函数极限的基本计算方法中还剩下“9 个小技巧”没有讲，现在就来给大家讲。

9 个小技巧介绍如下。

小技巧 1. 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=A$、$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=B$，则有

① $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$ (其中A,B为任意常数)

② $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)\times g(x)]=A\times B$ (其中A,B为任意常数)

③ $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$ （其中 A 为任意常数，B 为不为 0 的任意常数）

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ 。

解： 首先来看一下这道题能不能用代入法来做。由于本题说的是 $x\to-\infty$ ，而 ∞ 是不能代入的，所以本题无法使用代入法。

现在再来看看这道题能不能用画图法来做。首先应画出函数 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ 的图像。可实际上，函数 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ 的图像并不容易画出来，因此本题利用画图法来做不太现实。

那么，本题到底应该用什么方法做呢？这里可以使用小技巧 1 来解决，具体做法如下。

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{x}\times\mathrm{e}^x)$$

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ ， $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$ ，根据小技巧 1 可知， $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=0\times0=0$ 。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x})$ 。

解： 首先来看一下这道题能不能用代入法来做。由于本题说的是 $x\to-\infty$ ，而 ∞ 是不能代入的，所以本题无法使用代入法。

现在再来看看这道题能不能用画图法来做。首先应该画出函数 $y=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x}$ 的图像。可是实际上，函数 $y=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x}$ 的图像并不容易画出来，因此本题利用画图法来做不太现实。

那么，本题到底应该用什么方法做呢？这里可以使用小技巧 1 来解决，具体做法如下。

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$ ， $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ ，根据小技巧 1 可知， $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x})=0$ 。

小技巧 2. 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$ 、 $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=1$ ，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\infty$ 。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}$ 。

解： 如果没讲小技巧 2，则只能用画图法，画出 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图，然后观察当 x 从右侧越来越接近 0 时， $\dfrac{1}{x}$ 越来越接近什么值，答案是 $+\infty$ 。

而现在可以利用小技巧 2 来做。由代入法可知 $\lim\limits_{x\to0^+}x=0$ ， $\lim\limits_{x\to0^+}1=1$ ，由小技巧 2 可知， $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=\infty$ 。

可能有的同学会感到奇怪，为何用画图法做出的答案为 $+\infty$ ，而用刚刚讲完的小技巧 2 做出的答案是 ∞ 呢？难道这两个答案都对吗？回答是都对。之前讲过，如果一个极限的计算结果是 $-\infty$ 或者 $+\infty$ ，那么此计算结果也可以写为 ∞ （当然，对于本题来说，用画图法做出的 $+\infty$ 更加精确）。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sin x\times x}$ 。

解： 由代入法可知 $\lim\limits_{x\to0}(\sin x\times x)=0\times0=0$ ， $\lim\limits_{x\to0}1=1$ ，由小技巧 2 可知， $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sin x\times x}=\infty$ 。

小技巧 3. 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$ ， $g(x)$有界，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)\times g(x)]=0$ 。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to0}[x\times\cos(\arctan\dfrac{3x}{16})]$

解： 如果没讲小技巧 3，则只能用代入法：

$$\lim_{x\to0}[x\times\cos(\arctan\frac{3x}{16})]=0\times\cos(\arctan\frac{3\times0}{16})=0\times\cos(\arctan0)=0\times\cos0=0\times1=0$$

而现在，由于 $\lim\limits_{x\to0}x=0$ ， $y=\cos x$ 是有界函数（大家都应该知道， $y=\cos x$ 的值域是 $[-1,1]$ ，所以 $y=\cos x$ 有界），所以根据小技巧 3 可知，$\lim\limits_{x\to0}[x\times\cos(\arctan\dfrac{3x}{16})]=0$ 。实际上，由小技巧 3 可知，无论“ $\lim\limits_{x\to0}(x\times\cos\square)$ ”中的“ $\square$ ”是什么值， $\lim\limits_{x\to0}(x\times\cos\square)$ 都是 0 。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 3}[\sin(x-3)\times\sin(\frac{8x+5}{6})]$ 。

解： 如果没讲小技巧 3，则只能用代入法：

$\lim\limits_{x\to 3}[\sin(x-3)\times\sin(\frac{8x+5}{6})]=\sin(3-3)\times\sin(\frac{8\times 3+5}{6})=\sin 0\times\sin\frac{29}{6}=0\times\sin\frac{29}{6}=0$

而现在由于 $\lim\limits_{x\to 3}\sin(x-3)=0$ ， $y=\sin x$ 是有界函数（ $y=\sin x$ 的值域是 $[-1,1]$ ），所以根据小技巧 3 可知， $\lim\limits_{x\to 3}[\sin(x-3)\times\sin(\frac{8x+5}{6})]=0$ 。实际上，由小技巧 3 可知，无论“ $\lim\limits_{x\to 3}[\sin(x-3)\times\sin\square\ ]$ ”中的“$\square$”是什么值， $\lim\limits_{x\to 3}[\sin(x-3)\times\sin\square\ ]$ 都是 0 。

小技巧 4. 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=\infty$ ， $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=\infty$ ，则

① $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)g(x)=\infty$ 。

② $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)\times\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=\infty$ 。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x\times\frac{1}{x})$ 。

解： 由画图法可知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ ， $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ ，由小技巧 4 的结论①可知 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x\times\frac{1}{x})=\infty$ ，所以本题的答案为 ∞ 。当然，如果更精确的话，答案应该应该写为 $-\infty$ ，因为 $(+\infty)\times(-\infty)=-\infty$ 。

小技巧 5. 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=\infty$ ， $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=1$ ，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}\frac{g(x)}{f(x)}=0$ 。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x\times\ln x}$ 。

解： 由画图法可知， $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ ， $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ ，由小技巧 4 的结论①可知， $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\times\ln x)=\infty$ ，由代入法可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$ 。

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\times\ln x)=\infty$ ， $\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$ ，根据小技巧 5 可知， $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x\times\ln x}=0$ 。

小技巧 6.

① 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=\infty$ ， $g(x)$ 有界，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)+g(x)]=\infty$ 。

② 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=\infty$ ， c 为任意常数，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)+c=\infty$ 。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)$ 。

解： 由画图法可知 $\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$ ，而 $y=\sin x$ 是有界函数，所以由小技巧 6 的结论①可知， $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)=\infty$ 。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)$ 。

解： 由画图法可知 $\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$ ，而 $y=3$ 是有界函数（所有常函数都是有界函数），所以由小技巧 6 的结论①可知 $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)=\infty$ 。

小技巧 7.

① 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=+\infty$ ， $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=+\infty$ ，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)+g(x)]=+\infty$

② 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=+\infty$ ， $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=+\infty$ ，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)-g(x)]$无法用目前已讲的方法解答。

③ 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=+\infty$ ， $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=-\infty$ ，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)+g(x)]$无法用目前已讲的方法解答。

④ 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=+\infty$ ， $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=-\infty$ ，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)-g(x)]=+\infty$ 。

⑤ 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=-\infty$ ， $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=+\infty$ ，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)+g(x)]$无法用目前已讲的方法解答。

⑥ 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=-\infty$ ， $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=+\infty$ ，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)-g(x)]=-\infty$ 。

⑦ 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=-\infty$ ， $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=-\infty$ ，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)+g(x)]=-\infty$ 。

⑧ 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=-\infty$ ， $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=-\infty$ ，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)-g(x)]$无法用目前已讲的方法解答。

大家可能觉得小技巧 7 很多，不好记，其实，小技巧 7 非常容易，不用死记硬背，只记住一句话就可以了：**同号无穷相减无法用目前已讲的方法解答，其他情况答案都是确定的。**

可能大家仍然不明白这 8 条结论应该如何去记，因此现在要详细解释一下上面加粗的那句话。

先解释**“同号无穷相减无法用目前已讲的方法解答”。**

先来看第②条，$(+\infty)-(+\infty)$，两个正无穷相减，即“同号无穷相减”。

再来看第③条，$(+\infty)+(-\infty)$。而大家初中就学过，“加负数”等于“减正数”，所以$(+\infty)+(-\infty)$和$(+\infty)-(+\infty)$是一个意思，也可以看成是两个正无穷相减，即“同号无穷相减”。

再来看第⑤条，$(-\infty)+(+\infty)$。而大家初中就学过，“加正数”等于“减负数”，所以$(-\infty)+(+\infty)$和$(-\infty)-(-\infty)$是一个意思，也可以看成是$(-\infty)-(-\infty)$，两个负无穷相减，即“同号无穷相减”。

大家再来看第⑧条，第⑧条是两个负无穷相减，即“同号无穷相减”。

综上所述，第②、③、⑤、⑧条都是“同号无穷相减”，而第②、③、⑤、⑧条的结论都是“无法用目前已讲的方法解答”，这就是所谓的**“同号无穷相减无法用目前已讲的方法解答”。**

然后再解释**“其他情况答案都是确定的”。**

所谓“其他情况”，指的就是“不是同号无穷相减的情况”。在以上 8 条中，第①、④、⑥、⑦条属于“不是同号无穷相减的情况”，而这 4 条的答案都是确定的，这就是所谓的**“其他情况答案都是确定的”。**

关于小技巧 7 中的这 8 条应该如何去记已经告诉大家了。每当讲课讲到这里时，总会有一些同学问这样一个问题：“老师，我按照您所讲的**同号无穷相减无法用目前已讲的方法解答，其他情况答案都是确定的，**确实能知道何时答案确定、何时无法用目前已讲的方法解答，但是您没给我们解释‘当答案确定时，答案究竟是多少’的记忆方法。所以我想问问您，‘当答案确定时，答案究竟是多少’应该如何去记呢？”

对于这个问题，我的回答是：很简单，就以以上 8 条中的第①条为例。

第①条是这么描述的：若$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=+\infty$，则$\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)+g(x)]=+\infty$。两个正无穷大相加，也就意味着两个特别大的正数相加，那最后答案是多少？很明显还是一个特别大的正数，所以结论是$+\infty$。第④、⑥、⑦条也是同理。现在大家都应该明白了吧。

到目前为止，小技巧 7 及小技巧 7 的记忆方法已经都给大家讲完了。下面来看几道例题。

例．请计算$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+\mathrm{e}^x)$。

解：首先来看一下这道题能不能用代入法来做。由于本题说的是$x\to+\infty$，而∞是不能代入的，所以本题无法使用代入法来做。

现在再来看看这道题能不能用画图法来做。本题要想用画图法来做，首先应该画出函数$y=\ln x+\mathrm{e}^x$的图像。可是实际上，函数$y=\ln x+\mathrm{e}^x$的图像并不好画出来，因此本题利用画图法来做也不太现实。

那么，本题到底应该用什么方法去做呢？用小技巧 7 去做就可以了，具体做法如下。

由画图法可知$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$，所以由小技巧 7 的①可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+\mathrm{e}^x)=+\infty$。

例．请计算$\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x})$

解：首先来看一下这道题能不能用代入法来做。明显不能，因为 0 不能做分母。

现在再来看看这道题能不能用画图法来做。本题要想用画图法来做，首先应该画出函数$y=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}$的图像。可是实际上，函数$y=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}$的图像并不好画出来，因此本题利用画图法来做也不太现实。

那么，本题到底应该用什么方法去做呢？具体做法如下。

由代入法可知$\lim\limits_{x\to0}x^2=0$，$\lim\limits_{x\to0}1=1$，所以根据小技巧 2 可知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$。

由代入法可知$\lim\limits_{x\to0}x\tan x=0\times0=0$，$\lim\limits_{x\to0}1=1$，所以根据小技巧 2 可知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x\tan x}=\infty$。

由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x\tan x}=\infty$，所以$\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x})$属于$\infty-\infty$。

由于是同号无穷相减，由小技巧 7 可知，本题无法用已讲的方法解答（后续会讲解答方法）。

此时想必大多数同学心里都会想：这题是无穷相减，但是怎么就成了“同号”无穷相减呢？怎么就“同号”了呢？

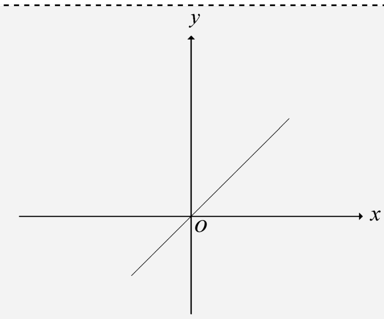
可以给大家这样解释，如果遇到类似这种只能判断出是“无穷相减”而不能判断出是“同号无穷相减”的题，则当作都是“同号无穷相减”。

小技巧 8. 若$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=\infty$，则$\lim\limits_{x\to\Delta}cf(x)=c\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=\infty$。（其中$c$是任意不为 0 的常数）

关于小技巧 8 的解释：大家千万不要认为小技巧 8 想告诉大家的是$\lim\limits_{x\to\Delta}cf(x)=c\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)$，这个式子在前面已经给大家讲完了。而小技巧 8 想告诉大家的是，当$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=\infty$时，$\lim\limits_{x\to\Delta}cf(x)=c\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=\infty$，仅此而已。

例．请计算$\lim\limits_{x\to+\infty}12x$。

解：先来计算一下$\lim\limits_{x\to+\infty}x$，用画图法来计算。在平面直角坐标系中画出函数$y=x$的图像。



从图像中可以明显看出，当 x 越来越接近 $+\infty$ 时，y 越来越接近 $+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$。

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$，12 是非零常数，所以根据小技巧 8 可知，$\lim\limits_{x\to+\infty} 12x=+\infty$。

小技巧 9. 当遇到抽象函数求极限时，首先要将 lim 深入进去，然后计算出结果，之后看看那个抽象函数在计算出的那个点处是否连续。若连续，则说明确实可以深入；若不连续，则说明不能深入。

下面来看几道例题。

例. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $f(2)=9$，求 $\lim\limits_{x\to0} f(3x^3+4x+2)$。

解： 大家现在不用看别的，就看本题的问题即可。本题的问题是 $\lim\limits_{x\to0} f(3x^3+4x+2)$，这就属于“抽象函数求极限”（因为带着“$f$”，所以是抽象）。按照小技巧 9 所述，首先要将 lim 深入到 f 里面去，即要计算出 $\lim\limits_{x\to0}(3x^3+4x+2)$。

由代入法可知，$\lim\limits_{x\to0}(3x^3+4x+2)=3\times0^3+4\times0+2=2$。

按照小技巧 9 所述，现在要看看函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处是否连续。大家现在可能会感觉奇怪：“老师，您还没给我们讲什么叫连续呢。”的确，确实还没给大家讲什么叫连续，但是这完全不影响大家理解小技巧 9（因为小技巧 9 只关注“是连续还是不连续”，而根本不关注“连续的定义是什么”）。

那么现在就看看函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处是否连续。由于题中说“函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续”，这已经明显告诉 $f(x)$ 在 $x=2$ 处是连续的，所以根据小技巧 9，有：

$\lim\limits_{x\to0} f(3x^3+4x+2)=f(\lim\limits_{x\to0}3x^3+4x+2)$ （1）式

由于刚才已经算出：

$\lim\limits_{x\to0}(3x^3+4x+2)=2$ （2）式

所以有

$f(\lim\limits_{x\to0}3x^3+4x+2)=f(2)$ （3）式

将（1）式、（3）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to0} f(3x^3+4x+2)=f(2)$ （4）式

由于题中说

$f(2)=9$ （5）式

将（4）式、（5）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to0} f(3x^3+4x+2)=9$ （6）式

例. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处的函数值是 $f(2)=9$，求 $\lim\limits_{x\to0} f(3x^3+4x+2)$。

解： 大家现在不用看别的，就看本题的问题即可。本题的问题是 $\lim\limits_{x\to0} f(3x^3+4x+2)$，这就属于“抽象函数求极限”（因为带着“$f$”，所以是抽象）。按照小技巧 9 所述，首先要将 lim 深入到 f 里面去，即要计算出 $\lim\limits_{x\to0}(3x^3+4x+2)$。

由代入法可知，$\lim\limits_{x\to0}(3x^3+4x+2)=3\times0^3+4\times0+2=2$。

按照小技巧 9 所述，现在要看看函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处是否连续。

由于题中**没有**任何一处说了“函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续”，所以这也就意味着根本不知道 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续还是不连续，这也正是本题与上一道题的唯一区别。所以，要分两种情况。

情况 1： 若函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，那么根据小技巧 9 有

$\lim\limits_{x\to0} f(3x^3+4x+2)=f(\lim\limits_{x\to0}3x^3+4x+2)$ （1）式

由于刚才已经算出了：

$\lim\limits_{x\to0}(3x^3+4x+2)=2$ （2）式

所以有

$f(\lim\limits_{x\to 0}3x^3+4x+2)=f(2)$　　（3）式

将（1）式、（3）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to 0}f(3x^3+4x+2)=f(2)$　　（4）式

由于题中说

$f(2)=9$　　（5）式

将（4）式、（5）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to 0}f(3x^3+4x+2)=9$　　（6）式

情况 2：若函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处不连续，那么根据小技巧 9 有

$\lim\limits_{x\to 0}f(3x^3+4x+2)\neq f(\lim\limits_{x\to 0}3x^3+4x+2)$

因此无法求出 $\lim\limits_{x\to 0}f(3x^3+4x+2)$ 。

例. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1,9)$ 内连续，且 $f(2)=9$ ，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(3x^3+4x+2)$ 。

解：大家现在不用看别的，就看本题的问题即可。本题的问题是 $\lim\limits_{x\to 0}f(3x^3+4x+2)$ ，这就属于“抽象函数求极限”(因为带着“ f ”，所以是抽象)。按照小技巧 9 所述，首先要将 lim 深入到 f 里面去，即要计算出 $\lim\limits_{x\to 0}(3x^3+4x+2)$ 。

由代入法可知， $\lim\limits_{x\to 0}(3x^3+4x+2)=3\times 0^3+4\times 0+2=2$ 。

按照小技巧 9 所述，本题的关键也是判断函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处是否连续。

在判断之前，先告诉大家一个非常重要的知识点：**如果某函数在某区间内连续，那么就意味着该函数在该区间内的任何一点都连续。**

有了这个知识点，这道题就变得很容易了。由于题中说“函数 $f(x)$ 在区间 $(1,9)$ 内连续”，而“ 2 ”这个数处于区间 $(1,9)$ 中，根据刚刚的知识点可知，函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处是连续的。所以根据小技巧 9，有：

$\lim\limits_{x\to 0}f(3x^3+4x+2)=f(\lim\limits_{x\to 0}3x^3+4x+2)$　　（1）式

由于刚才已经算出了：

$\lim\limits_{x\to 0}(3x^3+4x+2)=2$　　（2）式

所以有

$f(\lim\limits_{x\to 0}3x^3+4x+2)=f(2)$　　（3）式

将（1）式、（3）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to 0}f(3x^3+4x+2)=f(2)$　　（4）式

由于题中说

$f(2)=9$　　（5）式

将（4）式、（5）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to 0}f(3x^3+4x+2)=9$　　（6）式

到目前为止，函数的极限的计算方法中的方法 1 已经给大家讲完了，接下来学习函数的极限的计算方法中的方法 2。

方法 2. 等价无穷小法

首先，解释一下为什么要给大家讲方法 2。原因很简单，因为方法 1（基本计算方法）并不是万能的。下面举个例子。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ 。

解：看一下这道题能不能用方法 1（基本计算方法）来做。

基本计算方法分为代入法、画图法、9 个小技巧。

先看看这道题能不能用代入法来做。很显然不能，因为代入以后分母就是 0 了，而 0 是不能做分母的，所以这道题不能用代入法来做。

再来看看这道题能不能用画图法来做。要想用画图法来做这道题，就需要在平面直角坐标系中画出函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的图像。而函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的图像并不好画，所以这道题用画图法来做也不太现实。

那么 9 个小技巧呢？大家可以逐个验证，根本没有任何一个小技巧可以用来解这道题，因此这道题也不能用 9 个小技巧来做。

综上所述，用方法 1（基本计算方法）是无法做这道题的。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}$ 。

解： 看一下这道题能不能用方法 1（基本计算方法）来做。

基本计算方法分为代入法、画图法、9 个小技巧。

先看看这道题能不能用代入法来做。很显然不能，因为代入以后分母就是 0 了，而 0 是不能做分母的，所以这道题不能用代入法来做。

再来看看这道题能不能用画图法来做。要想用画图法来做这道题，就需要在平面直角坐标系中画出函数 $y=\dfrac{e^x-1}{x}$ 的图像。而函数 $y=\dfrac{e^x-1}{x}$ 的图像并不好画，所以这道题用画图法来做也不太现实。

那么 9 个小技巧呢？大家可以逐个验证，根本没有任何一个小技巧可以用来解这道题，因此这道题也不能用 9 个小技巧来做。

综上所述，用方法 1（基本计算方法）是无法做这道题的。

不再举更多的例子了，总之要告诉大家的是：基本计算方法并不是万能的。那么怎么办？很简单，下面给大家讲新的方法。

下面给出 9 个式子。

① $\sin\square\sim\square$ 。

② $\arcsin\square\sim\square$ 。

③ $\tan\square\sim\square$ 。

④ $\arctan\square\sim\square$ 。

⑤ $e^{\square}-1\sim\square$ 。

⑥ $a^{\square}-1\sim\square\ln a$ 。

⑦ $\ln(1+\square)\sim\square$ 。

⑧ $(1+b\square)^a-1\sim ab\square$ 。

⑨ $1-\cos\square\sim\dfrac{1}{2}\square^2$ 。

大家现在一定很困惑，因为不知道以上 9 个式子到底是什么意思。在解释以上 9 个式子之前，先说一件很重要的事情，那就是：**大家一定要把这 9 个式子牢牢背下来，背得越熟练越好。**

这 9 个式子中，都出现了“□”，下面先解释一下“□”的含义。

在 x 趋于某数的前提下，极限为 0 的那个参数或代数式就可以被当成“□”。

例. $\lim\limits_{x\to0}\cos 2x$，请问在本题中 $2x$ 可以被当成“□”吗？ x 可以被当成“□”吗？ $\cos 2x$ 可以被当成“□”吗？

解： 由于 $\lim\limits_{x\to0}2x=0$，所以在本题中 $2x$ 可以被当成“□”。

由于 $\lim\limits_{x\to0}x=0$，所以在本题中 x 可以被当成“□”。

由于 $\lim\limits_{x\to0}\cos 2x=1\neq0$，所以在本题中 $\cos 2x$ 不能被当成“□”。

大家现在明白了吧。

再来看几道例题。

例. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{2x}$，请问在本题中分母 $2x$ 可以被当成“□”吗？分母 $2x$ 中的 x 可以被当成“□”吗？分子 $\sin 2x$ 可以被当成“□”吗？分子 $\sin 2x$ 中的 $2x$ 可以被当成“□”吗？分子 $\sin 2x$ 中的 x 可以被当成“□”吗？

解： 先来分析一下这道题。这道题一共有 5 问，但是实际上，可以把这道题当成 3 问。为什么呢？

因为第①问和第④问问的都是 $2x$ 可不可以被当成“□”，虽然 $2x$ 的位置不同，但都是 $2x$，只需要验证一下 $\lim\limits_{x\to0}2x$ 是否等于 0 就可以了。如果等于 0，那么无论是分母 $2x$ 还是分子 $\sin 2x$ 中的 $2x$ 就都可以被当成“□”。如果不等于 0，那无论是分母 $2x$ 还是分子 $\sin 2x$ 中的 $2x$ 都不能被当成“□”。所以第①问和第④问可以被合并成一问。

而第②问和第⑤问问的都是 x 可不可以被当成“□”，虽然 x 的位置不同，但都是 x，只需要验证一下 $\lim\limits_{x\to0}x$ 是否等于 0 就可以了。如果等于 0，那么无论是分母 $2x$ 中的 x 还是分子 $\sin 2x$ 中的 x 就都可以被当成“□”。如果不等于 0，那么无论是分母 $2x$ 中的 x 还是分子 $\sin 2x$ 中的 x 都不能被当成“□”。所以第②问和第⑤问可以被合并成一问。

综上所述，这道题看似有 5 问，实际上可以把这道题当成 3 问。

第①问是： 在本题中，$2x$ 可不可以被当成“□”？

第②问是：在本题中，x 可不可以被当成“□”？

第③问是：在本题中，$\sin 2x$ 可不可以被当成“□”？

现在一问一问来看。

① 由代入法可知，$\lim\limits_{x\to 0} 2x=0$，所以在本题中 $2x$ 可以被当成“□”。

② 由代入法可知，$\lim\limits_{x\to 0} x=0$，所以在本题中 x 可以被当成“□”。

③ 由代入法可知，$\lim\limits_{x\to 0} \sin 2x=0$，所以在本题中 $\sin 2x$ 可以被当成“□”。

例. $\lim\limits_{x\to 1} \sin 2x$，请问在本题中 $2x$ 可以被当成“□”吗？$\sin 2x$ 可以被当成“□”吗？

解： 由代入法可知，$\lim\limits_{x\to 1} 2x=2\times 1=2\neq 0$，所以在本题中 $2x$ 不能被当成“□”。

由代入法可知，$\lim\limits_{x\to 1} \sin 2x=\sin(2\times 1)=\sin 2\neq 0$，所以在本题中 $\sin 2x$ 不能被当成“□”。

例. $\lim\limits_{x\to 0} (\mathrm{e}^{2x}-1)$，请问在本题中 x 可以被当成“□”吗？$2x$ 可以被当成“□”吗？e^{2x} 可以被当成“□”吗？$\mathrm{e}^{2x}-1$ 可以被当成“□”吗？

解： 由代入法可知，$\lim\limits_{x\to 0} x=0$，所以在本题中 x 可以被当成“□”。

由代入法可知，$\lim\limits_{x\to 0} 2x=2\times 0=0$，所以在本题中 $2x$ 可以被当成“□”。

由代入法可知，$\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{2\times 0}=\mathrm{e}^{0}=1\neq 0$，所以在本题中 e^{2x} 不能被当成“□”。

由代入法可知，$\lim\limits_{x\to 0} (\mathrm{e}^{2x}-1)=\mathrm{e}^{2\times 0}-1=\mathrm{e}^{0}-1=1-1=0$，所以在本题中 $\mathrm{e}^{2x}-1$ 可以被当成“□”

通过以上几道例题，大家应该已经明白了以上 9 个式子中“□”的含义。那么以上 9 个式子又是什么意思呢？现在就来给大家解释一下以上 9 个式子的含义。

以上 9 个式子中的每一个式子中“～”两侧可以互相换。

下面来看相应的例题。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$。

解： 看一下这道题能不能用方法 1（基本计算方法）来做。

基本计算方法分为代入法、画图法、9 个小技巧。

先看看这道题能不能用代入法来做。很显然不能，因为代入以后分母就是 0 了，而 0 是不能做分母的，所以这道题不能用代入法来做。

再来看看这道题能不能用画图法来做。要想用画图法来做这道题，就需要在平面直角坐标系中画出函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的图像。而函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的图像并不好画，所以这道题用画图法来做也不太现实。

那么 9 个小技巧呢？大家可以逐个验证，根本没有任何一个小技巧可以用来解这道题，因此这道题也不能用 9 个小技巧来做。

综上所述，用方法 1（基本计算方法）是无法做这道题的。

那么该怎么办呢？可以用本节所讲的等价无穷小法来做，具体做法如下。

由代入法可知，$\lim\limits_{x\to 0} x=0$，所以在本题中 x 可以被当成是“□”。也就是说，分子 $\sin x$ 现在就是 $\sin\square$。

回顾一下本节所给出的 9 个式子。

① $\sin\square\sim\square$。

② $\arcsin\square\sim\square$。

③ $\tan\square\sim\square$。

④ $\arctan\square\sim\square$。

⑤ $\mathrm{e}^{\square}-1\sim\square$。

⑥ $a^{\square}-1\sim\square\ln a$。

⑦ $\ln(1+\square)\sim\square$。

⑧ $(1+b\square)^{a}-1\sim ab\square$。

⑨ $1-\cos\square\sim\dfrac{1}{2}\square^{2}$。

请大家看一下①式。由①式可知，$\sin\square$ 和□是可以互相换的，所以现在把本题的分子 $\sin\square$ 换成□，也就是将 $\sin x$ 换成 x，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}1=1$$

最后提醒大家一点，在用方法 2（等价无穷小法）之后，前面的 lim 仍然是带着的，不能去掉。例如，在本题中，只能写为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}$，而不能写为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{x}{x}$。这也意味着方法 2 永远只是化简用的，肯定不可能是最后一步。而以前给大家讲的代入法和画图法都是用完之后前面的 lim 就去掉了。

本题虽然做完了，但是其实还有一种做法。仍然是利用本节所讲的等价无穷小来做，而且用的仍然是 9 个式子中的①式。

由代入法可知，$\lim\limits_{x\to 0}x=0$，所以在本题中 x 可以被当成是“$\square$”。也就是说，分母 x 现在就是 $\square$。

请大家看一下①式。由①式可知，$\sin\square$ 和 $\square$ 是可以互相换的，所以可以把本题的分母 $\square$ 换成 $\sin\square$，也就是将 x 换成 $\sin x$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}1=1$$

由此可见，从左往右使用①式或者从右往左使用①式都是可以的。

再来看几道例题。

例. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{\sin(\sin x)}$。

解： 看一下这道题能不能用方法 1（基本计算方法）来做。

基本计算方法分为代入法、画图法、9 个小技巧。

先看看这道题能不能用代入法来做。很显然不能，因为代入以后分母就是 0 了，而 0 是不能做分母的，所以这道题不能用代入法来做。

再来看看这道题能不能用画图法来做。要想用画图法来做这道题，就需要在平面直角坐标系中画出函数 $y=\frac{\ln(1+4x)}{\sin(\sin x)}$ 的图像。而函数 $y=\frac{\ln(1+4x)}{\sin(\sin x)}$ 的图像并不好画，所以这道题用画图法来做也不太现实。

那么 9 个小技巧呢？大家可以逐个验证，根本没有任何一个小技巧可以用来解这道题。因此这道题也不能用 9 个小技巧来做。

综上所述，用方法 1（基本计算方法）是无法做这道题的。

那么该怎么办呢？可以用等价无穷小法来做，具体做法如下。

由代入法可知，$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，所以在本题中 $\sin x$ 可以被当成“$\square$”。也就是说，分母 $\sin(\sin x)$ 现在就是 $\sin\square$。

回顾一下本节所给出的 9 个式子。

由①式可知，$\sin\square$ 和 $\square$ 是可以互相换的，所以现在把本题的分母 $\sin\square$ 换成 $\square$，也就是将 $\sin(\sin x)$ 换成 $\sin x$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{\sin(\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{\sin x} \qquad (1)式$$

现在看（1）式的等式右侧，是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{\sin x}$，由于 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，所以在本题中 x 可以被当成是“$\square$”，此时的分母 $\sin x$ 就可以看成是 $\sin\square$。由①式可知，$\sin\square$ 和 $\square$ 是可以互相换的，所以现在把此时的分母 $\sin\square$ 换成 $\square$，也就是将 $\sin x$ 换成 x，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x} \qquad (2)式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{\sin(\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x} \qquad (3)式$$

现在看（3）式的等式右侧，是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x}$，由于 $\lim\limits_{x\to 0}4x=0$，所以在本题中 $4x$ 可以被当成是“$\square$”，此时的分子就可以看成是 $\ln(1+\square)$。由⑦式可知，$\ln(1+\square)$ 和 $\square$ 是可以互相换的，所以现在把此时的分子 $\ln(1+\square)$ 换成 $\square$，也就是将 $\ln(1+4x)$ 换成 $4x$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x} \qquad (4)式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{\sin(\sin x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{x}$　　（5）式

将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{x}$ 化简可得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}4$　　（6）式

（5）式、（6）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{\sin(\sin x)}=\lim\limits_{x\to 0}4$　　（7）式

由于常数的极限永远是它本身，所以有

$\lim\limits_{x\to 0}4=4$　　（8）式

（7）式、（8）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{\sin(\sin x)}=4$　　（9）式

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 3x}{e^{2x}-1}$。

解： 看一下这道题能不能用方法 1（基本计算方法）来做。

基本计算方法分为代入法、画图法、9 个小技巧。

先看看这道题能不能用代入法来做。很显然不能，因为代入以后分母就是 0 了，而 0 是不能做分母的，所以这道题不能用代入法来做。

再来看看这道题能不能用画图法来做。要想用画图法来做这道题，就需要在平面直角坐标系中画出函数 $y=\dfrac{\arctan 3x}{e^{2x}-1}$ 的图像。而函数 $y=\dfrac{\arctan 3x}{e^{2x}-1}$ 的图像并不好画，所以这道题用画图法来做也不太现实。

那么 9 个小技巧呢？大家可以逐个验证，根本没有任何一个小技巧可以用来解这道题，因此这道题也不能用 9 个小技巧来做。

综上所述，用方法 1（基本计算方法）是无法做这道题的。

那么该怎么办呢？可以使用等价无穷小法来做，具体做法如下。

由代入法可知，$\lim\limits_{x\to 0}2x=0$，所以在本题中 $2x$ 可以被当成是“$\square$”。也就是说，分母 $e^{2x}-1$ 现在就是 $e^{\square}-1$。

由本节所给出的 9 个式子中的⑤式可知，$e^{\square}-1$ 和 $\square$ 是可以互相换的，所以现在把本题的分母 $e^{\square}-1$ 换成 $\square$，也就是将 $e^{2x}-1$ 换成 $2x$，有

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 3x}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 3x}{2x}$　　（1）式

现在看（1）式的等式右侧，是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 3x}{2x}$。由于 $\lim\limits_{x\to 0}3x=0$，所以 $3x$ 在本题中可以看成是“$\square$”，所以此时的分子就可以看成是 $\arctan\square$。由④式可知，$\arctan\square$ 和 $\square$ 是可以互相换的，所以现在把此时的分子 $\arctan\square$ 换成 $\square$，也就是将 $\arctan 3x$ 换成 $3x$，有

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}$　　（2）式

（1）式、（2）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 3x}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}$　　（3）式

将（3）式等式右侧的 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}$ 化简，可得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{2}$　　（4）式

（3）式、（4）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 3x}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{2}$　　（5）式

由于常数的极限永远是它本身，所以有

$$\lim_{x\to0}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$ （6）式

（5）式、（6）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan 3x}{e^{2x}-1}=\frac{3}{2}$$ （7）式

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{x^2}-1}{2x\times\ln(1+\sin x)}$。

解： 看一下这道题能不能用方法 1（基本计算方法）来做。

基本计算方法分为代入法、画图法、9 个小技巧。

先看看这道题能不能用代入法来做。很显然不能，因为代入以后分母就是 0 了，而 0 是不能做分母的，所以这道题不能用代入法来做。

再来看看这道题能不能用画图法来做。要想用画图法来做这道题，就需要在平面直角坐标系中画出函数 $y=\dfrac{3^{x^2}-1}{2x\times\ln(1+\sin x)}$ 的图像。而函数 $y=\dfrac{3^{x^2}-1}{2x\times\ln(1+\sin x)}$ 的图像并不好画，所以这道题用画图法来做也不太现实。

那么 9 个小技巧呢？大家可以逐个验证，根本没有任何一个小技巧可以用来解这道题，因此这道题也不能用 9 个小技巧来做。

综上所述，用方法 1（基本计算方法）是无法做这道题的。

那么该怎么办呢？可以使用等价无穷小法来做，具体做法如下。

由代入法可知，$\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$，所以在本题中 $\sin x$ 可以被当成是“$\square$”。也就是说，分母 $2x\times\ln(1+\sin x)$ 现在就是 $2x\times\ln(1+\square)$。

由本节所给出的 9 个式子中的⑦式可知，$2x\times\ln(1+\square)$ 和 $\square$ 是可以互相换的，于是可以把本题的分母 $2x\times\ln(1+\square)$ 中的 $\ln(1+\square)$ 换成 $\square$，也就是将 $\ln(1+\sin x)$ 换成 $\sin x$，有

$$\lim_{x\to0}\frac{3^{x^2}-1}{2x\times\ln(1+\sin x)}=\lim_{x\to0}\frac{3^{x^2}-1}{2x\times\sin x}$$ （1）式

现在看（1）式的等式右侧，是 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{x^2}-1}{2x\times\sin x}$。由于 $\lim\limits_{x\to0}x=0$，所以 x 在本题中可以看成是“$\square$”，此时的分母就可以看成是 $2x\times\sin\square$。由①式可知，$\sin\square$ 和 $\square$ 是可以互相换的，所以现在把此时的分母中的 $\sin\square$ 换成 $\square$，也就是将 $\sin x$ 换成 x，有

$$\lim_{x\to0}\frac{3^{x^2}-1}{2x\times\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{3^{x^2}-1}{2x\times x}=\lim_{x\to0}\frac{3^{x^2}-1}{2x^2}$$ （2）式

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{3^{x^2}-1}{2x\times\ln(1+\sin x)}=\lim_{x\to0}\frac{3^{x^2}-1}{2x^2}$$ （3）式

现在看（3）式的等式右侧，由代入法可知 $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$，所以在本题中 x^2 可以被当成是“$\square$”，分子 $3^{x^2}-1$ 可以当成是 $3^{\square}-1$。现在看一下⑥式，由⑥式可知 $a^{\square}-1$ 和 $\square\ln a$ 是可以互换的，所以现在将分子 $3^{\square}-1$ 换为 $\square\ln3$，也就是将 $3^{x^2}-1$ 换为 $x^2\ln3$，有

$$\lim_{x\to0}\frac{3^{x^2}-1}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\ln3}{2x^2}$$ （4）式

（3）式、（4）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{3^{x^2}-1}{2x\times\ln(1+\sin x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\ln3}{2x^2}$$ （5）式

将（5）式等式右侧的 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\ln3}{2x^2}$ 化简，可得

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\ln3}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln3}{2}$$ （6）式

（5）式、（6）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{3^{x^2}-1}{2x\times\ln(1+\sin x)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln3}{2}$$ （7）式

由于常数的极限永远是它本身，所以有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln3}{2}=\frac{\ln3}{2} \qquad （8）式$$

（7）式、（8）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{3^{x^2}-1}{2x\times\ln(1+\sin x)}=\frac{\ln3}{2} \qquad （9）式$$

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(e^{6x}-1)}{\arctan x\times\ln(1+4x)\times(1-\cos x)}$。

解： 看一下这道题能不能用方法 1（基本计算方法）来做。

基本计算方法分为代入法、画图法、9 个小技巧。先看看这道题能不能用代入法来做。很显然不能，因为代入以后分母就是 0 了，而 0 是不能做分母的，所以这道题不能用代入法来做。

再来看看这道题能不能用画图法来做。要想用画图法来做这道题，就需要在平面直角坐标系中画出函数 $y=\dfrac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(e^{6x}-1)}{\arctan x\times\ln(1+4x)\times(1-\cos x)}$ 的图像。而函数 $y=\dfrac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(e^{6x}-1)}{\arctan x\times\ln(1+4x)\times(1-\cos x)}$ 的图像并不好画，所以这道题用画图法来做也不太现实。

那么 9 个小技巧呢？大家可以逐个验证，根本没有任何一个小技巧可以用来解这道题，因此这道题也不能用 9 个小技巧来做。

综上所述，用方法 1（基本计算方法）是无法做这道题的。

那么该怎么办呢？可以使用等价无穷小法来做，具体做法如下。

由代入法可知，$\lim\limits_{x\to0}x=0$，所以在本题中 x 可以被当成是“□”。也就是说，分母 $\arctan x\times\ln(1+4x)\times(1-\cos x)$ 现在就是 $\arctan\square\times\ln(1+4x)\times(1-\cos x)$。

回顾一下本节所给出的 9 个式子。由④式可知，$\arctan\square$ 和 □ 是可以互相换的，所以现在把本题的分母 $\arctan\square\times\ln(1+4x)\times(1-\cos x)$ 中的 $\arctan\square$ 换成 □，也就是将 $\arctan x$ 换成 x，有

$$\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(e^{6x}-1)}{\arctan x\times\ln(1+4x)\times(1-\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(e^{6x}-1)}{x\times\ln(1+4x)\times(1-\cos x)}\text{。} \qquad （1）式$$

现在看（1）式的等式右侧，是 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(e^{6x}-1)}{x\times\ln(1+4x)\times(1-\cos x)}$，由于 $\lim\limits_{x\to0}4x=0$，所以 $4x$ 在本题中可以看成是“□”，此时的分母就可以看成是 $x\times\ln(1+\square)\times(1-\cos x)$。由⑦式可知，$\ln(1+\square)$ 和 □ 是可以互相换的，所以现在把此时的分母中的 $\ln(1+\square)$ 换成 □，也就是将 $\ln(1+4x)$ 换成 $4x$，有

$$\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(e^{6x}-1)}{x\times\ln(1+4x)\times(1-\cos x)}=\frac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(e^{6x}-1)}{x\times4x\times(1-\cos x)} \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(e^{6x}-1)}{\arctan x\times\ln(1+4x)\times(1-\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(e^{6x}-1)}{x\times4x\times(1-\cos x)} \qquad （3）式$$

现在看（3）式的等式右侧，由代入法可知 $\lim\limits_{x\to0}x=0$，所以在本题中 x 可以被当成是“□”，分母 $x\times4x\times(1-\cos x)$ 可以当成是 $x\times4x\times(1-\cos\square)$。由⑨式知道 $1-\cos\square$ 和 □ 是可以互换的，所以现在将分母中的 $(1-\cos\square)$ 换为 □，也就是将 $1-\cos x$ 换为 $\frac{1}{2}x^2$，有

$$\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(e^{6x}-1)}{x\times4x\times(1-\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(e^{6x}-1)}{x\times4x\times\frac{1}{2}x^2} \qquad （4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(e^{6x}-1)}{\arctan x\times\ln(1+4x)\times(1-\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(e^{6x}-1)}{x\times4x\times\frac{1}{2}x^2} \qquad （5）式$$

将（5）式等式右侧的 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{x\times 4x\times\frac{1}{2}x^2}$ 化简，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{x\times 4x\times\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{2x^4} \qquad \text{（6）式}$$

（5）式、（6）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{\arctan x\times\ln(1+4x)\times(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{2x^4} \qquad \text{（7）式}$$

由于 $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{[(1+9x^2)^{\frac{1}{2}}-1]\times\sin x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{2x^4} \qquad \text{（8）式}$$

（7）式、（8）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{\arctan x\times\ln(1+4x)\times(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{[(1+9x^2)^{\frac{1}{2}}-1]\times\sin x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{2x^4} \qquad \text{（9）式}$$

现在看（9）式的等式右侧，由代入法可知 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，所以在（9）式的等式右侧分子中 x^2 可以被当成“$\Box$”，$[(1+9x^2)^{\frac{1}{2}}-1]\times\sin x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)$ 可以当成是 $[(1+9\Box)^{\frac{1}{2}}-1]\times\sin x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)$。由⑧式：$(1+b\Box)^a-1\sim ab\Box$，知 $(1+b\Box)^a-1$ 和 $ab\Box$ 是可以互换的，所以现在可以将分子中的 $[(1+9\Box)^{\frac{1}{2}}-1]$ 换为 $\frac{9}{2}\Box$，也就是将 $[(1+9x^2)^{\frac{1}{2}}-1]$ 换为 $\frac{9}{2}x^2$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{[(1+9x^2)^{\frac{1}{2}}-1]\times\sin x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{2}x^2\times\sin x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{2x^4} \qquad \text{（10）式}$$

（9）式、（10）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{\arctan x\times\ln(1+4x)\times(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{2}x^2\times\sin x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{2x^4} \qquad \text{（11）式}$$

由代入法可知 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，所以 x 在 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{9}{2}x^2\times\sin x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{2x^4}$ 中可以被当成是“$\Box$”，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{9}{2}x^2\times\sin x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{2x^4}$ 就可以看成是 $\frac{9}{2}x^2\times\sin\Box\times(\mathrm{e}^{6x}-1)$。由①式可知，$\sin\Box$ 和 $\Box$ 是可以互换的，所以现在将分子 $\frac{9}{2}x^2\times\sin\Box\times(\mathrm{e}^{6x}-1)$ 中的 $\sin\Box$ 换成 $\Box$，也就是将 $\sin x$ 换成 x，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{2}x^2\times\sin x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{2}x^2\times x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{2}x^3\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{2x^4} \qquad \text{（12）式}$$

（11）式、（12）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{\arctan x\times\ln(1+4x)\times(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{2}x^3\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{2x^4} \qquad \text{（13）式}$$

由代入法可知 $\lim\limits_{x\to 0}6x=0$，所以在 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{9}{2}x^3\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{2x^4}$ 中，$6x$ 可以被当成是“$\Box$”，此时的分子就可以看成是 $\frac{9}{2}x^3\times(\mathrm{e}^{\Box}-1)$。由⑤式可知，$\mathrm{e}^{\Box}-1$ 和 $\Box$ 是可以互换的，所以现在将分子 $\mathrm{e}^{\Box}-1$ 换为 $\Box$，也就是将 $(\mathrm{e}^{6x}-1)$ 换为 $6x$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{2}x^3\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{2}x^3\times 6x}{2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{27x^4}{2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{27}{2}=\frac{27}{2} \qquad \text{（14）式}$$

（13）式、（14）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+9x^2}-1)\times\sin x\times(\mathrm{e}^{6x}-1)}{\arctan x\times\ln(1+4x)\times(1-\cos x)}=\frac{27}{2} \qquad \text{（15）式}$$

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+6x^2)\times\sin(\sin x)}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}$。

解： 看一下这道题能不能用方法 1（基本计算方法）来做。

基本计算方法分为代入法、画图法、9 个小技巧。

先看看这道题能不能用代入法来做。很显然不能，因为代入以后分母就是 0 了，而 0 是不能做分母的，所以这道题不能用代入法来做。

再来看看这道题能不能用画图法来做。要想用画图法来做这道题，就需要在平面直角坐标系中画出函数 $y=\dfrac{\ln(1+6x^2)\times\sin(\sin x)}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}$ 的图像。而函数 $y=\dfrac{\ln(1+6x^2)\times\sin(\sin x)}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}$ 的图像并不好画，所以这道题用画图法来做也不太现实。

那么 9 个小技巧呢？大家可以逐个验证，根本没有任何一个小技巧可以用来解这道题，因此这道题也不能用 9 个小技巧来做。

综上所述，用方法 1（基本计算方法）是无法做这道题的。

那么该怎么办呢？可以使用等价无穷小法来做，具体做法如下。

由代入法可知，$\lim\limits_{x\to 0}6x^2=0$，所以在本题中 $6x^2$ 可以被当成是“$\square$”。也就是说，分子 $\ln(1+6x^2)\times\sin(\sin x)$ 可以换成 $\ln(1+\square)\times\sin(\sin x)$。

回顾一下本节所给出的 9 个式子。由⑦式可知，$\ln(1+\square)$ 和 $\square$ 是可以互相换的，所以现在把本题的分子 $\ln(1+\square)\times\sin(\sin x)$ 中的 $\ln(1+\square)$ 换成 $\square$，也就是将 $\ln(1+6x^2)$ 换成 $6x^2$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x^2)\times\sin(\sin x)}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^2\times\sin(\sin x)}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}\qquad（1）式$$

现在看（1）式的等式右侧，是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x^2\times\sin(\sin x)}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}$。由于 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，所以 $\sin x$ 在本题中可以看成是“$\square$”，此时的分子就可以看成是 $6x^2\times\sin\square$。由①式可知，$\sin\square$ 和 $\square$ 是可以互相换的，所以现在把此时分子中的 $\sin\square$ 换成 $\square$，也就是将 $\sin(\sin x)$ 换成 $\sin x$。有

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x^2\times\sin(\sin x)}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^2\times\sin x}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}\qquad（2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x^2)\times\sin(\sin x)}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^2\times\sin x}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}\qquad（3）式$$

现在看（3）式的等式右侧，由代入法可知 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，所以在本题中 x 可以被当成是“$\square$”，此时的分子 $6x^2\times\sin x$ 可以当成是 $6x^2\times\sin\square$。由①式知道 $\sin\square$ 和 $\square$ 是可以互换的，所以现在将分子中的 $\sin\square$ 换为 $\square$，也就是将 $\sin x$ 换为 x，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x^2\times\sin x}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^3}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}\qquad（4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x^2)\times\sin(\sin x)}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^3}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}\qquad（5）式$$

现在看（5）式等式右侧，由代入法可知 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，所以本题中 x 可以被当成“$\square$”，所以（5）式等式右侧的分母 $(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)$ 可以当成是 $(1-\cos\square)\times(\sqrt{1+x^2}-1)$。⑨式：$1-\cos\square\sim\dfrac{1}{2}\square^2$，可知 $1-\cos\square$ 和 $\dfrac{1}{2}\square^2$ 是可以互换的，所以现在可以将分母中的 $1-\cos\square$ 换为 $\dfrac{1}{2}\square^2$，也就是将 $1-\cos x$ 换为 $\dfrac{1}{2}x^2$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x^3}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^3}{\frac{1}{2}x^2\times(\sqrt{1+x^2}-1)}\qquad（6）式$$

（5）式、（6）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x^2)\times\sin(\sin x)}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^3}{\frac{1}{2}x^2\times(\sqrt{1+x^2}-1)} \qquad \text{（7）式}$$

由于 $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$，所以（7）式的等式右侧可以改写为

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x^3}{\frac{1}{2}x^2\times(\sqrt{1+x^2}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^3}{\frac{1}{2}x^2\times[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1]} \qquad \text{（8）式}$$

（7）式、（8）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x^2)\times\sin(\sin x)}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^3}{\frac{1}{2}x^2\times[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1]} \qquad \text{（9）式}$$

由代入法可知 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，所以 x^2 在 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x^3}{\frac{1}{2}x^2\times[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1]}$ 中可以被当成是“$\square$”，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x^3}{\frac{1}{2}x^2\times[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1]}$ 的分母就可以看成是 $\frac{1}{2}x^2\times[(1+\square)^{\frac{1}{2}}-1]$。由⑧式可知，$(1+b\square)^a-1$ 和 $ab\square$ 是可以互换的，所以现在将分母 $\frac{1}{2}x^2\times[(1+\square)^{\frac{1}{2}}-1]$ 中的 $[(1+\square)^{\frac{1}{2}}-1]$ 换成 $\frac{1}{2}\square$，也就是将 $[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1]$ 换成 $\frac{1}{2}x^2$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x^3}{\frac{1}{2}x^2\times[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1]}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^3}{\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^3}{\frac{1}{4}x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{24}{x} \qquad \text{（10）式}$$

（9）式、（10）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x^2)\times\sin(\sin x)}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{24}{x} \qquad \text{（11）式}$$

常数可以提到 lim 外面，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{24}{x}=24\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \qquad \text{（12）式}$$

（11）式、（12）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x^2)\times\sin(\sin x)}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}=24\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \qquad \text{（13）式}$$

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，所以根据方法 1 所讲的 9 个小技巧中的小技巧 8 可知

$$24\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty \qquad \text{（14）式}$$

（13）式、（14）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x^2)\times\sin(\sin x)}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}=\infty \qquad \text{（15）式}$$

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 0}(x\times\sin x)$。

解： 由代入法可知 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，所以在本题中 x 可以被当成是“$\square$”，即 $\lim\limits_{x\to 0}(x\times\sin\square)$。

回顾一下本节所给出的 9 个式子。由①式可知，$\sin\square$ 和 $\square$ 是可以相互交换的，所以我们将 $\lim\limits_{x\to 0}(x\times\sin\square)$ 中的 $\sin\square$ 换为 $\square$，也就是将 $\sin x$ 换为 x，有

$$\lim_{x\to 0}(x\times\sin x)=\lim_{x\to 0}x^2 \qquad \text{（1）式}$$

由代入法可知

$$\lim_{x\to 0}x^2=0 \qquad \text{（2）式}$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}(x\times\sin x)=0 \qquad \text{（3）式}$$

本题比前几道题都简单，其实本题完全可以不用等价无穷小来做，而直接用代入法来做。那么，把本题写在这里的原因是什么呢？就是因为前几道题都是分数，怕大家误认为只有分数才能用等价无穷小法，所以在这里写了这么一道题。

相信通过以上几道例题，大家应该已经会使用等价无穷小法来计算函数的极限了。那么接下来，再给出几道题，

不过没有过程，只有最终的答案，大家自己算一下，算完以后对一下答案。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+6x)}{4x\times\sin x}$。

答案：$\dfrac{3}{2}$。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x}{x}$。

答案：$\sin 1$。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin x}{x}$。

答案：0。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-1)}{2x-4}$。

答案：$\dfrac{1}{2}$。

例. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\mathrm{e}^{\sin x}-1)\times\ln(1+\sin x)}{3x^2}$。

答案：$\dfrac{1}{3}$。

到目前为止，如果大家认为等价无穷小法已经讲完了，那就大错特错了，还有内容没有讲。单纯依靠刚刚讲完的“□”理论来判断一道题能不能使用等价无穷小是不够的。换句话说，“□”理论只是用来判断一道题能不能使用等价无穷小法来做的大前提。

具体说就是：如果不满足“□”理论，则肯定不能用等价无穷小法。但这并不意味着如果满足“□”理论，就一定能用等价无穷小法来做，还需要依靠其他的判断条件进一步判断到底能不能用等价无穷小法。

每当讲到这里时，都会有不少同学提问：“老师，前面讲那些题时，都是单纯的只按照‘□’理论，怎么没有按照其他判断条件进一步判断呢？”针对这个问题，现在给出解释。之所以写之前的那些题，是为了给大家讲“□”理论，不想涉及别的知识点。因此，所给出的题必然都是满足“其他的判断条件”的，这样就可以让大家只关注“□”理论，便于学好“□”理论。

但是现在，由于已经把“□”理论彻底讲完，所以要开始给大家讲“进一步的判断条件”了。

那就是：**等价无穷小法只能用于替换若干项相乘中的一个整体项或几个整体项。**

以上加粗的话其实是一个非常重要的知识点。现在给大家举几个例子。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+6x^2)\times\sin(\sin x)}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}$。

解： 这道题之前做过。在做的过程中，其中有一步是由于 $\lim\limits_{x\to 0}6x^2=0$，所以 $6x^2$ 在本题中可以被当成是“□”，因此利用等价无穷小法将分子中的 $\ln(1+6x^2)$ 换为 $6x^2$。

为什么可以这样换呢？大家注意看（只看分子，不用看分母），分子是若干个函数相乘的形式（“若干个函数”在本题中指的就是两个函数，一个函数是 $y=\ln(1+6x^2)$，一个函数是 $y=\sin(\sin x)$），所以才能换。

如果这道题改为“请计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+6x^2)+\sin(\sin x)}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}$”，那么就不能用等价无穷小法将分子中的 $\ln(1+6x^2)$ 换为 $6x^2$，这是因为此时的分子已经不是两项相乘了而是两项相加。

每当讲到这里时，都会有同学提出这样的疑问：“老师，题目经过这样的修改后，分子的确是两项相加而不是相乘了，但是其实换一个角度来看，分子还可以看成是两项相乘啊，第一项是 $\ln(1+6x^2)+\sin(\sin x)$，第二项是 1。所以既然分子还可以看成是两项相乘，那么应该仍然能用等价无穷小法将分子中的 $\ln(1+6x^2)$ 换为 $6x^2$，为什么不能换呢？”

针对这个问题，现在给出解释。按该同学这种说法，题目改完以后的分子照样可以看成是两项相乘，一项是 $\ln(1+6x^2)+\sin(\sin x)$，一项是 1。但是请大家再仔细看一下之前加粗的语句是怎么说的，说的是**“等价无穷小法只能用于替换若干项相乘中的一个整体项或几个整体项”**。大家注意到“整体项”这三个字指的是：只有当想要替换

的那个参数或代数式所在的那一项**整体**可以当成是本节所给的 9 个式子中的一个式子的“～”左侧或右侧时，才可以进行等价无穷小替换。

那么现在按该同学的说法，不把 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+6x^2)+\sin(\sin x)}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}$ 的分子当成两项相加，而当成两项相乘，第一项是 $\ln(1+6x^2)+\sin(\sin x)$，第二项是 1。想要替换的是 $\ln(1+\square)$，而 $\ln(1+\square)$ 所在的那一项**整体**是 $\ln(1+\square)+\sin(\sin x)$。而本节所给的 9 个式子中没有任何一个式子的“～”左侧或右侧是 $\ln(1+\square)+\sin(\sin x)$，所以不能替换。

通过上一道题，大家应该已经理解了“**等价无穷小法只能用于替换若干项相乘中的一个整体项或几个整体项**”这句话。

“**等价无穷小法只能用于替换若干项相乘中的一个整体项或几个整体项**”主要有两层意思。

意思 1：等价无穷小法只能用于替换若干项相乘中的一项或几项。

意思 2：要替换的项必须是整体项。

另外，通过上一道题大家还应该明白一个知识点，就是：当想用等价无穷小替换的参数或代数式处于分子中时，就只关注分子是否为若干项相乘，以及想要替换的那个参数或代数式是否为整体项就可以了，而不用关注分母；当想用等价无穷小法替换的参数或代数式处于分母中时，只需关注分母是否为若干项相乘，以及想要替换的那个参数或代数式是否为整体项就可以了，而不用关注分子。

下面再来看几道例题。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\times\sin x}{x^2}$。

解： 这道题的做法是将分子中的 $\sin x$ 利用等价无穷小法换为 x，然后分子、分母就都是 x^2 了，所以这道题的答案等于 1。

这道题为什么能替换分子中的 $\sin x$ 呢？大家注意看（只看分子，不用看分母），分子是若干个函数相乘的形式（“若干个函数”在本题中指的就是两个函数，一个函数是 $y=x$，一个函数是 $y=\sin x$），所以才能换。

如果这道题改为“请计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\sin x}{x^2}$”，那么还能用等价无穷小法将分子中的 $\sin x$ 换为 x 吗？当然不能，为何？因为题目经过这样修改之后，把分子看成两项相加（一项是 x，一项是 $\sin x$），则换 $\sin x$ 不满足“意思 1”；如果把分子看成两项相乘（一项是 $x+\sin x$，一项是 1），则换 $\sin x$ 不满足“意思 2”。所以，如果本题改为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\sin x}{x^2}$，就不能用等价无穷小法将分子中的 $\sin x$ 换为 x 了。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+6x^2)\times\sin(\sin x)}{(1-\cos x)\times(\sqrt{1+x^2}-1)}$。

解： 这道题之前做过。在做的过程中，其中有一步是利用等价无穷小法将分母中的 $1-\cos x$ 换为 $\dfrac{1}{2}x^2$。为什么可以这么换呢？大家注意看（只看分母，不用看分子），分母是若干个函数相乘的形式（“若干个函数”在本题中指的就是两个函数，一个函数是 $y=1-\cos x$，一个函数是 $y=\sqrt{1+x^2}-1$），所以才能换。

如果这道题改为“请计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+6x^2)\times\sin(\sin x)}{(1-\cos x)+(\sqrt{1+x^2}-1)}$”，那么就不能用等价无穷小法将分母中的 $1-\cos x$ 换为 $\dfrac{1}{2}x^2$ 了。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to0}(x\times\sin x)$。

解： 这道题之前做过。在做的过程中，其中有一步是利用等价无穷小法将 $\sin x$ 换为 x。为什么可以这样换呢？大家注意看，本题不是分数，可以把 $\lim\limits_{x\to0}(x\times\sin x)$ 写为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\times\sin x}{1}$，变成分数。分子是若干个函数相乘的形式（“若干个函数”在本题中指的就是两个函数，一个函数是 $y=x$，一个函数是 $y=\sin x$，所以才能换。

如果这道题改为“请计算 $\lim\limits_{x\to0}(x+\sin x)$”，那么就不能用等价无穷小法将 $\sin x$ 换为 x。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$。

解： 这道题的做法是利用等价无穷小法将分子 $\ln(1+x)$ 换为 x。为什么可以这样换呢？大家看分子是若干个函数相乘的形式（“若干个函数”在本题中指的就是一个函数，$y=\ln(1+x)$），所以才能换。

如果这道题改为“请计算 $\lim\limits_{x\to0}(x+\sin x)$”，那么就不能用等价无穷小法将 $\sin x$ 换为 x。

例. 请问在 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\ln(1+x)+3]\times\sin x}{x}$ 中，可以用 x 替换 $\ln(1+x)$ 吗？可以用 x 替换 $\sin x$ 吗？

解： 不可以用 x 替换 $\ln(1+x)$，可以用 x 替换 $\sin x$。

到目前为止，函数极限计算的方法 1（基本计算方法）和方法 2（等价无穷小法）已经介绍完了。

在正式开始给大家讲方法 3（洛必达法则）之前，先给大家讲一个很重要的知识点：极限的可拆性。

首先讲解一下什么叫“能拆”。

若 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)\pm\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$，则称 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)\pm g(x)]$ 能拆。

若 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)\times g(x)]=\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)\times\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$，则称 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)\times g(x)]$ 能拆。

但是，并非所有的 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)\pm g(x)]$、$\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)\times g(x)]$ 都能拆。例如，$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}+3)$ 能拆为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}3$，而 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ 就不能拆为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$。

所以接下来要给大家介绍“到底什么情况下才能拆”。

① 对于 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)\pm g(x)]$ 来说，要分别计算 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$，如果这两者的计算结果都是 ∞，那么 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)\pm g(x)]$ 就不能拆为 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)\pm\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$；否则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)\pm g(x)]$ 就能拆为 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)\pm\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$。

例. 请解释一下为何 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}+3)$ 能拆为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}3$，而 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ 就不能拆为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$。

解： 由代入法可知，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0}3=3$，也就是说 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$、$\lim\limits_{x\to 0}3$ 这两者不全是 ∞，所以 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}+3)$ 能拆为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}3$。

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}x=\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=\infty$，也就是说 $\lim\limits_{x\to+\infty}x$、$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$ 这两者全是 ∞，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ 不能拆为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$。

② 对于 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)\times g(x)]$ 来说，要分别计算 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$，如果这两者的计算结果一个是 0，另一个是 ∞，那么 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)\times g(x)]$ 就不能拆为 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)\times\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$，否则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)\times g(x)]$ 就能拆为 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)\times\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$。

例. 请问 $\lim\limits_{x\to 0}(x\times\dfrac{1}{x})$ 能否拆为 $\lim\limits_{x\to 0}x\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}(\sin x\times\cos x)$ 能否拆为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\times\lim\limits_{x\to 0}\cos x$？

解： 由代入法可知 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，由画图法可知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，也就是说 $\lim\limits_{x\to 0}x$、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ 这两者一个是 0，另一个是 ∞，所以 $\lim\limits_{x\to 0}(x\times\dfrac{1}{x})$ 不能拆为 $\lim\limits_{x\to 0}x\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$。

由代入法可知 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=\sin 0=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$，也就是说 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$、$\lim\limits_{x\to 0}\cos x$ 这两者并非一个是 0，另一个是 ∞，所以 $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x\times\cos x)$ 能拆为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\times\lim\limits_{x\to 0}\cos x$。

下面来看几个例题。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 0}(x+\sin x)$。

解： 有人这么做，由代入法可知 $\lim\limits_{x\to 0}(x+\sin x)=0+\sin x=\sin x$，这么做是完全错误的，因为在讲方法 1 时说过，只能整体使用代入法或画图法，而不能局部使用代入法或画图法。但是，以下的做法就是对的。

先来计算 $\lim\limits_{x\to 0}x$。由代入法可知，$\lim\limits_{x\to 0}x=0$。也就是说，$\lim\limits_{x\to 0}x=$、$\lim\limits_{x\to 0}\sin x$ 这两者不可能都是 ∞（因为已经有一个不是 ∞ 了），所以说明 $\lim\limits_{x\to 0}(x+\sin x)$ 可以拆成 $\lim\limits_{x\to 0}x+\lim\limits_{x\to 0}\sin x$，即有

$$\lim_{x\to 0}(x+\sin x)=\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}\sin x=0+\sin 0=0+0=0$$

局部使用代入法 $\lim\limits_{x\to 0}(x+\sin x)=0+\sin x=\sin x$ 虽然不对，但是现在把 $\lim\limits_{x\to 0}(x+\sin x)$ 拆成了 $\lim\limits_{x\to 0}x+\lim\limits_{x\to 0}\sin x$，拆完以后 $\lim\limits_{x\to 0}x$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$ 就是一点关系也没有的两个独立的函数了。所以，现在单独对 $\lim\limits_{x\to 0}x$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$ 使用代入法就可以了，因为它们毫无关系，各算各的，最后加起来就可以了。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x+\sin x}{x}$。

解：根据本节的讲解，大家现在应该都知道不能利用等价无穷小法将 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x+\sin x}{x}$ 中的 $\sin x$ 和 $\arctan x$ 换为 x。那么，本题该如何去做呢？

首先

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x+\sin x}{x}=\lim_{x\to0}(\frac{\arctan x}{x}+\frac{\sin x}{x})$$

然后，我们算一下 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}$，由等价无穷小法可知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to0}1=1$，这说明 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}$ 和 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$ 这两者不可能都是 ∞（因为已经有一个不是 ∞ 了），$\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\arctan x}{x}+\dfrac{\sin x}{x})$ 可以拆成 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\arctan x+\sin x}{x}&=\lim_{x\to0}(\frac{\arctan x}{x}+\frac{\sin x}{x})\\&=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}+\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}+\lim_{x\to0}\frac{x}{x}\\&=\lim_{x\to0}1+\lim_{x\to0}1\\&=1+1\\&=2\end{aligned}$$

直接对 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x+\sin x}{x}$ 使用等价无穷小法将 $\arctan x$ 和 $\sin x$ 换为 x 必然不对，但把 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x+\sin x}{x}$ 拆成 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$ 以后，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}$ 和 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$ 就是一点关系也没有的两个独立的函数了，就可以使用等价无穷小法来替换了。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x\times\ln(1+x^2)}{\arctan x\times x}$。

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x\times\ln(1+x^2)}{\arctan x\times x}=\lim\limits_{x\to0}[\cos x\times\dfrac{\ln(1+x^2)}{\arctan x\times x}]$

然后计算一下 $\lim\limits_{x\to0}\cos x$，由代入法可知 $\lim\limits_{x\to0}\cos x=\cos0=1$。也就是说，$\lim\limits_{x\to0}\cos x$ 和 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\arctan x\times x}$ 这两者不可能一个是 0 一个是 ∞（因为已经有一个是 1 了），所以 $\lim\limits_{x\to0}[\cos x\times\dfrac{\ln(1+x^2)}{\arctan x\times x}]$ 可以拆为 $\lim\limits_{x\to0}\cos x\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\arctan x\times x}$，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\cos x\times\ln(1+x^2)}{\arctan x\times x}&=\lim_{x\to0}(\cos x\times\frac{\ln(1+x^2)}{\arctan x\times x})\\&=\lim_{x\to0}\cos x\times\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{\arctan x\times x}\\&=1\times\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{\arctan x\times x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{\arctan x\times x}\end{aligned}$$

由等价无穷小法可知

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{\arctan x\times x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to0}1=1$$

所以

$$\lim_{x\to0}\times\frac{\cos x\times\ln(1+x^2)}{\arctan x\times x}=1$$

方法 3. 洛必达法则

接下来我要给大家讲的是函数极限计算的第三种方法——洛必达法则。洛必达法则共分为两类。

第一类洛必达法则如下：

对于极限 $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 而言，若

① $\lim\limits_{x\to\Delta} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\Delta} g(x)=0$；

② $f(x)$与$g(x)$在Δ的去心邻域内可导，且$g'(x)\neq 0$；

则$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}\overset{?}{=}\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$。

以上就是第一类洛必达法则。在第一类洛必达法则最终的结论中出现了符号“$\overset{?}{=}$”，这是什么意思呢？**符号“$\overset{?}{=}$”的意思是：如果题目的最终计算结果是一个常数或∞，那么符号“$\overset{?}{=}$”指的就是等于号“$=$”；如果题目的最终计算结果是“不存在但不为∞”，那么符号“$\overset{?}{=}$”指的就是不等于号“$\neq$”。**

现在给大家看几道例题。

例. 请计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$。

解： 本题之前做过，是利用等价无穷小法来做的，即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}1=1$。但现在换一种方法，用第一类洛必达法则来做。

由代入法可知$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=\sin 0=0$，$\lim\limits_{x\to 0}x=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$满足第一类洛必达法则的使用条件①。

由于函数$y=\sin x$、$y=x$均可导，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$满足第一类洛必达法则的使用条件②。有一次讲到这里时，有一个同学问“为何$y=\sin x$、$y=x$均可导”，然后我问他“你知道$\sin x$的导数是多少吗？你知道x的导数是多少吗？”他说：“知道$\sin x$的导数是$\cos x$，x的导数是 1。”既然连导数是多少都背出来了，怎么还问为何可导呢？然后他恍然大悟。

由于第一类洛必达法则的使用条件①和②都满足，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\overset{?}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$$

由于最终的答案是 1，而 1 是常数，属于“常数或∞”，所以上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“$=$”，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$$

例. 请计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{2x}$。

解： 本题可以利用等价无穷小来做，即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$。但现在，换一种做法，用第一类洛必达法则来做。

由代入法可知$\lim\limits_{x\to 0}\tan x=\tan 0=0$，$\lim\limits_{x\to 0}2x=2\times 0=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{2x}$满足第一类洛必达法则的使用条件①。

由于函数$y=\tan x$、$y=2x$均可导，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{2x}$满足第一类洛必达法则的使用条件②。

由于第一类洛必达法则的使用条件①和②都满足，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{2x}\overset{?}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos^2 0}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

由于最终的答案是$\dfrac{1}{2}$，而$\dfrac{1}{2}$是常数，属于“常数或∞”，所以上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“$=$”，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos^2 0}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

例. 请计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)}{x\sin^3 x}$。

解： 首先，利用等价无穷小法将分母中的$\sin^3 x$替换为x^3，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)}{x\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)}{x^4}\qquad（1）式$$

由于 $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$，所以就利用此公式对分子进行变形，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1+x^2}{1+\sin^2 x}}{x^4} \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)}{x\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1+x^2}{1+\sin^2 x}}{x^4} \qquad （3）式$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1+x^2}{1+\sin^2 x}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{1+x^2}{1+\sin^2 x}-1)}{x^4} \qquad （4）式$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{1+x^2}{1+\sin^2 x}-1)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{1+x^2}{1+\sin^2 x}-\frac{1+\sin^2 x}{1+\sin^2 x})}{x^4} \qquad （5）式$$

（4）式、（5）式相结合，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1+x^2}{1+\sin^2 x}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{1+x^2}{1+\sin^2 x}-\frac{1+\sin^2 x}{1+\sin^2 x})}{x^4} \qquad （6）式$$

（3）式、（6）式相结合，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)}{x\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{1+x^2}{1+\sin^2 x}-\frac{1+\sin^2 x}{1+\sin^2 x})}{x^4} \qquad （7）式$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{1+x^2}{1+\sin^2 x}-\frac{1+\sin^2 x}{1+\sin^2 x})}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x})}{x^4} \qquad （8）式$$

（7）式、（8）式相结合，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)}{x\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x})}{x^4} \qquad （9）式$$

由代入法可知，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}=0$，所以在 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x})}{x^4}$ 中，$\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}$ 可以被当成是“$\square$”，使用等价无穷小法，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x})}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}}{x^4} \qquad （10）式$$

（9）式、（10）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)}{x\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}}{x^4} \qquad （11）式$$

将 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}}{x^4}$ 换一种写法得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}}{x^4}=\lim_{x\to 0}(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\times\frac{1}{1+\sin^2 x}) \qquad （12）式$$

（11）式、（12）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)}{x\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\times\frac{1}{1+\sin^2 x}) \qquad （13）式$$

现在利用当时给大家讲的极限的可拆性。

由代入法可知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\sin^2 x}=\frac{1}{1+0^2}=1$，因此 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\sin^2 x}$、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}$ 这两者不可能是一个为 0 一个为 ∞（因

为已经有一个是 1 了），所以 $\lim\limits_{x\to0}(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\times\frac{1}{1+\sin^2 x})$ 可以被拆为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+\sin^2 x}$，有

$$\lim_{x\to0}(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\times\frac{1}{1+\sin^2 x})=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\times\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\sin^2 x} \qquad \text{（14）式}$$

将 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+\sin^2 x}=1$ 代入到（14）式的等式右侧，有

$$\lim_{x\to0}(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\times\frac{1}{1+\sin^2 x})=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4} \qquad \text{（15）式}$$

（13）式、（15）式相结合，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)}{x\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4} \qquad \text{（16）式}$$

根据公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，所以有

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{(x+\sin x)(x-\sin x)}{x^4} \qquad \text{（17）式}$$

（16）式、（17）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)}{x\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{(x+\sin x)(x-\sin x)}{x^4} \qquad \text{（18）式}$$

现在想把 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+\sin x)(x-\sin x)}{x^4}$ 拆为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$，但是不知道能不能拆。因此需要验证一下，看看 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}$、$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ 是不是一个为 0 一个为 ∞，如果是，则不能拆，否则就能拆。

$$\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}\overset{?}{=}\lim_{x\to0}\frac{1+\cos x}{1}=\frac{1+\cos 0}{1}=2$$

注意，之所以上式中出现了"$\overset{?}{=}$"，是因为用到了第一类洛必达法则。由于算出的结果是 2，而 2 是常数，属于"常数或 ∞"，所以将上式中的"$\overset{?}{=}$"改为"$=$"，即

$$\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1+\cos x}{1}=\frac{1+\cos 0}{1}=2$$

既然 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}=2$，则说明 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}$ 、$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ 这两者不可能是一个为 0 一个为 ∞（因为已经有一个是 2 了），故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+\sin x)(x-\sin x)}{x^4}$ 能拆为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$。所以有

$$\lim_{x\to0}\frac{(x+\sin x)(x-\sin x)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}\times\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3} \qquad \text{（19）式}$$

将 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}=2$ 代入（19）式，得

$$\lim_{x\to0}\frac{(x+\sin x)(x-\sin x)}{x^4}=2\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3} \qquad \text{（20）式}$$

（18）式、（20）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)}{x\sin^3 x}=2\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3} \qquad \text{（21）式}$$

由代入法可知 $\lim\limits_{x\to0}(x-\sin x)=0$ 、$\lim\limits_{x\to0}x^3=0$，且函数 $y=x-\sin x$、$y=x^3$ 均可导，所以根据第一类洛必达法则有

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{?}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

由于 $\frac{1}{6}$ 是常数，属于"常数或 ∞"，所以上式中的"$\overset{?}{=}$"应为"$=$"，$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$。将 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$ 代入（21）式，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)}{x\sin^3 x}=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3} \qquad \text{（22）式}$$

有的同学可能会想，这道题步骤太多，一共 22 个式子。但实际上，这道题一点都不难，之所以有 22 个式子，是为了给大家讲明白，每一步都是用一个式子表示的，然后再来回替换。实际上，如果考研中出现这道题，根本不用写这 22 个式子，按如下写即可。

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)}{x\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\dfrac{1+x^2}{1+\sin^2 x}}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\dfrac{1+x^2}{1+\sin^2 x}-1)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$\overset{?}{=}2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{3}$$

最后把“$\overset{?}{=}$”上面的“？”划去就可以了。

例．请计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$。

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}\times\dfrac{1}{1+\cos x}]$　　（1）式

由代入法可知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+\cos x}=\dfrac{1}{1+\cos 0}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+\cos x}$ 这两者不可能一个是 0 一个是 ∞（因为已经有一个是 $\dfrac{1}{2}$ 了）。根据极限的可拆性，有

$\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}\times\dfrac{1}{1+\cos x}]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+\cos x}$　　（2）式

将 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+\cos x}=\dfrac{1}{2}$ 代入（2）式，得

$\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}\times\dfrac{1}{1+\cos x}]=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$　　（3）式

（1）式、（3）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$　　（4）式

由代入法可知 $\lim\limits_{x\to0}x=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$ 的分母可以看成是 $\ln(1+\square)$，而由函数极限计算的方法 2（等价无穷小法）可知，$\ln(1+\square)$ 可以换为 $\square$，所以有

$\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$　　（5）式

（4）式、（5）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x} \qquad （6）式$$

现在看看能不能用第一类洛必达法则。

计算 $\lim\limits_{x\to0}(3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x})$ 和 $\lim\limits_{x\to0}x$ ，看看这两者是否都为 0。

先算 $\lim\limits_{x\to0}x$ ，直接由代入法可知 $\lim\limits_{x\to0}x=0$ 。

再算 $\lim\limits_{x\to0}(3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x})$ 。由代入法可知 $\lim\limits_{x\to0}3\sin x=3\times\sin0=3\times0=0$ ，所以 $\lim\limits_{x\to0}3\sin x$ 、 $\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x}$ 这两者不可能都是 ∞（因为已经有一个是 0 了）。根据极限的可拆性，有

$$\lim_{x\to0}(3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x})=\lim_{x\to0}3\sin x+\lim_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x} \qquad （7）式$$

将 $\lim\limits_{x\to0}3\sin x=0$ 代入（7）式，有

$$\lim_{x\to0}(3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x})=\lim_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x}$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$，余弦函数是有界函数，所以根据函数极限计算的方法 1（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 3，有

$$\lim_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x}=0$$

所以

$$\lim_{x\to0}(3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x})=0$$

到目前为止，已经算出了 $\lim\limits_{x\to0}(3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x})$ 和 $\lim\limits_{x\to0}x$ ，都为 0，所以 $\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$ 满足第一类洛必达法则的使用条件①。

又因为函数 $y=x$、$y=3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}$ 均可导，所以 $\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$ 满足第一类洛必达法则的使用条件②。

由于第一类洛必达法则的使用条件①和②都满足，所以有

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}\overset{?}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{(3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x})'}{x'} \qquad （8）式$$

（**注意**：千万别忘了等号上面要写上问号）

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{(3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x})'}{x'}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}(3\cos x+2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}) \qquad （9）式$$

而 $\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}(3\cos x+2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x})$ 的计算结果是“不存在但不为 ∞ ”，所以（8）式中的“ $\overset{?}{=}$ ”改为“ $\neq$ ”。也就是说，从（6）式往后全白做了，还得回归到（6）式。

可以将（6）式等号右侧的 $\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$ 改写为

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}(\frac{3\sin x}{x}+\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}) \qquad （10）式$$

（6）式、（10）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}(\frac{3\sin x}{x}+\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}) \qquad （11）式$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x}{x}\overset{根据等价无穷小}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{x}=3$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x}{x}$、$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$ 这两者不可能都是 ∞（因为已经有一个是 3 了）。根据极限的可拆性，有

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to0}(\frac{3\sin x}{x}+\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x})=\frac{1}{2}(\lim_{x\to0}\frac{3\sin x}{x}+\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}) \qquad （12）式$$

（11）式、（12）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\frac{1}{2}(\lim_{x\to0}\frac{3\sin x}{x}+\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}) \qquad （13）式$$

将 $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x}{x}=3$ 代入（13）式，有

$$\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\frac{1}{2}(3+\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}) \qquad （14）式$$

现在计算一下 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$。

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}x\cos\frac{1}{x} \qquad （15）式$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}x=0$，余弦函数是有界函数，所以根据函数极限计算的方法 1（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 3，有

$$\lim_{x\to0}x\cos\frac{1}{x}=0 \qquad （16）式$$

（15）式、（16）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=0 \qquad （17）式$$

将（17）式代入到（14）式，得

$$\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\frac{1}{2}(3+0)=\frac{3}{2} \qquad （18）式$$

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x-\sin x}{x^3}$。

解：

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-\sin x}{x^3}\overset{?}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\cos x}{3x^2}$$

$$\overset{?}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}+\sin x}{6x}$$

$$\overset{?}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{-2(1+x^2)^2+8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}+\cos x}{6}$$

$$=\frac{\frac{-2(1+0^2)^2+8\times0^2(1+0^2)}{(1+0^2)^4}+\cos0}{6}$$

$$=\frac{-2+1}{6}$$

$$=-\frac{1}{6}$$

由于最后的答案是$-\frac{1}{6}$，$-\frac{1}{6}$是常数，属于“常数或∞”，所以把以上三处“$\overset{?}{=}$”都改为“$=$”。

大家注意，以上有三处出现“$\overset{?}{=}$”的地方，这意味着什么？意味着本题一共使用了三次第一类洛必达法则。

接下来介绍第二类洛必达法则。

第二类洛必达法则如下：

对于极限$\lim\limits_{x\to\Delta}\frac{f(x)}{g(x)}$**而言，若**

① $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=\infty$;

② $f(x)$与$g(x)$在Δ的去心邻域内可导，且$g'(x)\neq 0$;

则$\lim\limits_{x\to\Delta}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{?}{=}\lim\limits_{x\to\Delta}\frac{f'(x)}{g'(x)}$。

以上就是第二类洛必达法则。大家一定要注意，第二类洛必达法则最终的结论中也有符号“$\overset{?}{=}$”，这个符号的意思与第一类洛必达法则中的一样，即：**如果题目的最终计算结果是一个常数或∞，那么符号“$\overset{?}{=}$”指的就是等于号“$=$”；如果题目的最终计算结果是“不存在但不为∞”，那么符号“$\overset{?}{=}$”指的就是不等于号“$\neq$”。**

第二类洛必达法则与第一类洛必达法则的唯一不同点是：使用条件①不同。具体来说就是：第一类洛必达法则的使用条件①是$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=0$；而第二类洛必达法则的使用条件①是$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=\infty$。

例. 请计算$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$。

解： 由画图法可知$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$，所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$满足第二类洛必达法则的使用条件①。

由于函数$y=x$、$y=e^x$均可导，所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$满足第二类洛必达法则的使用条件②。

由于第二类洛必达法则的使用条件①和②都满足，所以有

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\overset{?}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$（最后一步$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$是根据画图法做出来的）

由于最终的答案是$+\infty$，而$+\infty$属于“常数或∞”，所以把上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“=”就可以了。

例. 请计算$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$。

解： 由画图法可知$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$，由画图法可知$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$，所以$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$满足第二类洛必达法则的使用条件①。

由于函数$y=\frac{1}{x}$、$y=\ln x$均可导，所以$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$满足第二类洛必达法则的使用条件②。

由于第二类洛必达法则的使用条件①和②都满足，所以有

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{?}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$（最后一步$\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$是根据画图法做出来的）

由于最终的答案是$-\infty$，而$-\infty$属于“常数或者∞”，所以把上式中的“$\overset{?}{=}$”上面的“？”划去就可以了。

答案为$-\infty$。

例. 请计算$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$。

解： 由画图法可知$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$，所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$满足第二类洛必达法则的使用条件①。

由于函数$y=x$、$y=\ln x$均可导，所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$满足第二类洛必达法则的使用条件②。

由于第二类洛必达法则的使用条件①和②都满足，所以有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{?}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$（最后一步 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$是根据画图法做出来的）

由于最终的答案是 0，而 0 属于“常数或∞”，所以把上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“=”就可以了。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$。

解： 由画图法可知 $\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$，而正弦函数是有界函数，所以根据函数极限计算的方法 1（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 6 可知

$\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)=\infty$、$\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sin x)=\infty$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$ 满足第二类洛必达法则的使用条件①。有一次讲到这里时，有一个同学问：“小技巧 6 说的是‘$\infty+$有界$=\infty$’，可 $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sin x)$ 属于‘$\infty-$有界’，为什么也是无穷？”针对这个问题，回答是：$\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sin x)=\lim\limits_{x\to\infty}[x+(-\sin x)]$，而 $y=-\sin x$ 很显然是有界函数，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sin x)$ 也属于“$\infty+$有界”。

由于 $y=x+\sin x$、$y=x-\sin x$ 均可导，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$ 满足第二类洛必达法则的使用条件②。

由于第二类洛必达法则的使用条件①和②都满足，所以有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}\overset{?}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1-\cos x}=\text{不存在但不为}\infty$$

由于最终算出的答案是“不存在但不为∞”，所以上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“$\neq$”。也就是说，刚才全白做了，还得想其他方法。

将 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$ 的分子、分母同时除以 x，可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}} \qquad \text{（1）式}$$

现在分别计算 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{\sin x}{x})$和$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{\sin x}{x})$。

先计算 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{\sin x}{x})$。

由于常数的极限永远是它本身，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}1=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}1$、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ 这两者不可能都是∞（因为已经有一个是 1 了）。根据极限的可拆性，有

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1}{x}\times\sin x)$。由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，正弦函数是有界函数，所以根据函数极限计算的方法 1（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 6 可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}\times\sin x)=0$$

所以有

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1+0=1$$

再计算 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{\sin x}{x})$。

由于常数的极限永远是它本身，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}1=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}1$、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ 这两者不可能都是∞（因为已经有一个是 1 了）。根据极限的可拆性，有

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{\sin x}{x})=\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x}\times\sin x)$。由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，正弦函数是有界函数，所以根据函数极限计算的方法 1（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 6 可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}\times\sin x)=0$$

所以有

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{\sin x}{x})=\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1-0=1$$

到目前为止，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})$、$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{\sin x}{x})$ 这两个极限已经都算出来了。分别是 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})=1$、$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{\sin x}{x})=1$。所以，根据函数极限计算的方法 1（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 1 可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1 \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=1 \qquad （3）式$$

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to0^+}(x\times\ln x)$。

解：当大家看到这道题时，心里一定都会想，本节讲的是洛必达法则，无论是使用第一类洛必达法则还是使用第二类洛必达法则，题目的形式都得是 $\lim\limits_{x\to\Delta}\frac{f(x)}{g(x)}$。可是本题的形式并不是 $\lim\limits_{x\to\Delta}\frac{f(x)}{g(x)}$，而是 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)\times g(x)]$，因此说明本题既用不了第一类洛必达法则也用不了第二类洛必达法则，那把本题写在这里干什么？

针对这个问题的回答是：难道这道题真的用不了洛必达法则吗？当然能用，否则把这道题写在这里干什么。只需要将这道题稍微变一下形就可以了。

$$\lim_{x\to0^+}(x\times\ln x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad （1）式$$

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ 满足第二类洛必达法则的使用条件①。

由于函数 $y=\frac{1}{x}$、$y=\ln x$ 均可导，所以 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ 满足第二类洛必达法则的使用条件②。

由于第二类洛必达法则的使用条件①和②都满足，所以有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{?}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$$（最后一步 $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$ 是根据画图法做出来的）

由于最终的答案是 $-\infty$，而 $-\infty$ 属于“常数或者 ∞”，所以把上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“=”就可以了，即

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合有

$$\lim_{x\to0^+}(x\times\ln x)=-\infty \qquad （3）式$$

方法 4. 固定套路法

接下来要给大家讲的是函数极限的第四种计算方法——固定套路法。

本节主要讲以下两类题型的固定套路：

$$\begin{cases}\text{同号无穷相减型的函数极限计算题的固定套路}\\ 1^{\infty}\text{型}、0^{0}\text{型}、\infty^{0}\text{型的函数极限计算题的固定套路}\end{cases}$$

（1）同号无穷相减型的函数极限计算题的固定套路。

什么样的函数极限计算题属于“同号无穷相减型的函数极限计算题”就不用解释了，因为在讲函数极限的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 7 时，已经解释过了。现在直接讲解题方法。

方法 1：通分法。用于两项都是分数的同号无穷相减型的函数极限计算题。

先来看一道例题。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})$。

解： 首先看一下本题是否属于“同号无穷相减型的函数极限计算题”。

由代入法可知，$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，$\lim\limits_{x\to 0}1=1$，所以根据函数极限的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 2 可知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$。

由代入法可知 $\lim\limits_{x\to 0}x\tan x=0\times 0=0$，$\lim\limits_{x\to 0}1=1$，所以根据函数极限的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 2 可知，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x\tan x}=\infty$。

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x\tan x}=\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})$ 属于 $\infty-\infty$。

而之前给大家讲过：如果遇到只能判断出是“无穷相减”而不能判断出是“同号无穷相减”的题，那就当作都是“同号无穷相减”。

所以本题属于“同号无穷相减型的函数极限计算题。”

那么这道题该怎么做呢？可以用刚刚讲完的方法 1（通分法）来做。为何？因为方法 1 用于**“两项都是分数的同号无穷相减型的函数极限计算题”，**而本题恰恰是这样，两项都是分数（第一项是 $\frac{1}{x^2}$，第二项是 $\frac{1}{x\tan x}$），所以本题用通分法来做。

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})=\lim_{x\to 0}(\frac{\tan x}{x^2\tan x}-\frac{x}{x^2\tan x}) \qquad （1）式$$

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\tan x}{x^2\tan x}-\frac{x}{x^2\tan x})=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x} \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x} \qquad （3）式$$

利用等价无穷小法，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3} \qquad （4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3} \qquad （5）式$$

由代入法可知 $\lim\limits_{x\to 0}x^3=0^3=0$，$\lim\limits_{x\to 0}(\tan x-x)=\tan 0-0=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$ 满足第一类洛必达法则的使用条件①。

由于函数 $y=\tan x-x$、$y=x^3$ 均可导，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$ 满足第一类洛必达法则的使用条件②。

由于第一类洛必达法则的使用条件①和②都满足，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}\overset{?}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x-x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{3}$$

由于最终的答案是 $\frac{1}{3}$，而 $\frac{1}{3}$ 是常数，属于“常数或 ∞”，所以上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“$=$”，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\frac{1}{3} \qquad （6）式$$

（5）式、（6）式相结合得

$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})=\frac{1}{3}$　　　　（7）式

方法 2. 提因子法。用于两项都不是分数的同号无穷相减型的函数极限计算题。

先来看两道例题。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-x)$。

解： 首先看一下本题是否属于“同号无穷相减型的函数极限计算题”。

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-x)$ 属于 $(+\infty)-(+\infty)$。

也就是说，本题属于“同号无穷相减型的函数极限计算题”。

那么这道题该怎么做呢？可以用刚刚讲完的方法 2（提因子法）来做。为何？因为方法 1 用于**“两项都不是分数的同号无穷相减型的函数极限计算题”，**而本题恰恰属于“两项都不是分数的同号无穷相减型的函数极限计算题（第一项是 $\ln x$，第二项是 x），所以本题用提因子法来做。

提因子，但到底提谁，有一个原则，那就是：**让其中一项提完因子之后是 1。**按照这个原则，要么就提 x，要么提 $\ln x$。那么，究竟提 x 还是 $\ln x$ 呢？都可以。

例如，提 x，则有

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[x\times(\frac{\ln x}{x}-1)]$　　　　（1）式

现在想将 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x\times(\frac{\ln x}{x}-1)]$ 拆为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\times\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x}-1)$，那么就要验证到底能不能拆。如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}x$、$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x}-1)$ 这两者的计算结果一个是 0、一个是 ∞，则不能拆，否则能拆。

先计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}x$。

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$。

再计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x}-1)$。

现在想将 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x}-1)$ 拆为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}1$，那么就要验证到底能不能拆。如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$、$\lim\limits_{x\to+\infty}1$ 这两者的计算结果是都是 ∞，则不能拆，否则能拆。

由于常数的极限永远是它本身，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$，这也就意味着 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$、$\lim\limits_{x\to+\infty}1$ 这两者的计算结果不可能都是 ∞（因为已经有一个是 1 了），所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x}-1)$ 能拆为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}1$，即

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x}-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}-1$　　　　（2）式

由画图法可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$、$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ 满足第二类洛必达法则的使用条件①。

又因为函数 $y=\ln x$、$y=x$ 均可导，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ 满足第二类洛必达法则的使用条件②。

所以，根据第二类洛必达法则，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{?}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\overset{\text{根据画图法}}{=}0$$

由于最后的答案是 0，0 是常数，属于“常数或 ∞”，所以把上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“$=$”，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$。将 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ 代入（2）式，得

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x}-1)=0-1=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x}-1)$ 已经都算完了，一个是 $+\infty$，一个是 -1，所以根据极限的可拆性，有

$\lim\limits_{x\to+\infty}[x\times(\frac{\ln x}{x}-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\times\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x}-1)$　　　　（3）式

（1）式、（3）式相结合得

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\times\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{\ln x}{x}-1)$ （4）式

把 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{\ln x}{x}-1)=-1$ 代入（4）式，得

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-x)=-\lim\limits_{x\to+\infty}x$ （5）式

之前已经用画图法算出了 $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$，那么 $-\lim\limits_{x\to+\infty}x$ 等于多少呢？大家还记得函数极限的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 8 是怎么说的吗？

带大家复习一下。

小技巧 8. 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}cf(x)=c\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=\infty$。（其中 c 是任意不为 0 的常数）

在本题中，c 相当于是 -1，所以根据小技巧 8 可知 $-\lim\limits_{x\to+\infty}x=\infty$，如果要更精确，那么就应该是 $-\infty$（因为 $+\infty$ 乘以一个负数肯定是 $-\infty$），有

$-\lim\limits_{x\to+\infty}x=-\infty$ （6）式

（5）式、（6）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-x)=-\infty$ （7）式

注意：以上解法提的因子是 x，还可以提 $\ln x$。下面提因子 $\ln x$。来做本题。

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln x\times(1-\dfrac{x}{\ln x})]$ （8）式

现在想将 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln x\times(1-\dfrac{x}{\ln x})]$ 拆为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x\times\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{x}{\ln x})$，需要验证到底能不能拆。如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$、$\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{x}{\ln x})$ 这两者的计算结果一个是 0 一个是 ∞，则不能拆，否则能拆。

先计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$。

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$。

再计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{x}{\ln x})$。

现在想将 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{x}{\ln x})$ 拆为 $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}$，需要验证到底能不能拆。如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}1$、$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}$ 这两者的计算结果都是 ∞，则不能拆，否则能拆。

由于常数的极限永远是它本身，所以有 $\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$，这也就意味着，$\lim\limits_{x\to+\infty}1$、$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}$ 这两者的计算结果不可能都是 ∞（因为已经有一个是 1 了），所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{x}{\ln x})$ 能拆为 $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}$，即

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{x}{\ln x})=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}=1-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}=-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}+1$ （9）式

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$、$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ 满足第二类洛必达法则的使用条件①。

又因为函数 $y=\ln x$、$y=x$ 均可导，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ 满足第二类洛必达法则的使用条件②。

所以，根据第二类洛必达法则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}\overset{?}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}x\overset{\text{根据画图法}}{=}+\infty$$

由于最后的答案是 $+\infty$，属于“常数或 ∞”，所以把上式中出现的“$\overset{?}{=}$”改为“$=$”，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}=+\infty$。

根据函数极限的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 8，有

$\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{x}{\ln x}=-\infty$

大家还记得函数极限的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 6 吗？下面带大家复习一下。

小技巧 6.

① 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=\infty$，$g(x)$ 有界，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)+g(x)]=\infty$。

② 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=\infty$，$c$ 为任意常数，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)+c=\infty$。

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{x}{\ln x}=-\infty$，根据小技巧 6 的结论②有

$$\lim_{x\to+\infty}-\frac{x}{\ln x}+1=-\infty \qquad \text{（10）式}$$

（9）式、（10）式相结合，得

$$\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{x}{\ln x})=-\infty$$

到目前为止，$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{x}{\ln x})$ 已经都算完了，一个是 $+\infty$，一个是 $-\infty$，所以根据极限的可拆性，有

$$\lim_{x\to+\infty}[\ln x\times(1-\frac{x}{\ln x})]=\lim_{x\to+\infty}\ln x\times\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{x}{\ln x}) \qquad \text{（11）式}$$

（8）式、（11）式相结合得

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x-x)=\lim_{x\to+\infty}\ln x\times\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{x}{\ln x}) \qquad \text{（12）式}$$

刚才已经计算出 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$、$\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{x}{\ln x})=-\infty$，大家还记得函数极限的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 4 吗？带大家复习一下。

小技巧 4. 若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=\infty$，则

① $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)g(x)=\infty$。

② $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)\times\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=\infty$。

根据小技巧 4 的结论②可知

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x\times\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{x}{\ln x})=-\infty \qquad \text{（13）式}$$

（12）式、（13）式相结合，得

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x-x)=-\infty \qquad \text{（14）式}$$

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x-1}$。

解：先计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}4x^2$。

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$（函数 $y=x^2$ 的图是一个抛物线）。

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$，根据函数极限的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 8 可知，$\lim\limits_{x\to-\infty}4x^2=+\infty$。

再计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)$。

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$，而 $y=-1$ 是有界函数（所有的常函数都是有界函数），根据函数极限的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 6 可知

$$\lim_{x\to-\infty}(x-1)=\lim_{x\to-\infty}[x+(-1)]=-\infty$$

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}4x^2=+\infty$、$\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^2+x-1)$ 属于“$(+\infty)+(-\infty)$”。而之前讲过，“$(+\infty)+(-\infty)$”相当于是“$(+\infty)-(+\infty)$”，所以，对于本题而言，如果不看根号，则属于“同号无穷相减的题”。当然，如果看根号，就不属于“同号无穷相减的题”，而是属于“根号下同号无穷相减的题”。

像这种“根号下同号无穷相减的题”应该如何去做呢？**“根号下同号无穷相减的题”的解题方法是提因子。究竟提谁？只要使提完后根号中的幂函数只剩下前面的系数就可以了。**

本题是 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x-1}$。根据刚刚讲完的方法，提完后应该使根号里原本的 $4x^2$ 变成 4，也就是要把根号中的 x^2 提出去。但是，有的同学这么做

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x-1}=\lim_{x\to-\infty}(x\times\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}})$$

这么做对吗？粗看对，但细看完全不对。正确的提法应该是

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x-1}=\lim_{x\to-\infty}(|x|\times\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}) \qquad \text{（1）式}$$

这是因为 $\sqrt{x^2}=|x|$。

本题说的是“$\lim\limits_{x\to-\infty}$”，这说明 x 是一个很小很小的负数。既然是负数，那么必然有 $|x|=-x$，所以（1）式可以变为

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x-1}=\lim_{x\to-\infty}(-x\times\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}) \qquad （2）式$$

下面想把 $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x\times\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}})$ 拆为 $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)\times\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$，但是究竟能不能拆呢。需要计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)$，只要这两者的计算结果不是一个 0、一个 ∞ 就能拆。

先计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$。

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}(4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})} \qquad （3）式$$

注意：以后像计算这种复合函数的题直接将 lim 深入进去。

由极限的可拆性及画图法可知

$$\lim_{x\to-\infty}(4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})=4 \qquad （4）式$$

注意：只是说由极限的可拆性及画图法可知（4）式成立，没有具体给出如何使用极限的可拆性、如何使用画图法，因为这很简单，大家应该会。

将（4）式代入（3）式，得

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{4}=2 \qquad （5）式$$

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=2$，所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)$ 这两者不可能一个是 0 一个是 ∞（因为已经有一个是 2 了），$\lim\limits_{x\to-\infty}(-x\times\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}})$ 能拆为 $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)\times\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$，有

$$\lim_{x\to-\infty}(-x\times\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}})=\lim_{x\to-\infty}(-x)\times\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} \qquad （6）式$$

将（2）式与（6）式相结合，有

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x-1}=\lim_{x\to-\infty}(-x)\times\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} \qquad （7）式$$

将 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=2$ 代入（7）式，得

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x-1}=2\lim_{x\to-\infty}(-x) \qquad （8）式$$

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$，根据函数极限计算的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 8，有

$$2\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty \qquad （9）式$$

将（8）式与（9）式相结合，有

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x-1}=+\infty$$

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\cos x}}$。

解：由上题知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x-1}=+\infty$。

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$，而函数 $y=1$ 是有界函数（所有常函数都是有界函数），根据函数极限计算的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 6，有

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$$

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x-1}=+\infty$、$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$，所以本题的分子属于“$(+\infty)+(-\infty)$”。而“$(+\infty)+(-\infty)$”可以

看成是“$(+\infty)-(+\infty)$”，所以本题的分子属于“同号无穷相减”。

再来看分母，计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+\cos x}$。

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$，而余弦函数 $y=\cos x$ 是有界函数，所以根据函数极限计算的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 6，有

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2+\cos x)=+\infty$$

既然 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+\cos x)=+\infty$，那么 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{(x^2+\cos x)}$ 等于多少？如果大家不知道，则告诉大家一个结论：若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}\sqrt{f(x)}=+\infty$。由此结论可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+\cos x}=+\infty$。**也就是说，本题的分母是 $+\infty$。**

综上所述，本题的分子属于“同号无穷相减”，本题的分母是 $+\infty$。也就是说，本题属于“$\dfrac{\text{同号无穷相减}}{\infty}$ 且分子和分母中都含有根号的题”，那么这样的题该怎么做呢？在之前没有给大家讲过，现在告诉大家这种题的解题方法：采用分子、分母同乘同除法，同乘同除谁？像这种题，分子和分母的根号里肯定都是有幂函数的，而且指数是一样的。同乘同除以后一定要使分子和分母根号里的幂函数只剩下系数。

要使 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\cos x}}$ 分子、分母同乘同除某个因子之后，分子和分母根号里的幂函数只剩下系数，那么很显然分子、分母应该同时除以 $\sqrt{x^2}$。而 $\sqrt{x^2}=|x|$，而对于本题来说，由于是“$\lim\limits_{x\to-\infty}$”，这说明 x 是一个很小很小的负数，而负数的绝对值等于它的相反数。因此，对本题来说，有 $|x|=-x$。所以，分子、分母同时除以 $-x$，即

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\cos x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{-x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+\cos x}}{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}-1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{\cos x}{x^2}}}$$

现在计算一下 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\dfrac{\cos x}{x^2}}$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}-1-\dfrac{1}{x})$。

首先算 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\dfrac{\cos x}{x^2}}$。

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{\cos x}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{\cos x}{x^2})}\qquad\text{（1）式}$$

根据极限的可拆性有

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{\cos x}{x^2})=\lim_{x\to-\infty}1+\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^2}=1+\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^2}\qquad\text{（2）式}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cos x}{x^2}$ 可以变形为

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{x^2}\times\cos x)\qquad\text{（3）式}$$

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$，由代入法可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}1=1$。所以根据函数极限计算的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 5，有 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$。

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$，而余弦函数 $y=\cos x$ 是有界函数，所以根据函数极限计算的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 3，有

$$\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{x^2}\times\cos x)=0\qquad\text{（4）式}$$

将（3）式、（4）式相结合，有

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^2}=0\qquad\text{（5）式}$$

将（5）式代入（2）式，可得

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{\cos x}{x^2})=1+0=1\qquad\text{（6）式}$$

将（6）式代入（1）式，可得

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{\cos x}{x^2}}=\sqrt{1}=1$ （7）式

再计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x})$。

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to-\infty}[\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-(1+\frac{1}{x})]$ （8）式

现在看看 $\lim\limits_{x\to-\infty}[\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-(1+\frac{1}{x})]$ 能不能拆为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})$。

先计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})$。

由代入法可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}1=1$，这说明 $\lim\limits_{x\to-\infty}1$、$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$ 这两者不可能都是 ∞（因为已经有一个是 1 了），所以根据极限的可拆性，有 $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to-\infty}1+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=1+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$。由画图法可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})=1+0=1$。

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})=1$，这说明 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$、$\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})$ 这两者不可能都是 ∞（因为已经有一个是 1 了），所以根据极限的可拆性，有

$\lim\limits_{x\to-\infty}[\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-(1+\frac{1}{x})]=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})$ （9）式

（8）式、（9）式相结合，有

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})$ （10）式

将 $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})=1$ 代入（10）式，得

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1$ （11）式

现在计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$。

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}(4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}$ （12）式

由极限的可拆性及画图法可知

$\lim\limits_{x\to-\infty}(4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})=4$ （13）式

将（13）式代入（12）式，得

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{4}=2$ （14）式

将（14）式代入（11）式，得

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x})=2-1=1$ （15）式

综上所述，已经算出了分母的极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{\cos x}{x^2}}=1$、**分子的极限** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x})=1$，根据函数极限计算的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 1，有

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\cos x}{x^2}}}=\frac{1}{1}=1$$ （16）式

又因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\cos x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\cos x}{x^2}}}$，所以有

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\cos x}}=1 \qquad \text{（17）式}$$

下面再来看一道类似的题目。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\arctan x}}$。

解： 由前面题的结果可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x-1}=+\infty$。

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$，而函数 $y=1$ 是有界函数（所有常函数都是有界函数），根据函数极限计算的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 6，有

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$$

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x-1}=+\infty$、$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$，所以本题的分子属于“$(+\infty)+(-\infty)$”。而“$(+\infty)+(-\infty)$”可以看成是“$(+\infty)-(+\infty)$”，所以本题的分子属于“同号无穷相减”。

再来看分母，计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+\arctan x}$。

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+\arctan x}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}(x^2+\arctan x)}$$

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，这说明 $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2$、$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$ 这两者不可能一个是 0 一个是 ∞（因为已经有一个是 $-\dfrac{\pi}{2}$ 了），所以根据极限的可拆性有

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2+\arctan x)=\lim_{x\to-\infty}x^2+\lim_{x\to-\infty}\arctan x=\lim_{x\to-\infty}x^2+(-\frac{\pi}{2})$$

注意：每当讲到这里时，都有不少同学问“由画图法可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$”是怎么得出来的，他们反映不会画函数 $y=\arctan x$ 的图。可能很多同学都不会画反三角函数的图像，不过没有关系，下面直接告诉大家几个与反三角函数有关的由画图法推出的结论，大家背下来即可。

结论 1. $\lim\limits_{x\to1^-}\arcsin x=\dfrac{\pi}{2}$。

结论 2. $\lim\limits_{x\to-1^+}\arcsin x=-\dfrac{\pi}{2}$。

结论 3. $\lim\limits_{x\to0}\arcsin x=0$。

结论 4. $\lim\limits_{x\to1^-}\arccos x=0$。

结论 5. $\lim\limits_{x\to-1^+}\arccos x=\pi$。

结论 6. $\lim\limits_{x\to0}\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$。

结论 7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$。

结论 8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{1}{\pi}$。

结论 9. $\lim\limits_{x\to0}\arctan x=0$。

结论 10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0$。

结论 11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi$。

结论 12. $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{arccot}x=\dfrac{\pi}{2}$。

根据结论 8 可得出 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$。

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$。由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$，而 $-\dfrac{\pi}{2}$ 是常数，所以根据函数极限计算的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 6，有 $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2+(-\dfrac{\pi}{2})=+\infty$。

又因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+\arctan x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2+(-\dfrac{\pi}{2})$，所以有 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+\arctan x)=+\infty$。

既然 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+\arctan x)=+\infty$，那么 $\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+\arctan x)}$ 等于多少？在上一道题中已经告诉大家：若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=+\infty$，则 $\sqrt{\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)}=+\infty$。由此结论可知 $\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+\arctan x)}=+\infty$。**也就是说，本题的分母是** $+\infty$。

综上所述，本题的分子属于“同号无穷相减”，本题的分母是 $+\infty$**。也就是说，本题属于“**$\dfrac{\text{同号无穷相减}}{\infty}$ **且分子和分母中都含有根号的题”，那么这样的题该怎么做呢？在之前那道题中刚给大家讲过，现在再重复一遍：采用分子、分母同乘同除法，同乘同除谁？像这种题，分子和分母的根号里肯定都是有幂函数的，而且指数是一样的。同乘同除以后一定要使分子和分母根号里的幂函数只剩下系数。**

要使 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\arctan x}}$ 分子、分母同乘同除某因子之后，分子和分母根号里的幂函数只剩下系数，显然分子、分母应该同时除以的是 $\sqrt{x^2}$。$\sqrt{x^2}=|x|$，而对于本题来说，由于是“$\lim\limits_{x\to-\infty}$”，这说明 x 是一个很小很小的负数，负数的绝对值等于它的相反数，因此 $|x|=-x$。所以，分子、分母同时除以 $-x$，即

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\arctan x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{-x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+\arctan x}}{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}-1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{\arctan x}{x^2}}}$$

现在计算一下 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\dfrac{\arctan x}{x^2}}$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}-1-\dfrac{1}{x})$。

首先计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\dfrac{\arctan x}{x^2}}$。

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{\arctan x}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{\arctan x}{x^2})} \qquad \text{（1）式}$$

根据极限的可拆性有

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{\arctan x}{x^2})=\lim_{x\to-\infty}1+\lim_{x\to-\infty}\frac{\arctan x}{x^2}=1+\lim_{x\to-\infty}\frac{\arctan x}{x^2} \qquad \text{（2）式}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\arctan x}{x^2}$ 可以变形为

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\arctan x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{x^2}\times\arctan x) \qquad \text{（3）式}$$

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$，由代入法可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}1=1$。所以根据函数极限计算的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 5，有 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$。

而 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$。

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，所以根据函数极限计算的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 1，有

$$\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{x^2}\times\arctan x)=0\times(-\frac{\pi}{2})=0 \qquad \text{（4）式}$$

将（3）式、（4）式相结合，有

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\arctan x}{x^2}=0 \qquad \text{（5）式}$$

将（5）式代入（2）式，可得

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{\arctan x}{x^2})=1+0=1 \qquad \text{（6）式}$$

将（6）式代入（1）式，可得

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{\arctan x}{x^2}}=\sqrt{1}=1 \qquad \text{（7）式}$$

再计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}-1-\dfrac{1}{x})$。

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x})=\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-(1+\frac{1}{x})]$$ （8）式

现在看看 $\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-(1+\frac{1}{x})]$ 能不能拆为 $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})$ 。

先计算一下 $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})$ 。

由代入法可知 $\lim_{x\to-\infty}1=1$，这说明 $\lim_{x\to-\infty}1$、$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$ 这两者不可能都是∞（因为已经有一个是 1 了），所以根据极限的可拆性，有 $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})=\lim_{x\to-\infty}1+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=1+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$ 。由画图法可知 $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$，所以 $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})=1+0=1$ 。

由于 $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})=1$，这说明 $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$、$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})$ 这两者不可能都是∞（因为已经有一个是 1 了），所以根据极限的可拆性，有

$$\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-(1+\frac{1}{x})]=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})$$ （9）式

（8）式、（9）式相结合，有

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x})=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})$$ （10）式

把 $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})=1$ 代入（10）式，得

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x})=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1$$ （11）式

现在计算一下 $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$ 。

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}(4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}$$ （12）式

由极限的可拆性及画图法可知

$$\lim_{x\to-\infty}(4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})=4$$ （13）式

将（13）式代入（12）式，得

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{4}=2$$ （14）式

将（14）式代入（11）式，得

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x})=2-1=1$$ （15）式

综上所述，已经算出了分母的极限 $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{\arctan x}{x^2}}=1$，**分子的极限** $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x})=1$，根据函数极限计算的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 1，有

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\arctan x}{x^2}}}=\frac{1}{1}=1$$ （16）式

又因为 $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\arctan x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\arctan x}{x^2}}}$，所以有

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\arctan x}}=1$$ （17）式

到目前为止，**同号无穷相减型的函数极限计算题的固定套路**已经给大家讲完了。

总结一下：**两项都是分数的同号无穷相减型的函数极限计算题用通分法来做，两项都不是分数的同号无穷相减型的函数极限计算题用提因子法来做。**然后就是两种特殊题型。第一种特殊题型是**根号下同号无穷相减的题，用提**

因子法来做。第二种特殊题型是$\frac{\text{同号无穷相减}}{\infty}$**且分子和分母中都含有根号的题，用分子、分母同乘同除法来做。**

接下来要给大家讲的是1^{∞}型、0^{0}型、∞^{0}型的函数极限计算题的固定套路。

（2）1^{∞}型、0^{0}型、∞^{0}型的函数极限计算题的固定套路。

首先来看一下什么样的题属于"1^{∞}型、0^{0}型、∞^{0}型的函数极限计算题"。

对于$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)^{g(x)}$而言，若$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=\infty$，则$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)^{g(x)}$属于"$1^{\infty}$型的函数极限计算题"。

对于$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)^{g(x)}$而言，若$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)^{g(x)}$属于"$0^{0}$型的函数极限计算题"。

对于$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)^{g(x)}$而言，若$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)^{g(x)}$属于"$\infty^{0}$型的函数极限计算题"。

下面来看几个例题。

例. 请判断$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$的类型。

解：先计算$\lim\limits_{x\to0}\cos x$。

由代入法可知$\lim\limits_{x\to0}\cos x=\cos0=1$。

再计算$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\ln(1+x^2)}$。

利用等价无穷小法，$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}$。由代入法可知$\lim\limits_{x\to0}x^2=0$，$\lim\limits_{x\to0}1=1$，根据函数极限的第一种计算方法（基本计算方法）中的9个小技巧中的小技巧2，有$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\infty$，所以$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\ln(1+x^2)}=\infty$。

综上所述，$\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\ln(1+x^2)}=\infty$，**所以本题属于$1^{\infty}$型的函数极限计算题。**

例. 请判断$\lim\limits_{x\to0^+}(\arcsin x)^{\tan x}$的类型。

解：先计算$\lim\limits_{x\to0^+}\arcsin x$。

根据之前给大家讲的与反三角函数有关的12条结论中的结论3可知，$\lim\limits_{x\to0}\arcsin x=0$。而之前讲过：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。所以有$\lim\limits_{x\to0^+}\arcsin x=0$。

再计算$\lim\limits_{x\to0^+}\tan x$。

由代入法可知，$\lim\limits_{x\to0^+}\tan x=\tan0=0$。

综上所述，$\lim\limits_{x\to0^+}\arcsin x=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\tan x=0$，**所以本题属于$0^{0}$型的函数极限计算题。**

例. 请判断$\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$的类型。

解：先计算$\lim\limits_{x\to0^+}\cot x$。

由画图法可知，$\lim\limits_{x\to0^+}\cot x=+\infty$。

再计算$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\ln x}$。

由画图法可知，$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$；由代入法可知，$\lim\limits_{x\to0^+}1=1$。由于$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$、$\lim\limits_{x\to0^+}1=1$，所以根据函数极限的第一种计算方法（基本计算方法）中的9个小技巧中的小技巧5，有$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\ln x}=0$。

综上所述，$\lim\limits_{x\to0^+}\cot x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\ln x}=0$，**所以本题属于$\infty^{0}$型的函数极限计算题。**

例. 请判断$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})^{x}$的类型。

解：先计算$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})$。

现在想将 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})$ 拆为 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}$，但不知道到底能不能拆。

之前给大家讲过，像这种复合函数求极限，可以直接将 lim 深入，所以有

$$\lim_{x\to\infty}\sin\frac{2}{x}=\sin(\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x})$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$$

由画图法可知，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ 。

所以 $2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=2\times 0=0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$$

$$\sin(\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x})=\sin 0=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\sin\frac{2}{x}=0$$

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{2}{x}=0$，这说明 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{2}{x}$、$\lim\limits_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}$ 这两者不可能都是 ∞（因为已经有一个是 0 了），所以根据极限的可拆性，有

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{2}{x}+\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}$$

将 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{2}{x}$=0 代入上式，有

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})=\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}=\cos(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x})=\cos 0=1$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})=1$$

再计算 $\lim\limits_{x\to\infty}x$ 。

由画图法可知，$\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$ 。

综上所述，$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$，所以本题属于 1^∞ 型的函数极限计算题。

通过以上几道例题，相信大家已经会判断什么样的题属于“1^∞ 型、0^0 型、∞^0 型的函数极限计算题”了。

既然将“1^∞ 型、0^0 型、∞^0 型”这三种不同类型的题目写在一起，则**说明“1^∞ 型、0^0 型、∞^0 型”这三种类型的题目的解题方法是一样的。**

“1^∞ 型、0^0 型、∞^0 型”题目的解题方法如下：

当判断出 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)^{g(x)}$ 属于“1^∞ 型、0^0 型、∞^0 型”这三类题型之一时，那么就按如下方法来做

$$\lim_{x\to\square}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to\square}\mathrm{e}^{\ln f(x)^{g(x)}}=\lim_{x\to\square}\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)\ln f(x)}$$

然后计算 $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)\ln f(x)$ 就可以了。假设计算出 $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)\ln f(x)=A$，则最终的答案就是 e^A。

下面来看几道例题。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$ 。

解：之前做过一道题“请判断 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$ 的类型”，已经判断出 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$ 属于“1^∞ 型”的题。那么按照刚刚讲的“1^∞ 型、0^0 型、∞^0 型”题目的解题方法来做就可以了。

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}+\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}\times\ln\cos x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{\ln(1+x^2)}\times\ln\cos x]}$$

只需算出 $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{\ln(1+x^2)}\times\ln\cos x]$ 即可。

$$\lim_{x\to 0}[\frac{1}{\ln(1+x^2)}\times\ln\cos x]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)} \qquad （1）式$$

根据等价无穷小法有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2} \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，有

$$\lim_{x\to0}[\frac{1}{\ln(1+x^2)}\times\ln\cos x]=\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2} \qquad （3）式$$

因为 $a=1+a-1$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2} \qquad （4）式$$

（3）式、（4）式相结合，有

$$\lim_{x\to0}[\frac{1}{\ln(1+x^2)}\times\ln\cos x]=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2} \qquad （5）式$$

由代入法可知 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x-1)=1-1=0$，所以根据等价无穷小法，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2} \qquad （6）式$$

（5）式、（6）式相结合，有

$$\lim_{x\to0}[\frac{1}{\ln(1+x^2)}\times\ln\cos x]=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2} \qquad （7）式$$

因为 $a-b=-(b-a)$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-(1-\cos x)}{x^2} \qquad （8）式$$

（7）式、（8）式相结合，有

$$\lim_{x\to0}[\frac{1}{\ln(1+x^2)}\times\ln\cos x]=\lim_{x\to0}\frac{-(1-\cos x)}{x^2} \qquad （9）式$$

根据等价无穷小法，有

$$\lim_{x\to0}\frac{-(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\lim_{x\to0}(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2} \qquad （10）式$$

（9）式、（10）式相结合，有

$$\lim_{x\to0}[\frac{1}{\ln(1+x^2)}\times\ln\cos x]=-\frac{1}{2} \qquad （11）式$$

因为 $\lim\limits_{x\to0}[\frac{1}{\ln(1+x^2)}\times\ln\cos x]=-\frac{1}{2}$，所以 $e^{\lim\limits_{x\to0}[\frac{1}{\ln(1+x^2)}\times\ln\cos x]}=e^{-\frac{1}{2}}$，也就是说，本题的答案是 $e^{-\frac{1}{2}}$。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to0^+}(\arcsin x)^{\tan x}$。

解： 之前做过一道题“请判断 $\lim\limits_{x\to0^+}(\arcsin x)^{\tan x}$ 的类型”，已经判断出 $\lim\limits_{x\to0^+}(\arcsin x)^{\tan x}$ 属于“0^0 型”的题。那么按照刚刚讲的“1^∞ 型、0^0 型、∞^0 型”题目的解题方法来做就可以了。

$$\lim_{x\to0}(\arcsin x)^{\tan x}+\lim_{x\to0}e^{\ln(\arcsin x)^{\tan x}}=\lim_{x\to0}e^{\tan x\times\ln(\arcsin x)}=e^{\lim\limits_{x\to0+}[\tan x\times\ln(\arcsin x)]}$$

只需算出 $\lim\limits_{x\to0^+}[\tan x\times\ln(\arcsin x)]$ 即可。

根据等价无穷小法，有

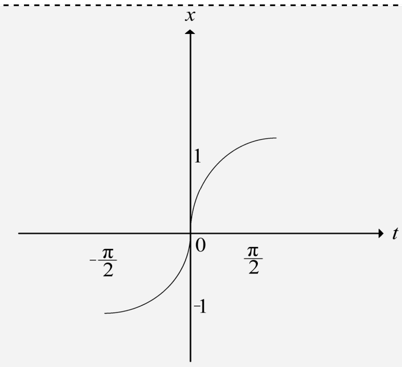
$$\lim_{x\to0^+}[\tan x\times\ln(\arcsin x)]=\lim_{x\to0^+}[x\times\ln(\arcsin x)] \qquad （1）式$$

令 $t=\arcsin x$，则有

$$\lim_{x\to0^+}[x\times\ln(\arcsin x)]=\lim_{t\to0^+}(\sin t\times\ln t) \qquad （2）式$$

每当讲到这里时，总有很多同学不明白（2）式究竟是怎么得出来的，现在给大家详细地解释一下。

首先，令 $t=\arcsin x$，则 $\sin t=x$，所以 $[x\times\ln(\arcsin x)]$ 可以变为 $(\sin t\times\ln t)$。那么“$\lim\limits_{x\to0^+}$”为何变成了“$\lim\limits_{t\to0^+}$”呢？现在把 $x=\sin t$ 的图画出来看看



有的同学可能要问："正弦函数不是周期函数吗？为什么只画了$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上的图？"这是因为现在画的这个$x=\sin t$图是由反三角函数$t=\arcsin x$推出来的，而反三角函数$t=\arcsin x$的值域是$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，这就意味着$y=\sin t$的定义域是$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$。

既然$\sin t=x$，而$x\to 0^+$，这就意味着$\sin t\to 0^+$。$\sin t\to 0^+$的意思是函数$x=\sin t$从右侧趋于 0。现在看图，当t怎样时函数$x=\sin t$从右侧趋于 0 呢？显然是当t从右侧趋于 0 时，所以是"$\lim\limits_{t\to 0^+}$"。

（1）式、（2）式相结合，有

$$\lim_{x\to 0^+}[\tan x\times\ln(\arcsin x)]=\lim_{t\to 0^+}(\sin t\times\ln t)\qquad（3）式$$

根据等价无穷小法，（3）式可以变形为

$$\lim_{t\to 0^+}(\sin t\times\ln t)=\lim_{t\to 0^+}(t\times\ln t)\qquad（4）式$$

（3）式、（4）式相结合有

$$\lim_{x\to 0^+}[\tan x\times\ln(\arcsin x)]=\lim_{t\to 0^+}(t\times\ln t)\qquad（5）式$$

$\lim\limits_{t\to 0^+}(t\times\ln t)$可以变形为

$$\lim_{t\to 0^+}(t\times\ln t)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}}\qquad（6）式$$

（5）式、（6）式相结合，有

$$\lim_{x\to 0^+}[\tan x\times\ln(\arcsin x)]=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}}\qquad（7）式$$

由第二类洛必达法则可知

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}}\overset{?}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{(\ln t)'}{(\frac{1}{t})'}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to 0^+}-t=0\qquad（8）式$$

由于最后的结果是 0，0 是常数，属于"常数或∞"，所以将（8）式中的"$\overset{?}{=}$"改为"$=$"，有

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}}=0\qquad（9）式$$

（7）式、（9）式相结合，有

$$\lim_{x\to 0^+}[\tan x\times\ln(\arcsin x)]=0\qquad（10）式$$

由于$\lim\limits_{x\to 0^+}[\tan x\times\ln(\arcsin x)]=0$，所以$e^{\lim\limits_{x\to 0+}[\tan x\times\ln(\arcsin x)]=0}=e^0=1$。也就是说，本题的答案是 1。

例． 请计算$\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$。

解： 之前做过一道题"请判断$\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$的类型"，已经判断出$\lim\limits_{x\to 0^+}(\arcsin x)^{\tan x}$属于"$\infty^0$型"的题。那么按照刚刚讲的"$1^\infty$型、$0^0$型、$\infty^0$型"题目的解题方法来做就可以了。

$$\lim_{x\to 0+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 0+}e^{\ln(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{\ln x}\times\ln(\cot x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0+}[\frac{1}{\ln x}\times\ln(\cot x)]}$$

只需算出 $\lim\limits_{x\to0^+}[\frac{1}{\ln x}\times\ln(\cot x)]$ 即可。

$$\lim_{x\to0^+}[\frac{1}{\ln x}\times\ln(\cot x)]=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\ln x} \qquad （1）式$$

现在计算 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x$ 和 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(\cot x)$ 。

先计算 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x$ 。

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ 。

再计算 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(\cot x)$ 。

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to0^+}\cot x=+\infty$ 。既然 $\lim\limits_{x\to0^+}\cot x=+\infty$ ，那么 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(\cot x)$ 等于多少？如果大家不知道，则告诉大家一个结论：若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=+\infty$ ，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}\ln f(x)=+\infty$ 。由此结论可知 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(\cot x)=+\infty$ 。

综上所述，有 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$， $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(\cot x)=+\infty$ ，所以 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\ln x}$ 满足第二类洛必达法则的使用条件①。

而函数 $y=\ln(\cot x)$、$y=\ln x$ 均可导，所以 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\ln x}$ 满足第二类洛必达法则的使用条件②。

对 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\ln x}$ 使用第二类洛必达法则，有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\ln x}\overset{?}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{[\ln(\cot x)]'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\cot x}\times(-\frac{1}{\sin^2 x})}{\frac{1}{x}} \qquad （2）式$$

由于 $\frac{1}{\cot x}=\tan x$ ，所以

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\cot x}\times(-\frac{1}{\sin^2 x})}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x\times\frac{1}{\sin^2 x}\times(-1)}{\frac{1}{x}} \qquad （3）式$$

根据等价无穷小法，有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x\times\frac{1}{\sin^2 x}\times(-1)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\times\frac{1}{\sin^2 x}\times(-1)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}[x^2\times\frac{1}{\sin^2 x}\times(-1)] \qquad （4）式$$

（3）式、（4）式相结合有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\cot x}\times(-\frac{1}{\sin^2 x})}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}[x^2\times\frac{1}{\sin^2 x}\times(-1)] \qquad （5）式$$

$\lim\limits_{x\to0^+}[x^2\times\frac{1}{\sin^2 x}\times(-1)]$ 可以变形为

$$\lim_{x\to0^+}[x^2\times\frac{1}{\sin^2 x}\times(-1)]=-\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{\sin^2 x} \qquad （6）式$$

（5）式、（6）式相结合有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\cot x}\times(-\frac{1}{\sin^2 x})}{\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{\sin^2 x} \qquad （7）式$$

根据等价无穷小法，有

$$-\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{\sin^2 x}=-\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{x^2}=-\lim_{x\to0^+}1=-1 \qquad （8）式$$

（7）式、（8）式相结合有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\cot x}\times(-\frac{1}{\sin^2 x})}{\frac{1}{x}}=-1 \qquad （9）式$$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{\cot x}\times(-\dfrac{1}{\sin^2 x})}{\dfrac{1}{x}}$ 的最终计算结果是 -1，-1 是常数，属于“常数或 ∞”，所以将（2）式中的“$\overset{?}{=}$”改为“=”，有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\ln x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{\cot x}\times(-\dfrac{1}{\sin^2 x})}{\dfrac{1}{x}} \qquad （10）式$$

（9）式、（10）式相结合，有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\ln x}=-1 \qquad （11）式$$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(\cot x)}{\ln x}=-1$，所以 $e^{\lim\limits_{x\to0+}\frac{\ln(\cot x)}{\ln x}}=e^{-1}$。也就是说，本题的答案是 e^{-1}。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x$。

解： 之前做过一道题“请判断 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x$ 的类型”，已经判断出 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$ 属于“1^∞ 型”的题。那么按照刚刚讲的“1^∞ 型、0^0 型、∞^0 型”题目的解题方法来做就可以了。

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})^x=\lim_{x\to\infty}e^{\ln(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})^x}=\lim_{x\to\infty}e^{x\times\ln(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}[x\times\ln(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})]}$$

现在来算 $\lim\limits_{x\to\infty}[x\times\ln(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})]$。

$$\lim_{x\to\infty}[x\times\ln(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})]=\lim_{x\to\infty}[\frac{\ln(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})}{\dfrac{1}{x}}] \qquad （1）式$$

因为 $a=1+a-1$，所以有

$$\lim_{x\to\infty}[\frac{\ln(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})}{\dfrac{1}{x}}]=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1)}{\dfrac{1}{x}} \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，有

$$\lim_{x\to\infty}[x\times\ln(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})]=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1)}{\dfrac{1}{x}} \qquad （3）式$$

通过计算可知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1)=0$，所以根据等价无穷小法，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1)}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1}{\dfrac{1}{x}} \qquad （4）式$$

（3）式、（4）式相结合，有

$$\lim_{x\to\infty}[x\times\ln(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})]=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1}{\dfrac{1}{x}} \qquad （5）式$$

令 $\dfrac{1}{x}=t$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1}{\dfrac{1}{x}}$ 可以变为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t+\cos t-1}{t} \qquad （6）式$$

（5）式、（6）式相结合，得

$$\lim_{x\to\infty}[x\times\ln(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})]=\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t+\cos t-1}{t} \qquad （7）式$$

（7）式可以化为

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t+\cos t-1}{t}=\lim_{t\to0}(\frac{\sin 2t}{t}+\frac{\cos t-1}{t}) \qquad （8）式$$

（7）式、（8）式相结合，得

$$\lim_{x\to\infty}[x\times\ln(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})]=\lim_{t\to0}(\frac{\sin 2t}{t}+\frac{\cos t-1}{t}) \qquad （9）式$$

通过计算可知

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{t}=\lim_{t\to0}\frac{2t}{t}=2$$

$$\lim_{t\to0}\frac{\cos t-1}{t}=-\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t}=-\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{2}t^2}{t}=-\lim_{t\to0}\frac{1}{2}t=0$$

所以根据函数极限的第一种计算方法（基本计算方法）中的9个小技巧中的小技巧1，有

$$\lim_{t\to0}(\frac{\sin 2t}{t}+\frac{\cos t-1}{t})=2+0=2 \qquad （10）式$$

（9）式、（10）式相结合，得

$$\lim_{x\to\infty}[x\times\ln(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})]=2 \qquad （11）式$$

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}[x\times\ln(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})]=2$，所以 $e^{\lim\limits_{x\to\infty}[x\times\ln(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})]}=e^2$。也就是说，本题的答案是 e^2。

到目前为止，函数极限计算的四种方法（基本计算方法、等价无穷小法、洛必达法则法、固定套路法）已经都介绍完了。接下来要介绍的是数列的极限的计算方法。

1.2.2 数列的极限的计算方法

大家还记得如何识别数列的极限吗？很简单，就是看 lim 的正下方，如果 lim 的正下方写的是“$n\to$”，那么就属于数列的极限的计算题。而且要告诉大家的是，数列的极限和函数的极限不太一样，在函数的极限的计算题中，x 既可以趋于某个定值也可以趋于 ∞，而在数列的极限中，n 只能趋于 $+\infty$，不能趋于定点。**也就是说，所有的数列极限计算题“$\lim\limits_{n\to某某}$”中的“某某”处一定写的是“$+\infty$”。而且，在数列的极限的计算题中往往将“$n\to+\infty$”中的“+”省略，直接写为“$n\to\infty$”。所以，提醒大家不要因为题中写的是“$n\to\infty$”而误认为 n 还可以趋于 $-\infty$。**

数列的极限一共有三种计算方法，分别是：单调有界法、积分和式法、夹逼定理法。

方法 1. 单调有界法

注意：此方法100%用于题中给出了数列的递推公式的数列极限计算题。什么叫“100%用于？”也就是说，一旦某道计算数列极限的题中给出了数列的递推公式，那么就用此方法求解。

现在先来看一下什么叫“数列的递推公式”。

所谓“数列的递推公式”，指的是“前一项推后一项的公式”。

例如，某道题中说 $x_n=2n$，那么，$x_n=2n$ 是递推公式吗？答案：$x_n=2n$ 不是递推公式，而是通项公式。

再例如，某道题中说 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$，$x_{n+1}=\ln(1+x_n)$ 是递推公式吗？答案：$x_{n+1}=\ln(1+x_n)$ 是递推公式。

再例如，某道题中说 $x_n=\ln(3+x_{n-1})$，$x_n=\ln(3+x_{n-1})$ 是递推公式吗？答案：$x_n=\ln(3+x_{n-1})$ 是递推公式。

通项公式的表达形式是 $x_n=f(n)$，而递推公式的表达形式是 $x_{n+1}=f(x_n)$ 或 $x_n=f(x_{n-1})$。

相信大家现在已经能够识别什么是递推公式，那么请记住：**只要是给出了递推公式的数列极限计算题，就利用方法1（单调有界法）来做。只要是没给出递推公式的数列极限计算题，就不利用方法1（单调有界法）来做。**至于什么是“单调有界法”，在介绍之前，先来看几道题，看看哪些题应该用“单调有界法”来做，哪些题不应该用“单调有界法”来做。

例. 设 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$，$x_1>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。请判断这道题应不应该用方法1（单调有界法）来做。

解：首先看看本题是属于“函数的极限的计算题”还是“数列的极限的计算题”。由于 lim 下面写的是“$n\to$”，所以本题属于“数列的极限的计算题”，要想做本题，就要知道数列极限计算的三种方法，即单调有界法、积分和式法、夹逼定理法。

那么究竟应不应该用方法 1（单调有界法）来做呢？要看看本题给没给数列的递推公式。

很显然，本题中所说的 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$ 就是递推公式，应该用方法 1（单调有界法）来做。

例. 设 $a>0$ 为常数，$x_n=\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。请判断这道题应不应该用方法 1（单调有界法）来做。

解：首先看看本题是属于“函数的极限的计算题”还是“数列的极限的计算题”。由于 lim 下面写的是“$n\to$”，所以本题属于“数列的极限的计算题”，要想做本题，就要知道数列极限计算的三种方法，即单调有界法、积分和式法、夹逼定理法。

那么究竟应不应该用方法 1（单调有界法）来做呢？要看看本题给没给数列的递推公式。

很显然，本题没有给出数列的递推公式，所以本题不应该用方法 1（单调有界法）来做。

例. 设 $a>0$ 为常数，$x_n=\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(na+k)(na+k+1)}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。请判断这道题应不应该用方法 1（单调有界法）来做。

解：首先看看本题是属于“函数的极限的计算题”还是“数列的极限的计算题”。由于 lim 下面写的是“$n\to$”，所以本题属于“数列的极限的计算题”。

很显然，本题没有给出数列的递推公式，所以本题不应该用方法 1（单调有界法）来做。

例. 求数列极限 $w=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$。请判断这道题应不应该用方法 1（单调有界法）来做。

解：首先看看本题是属于“函数的极限的计算题”还是“数列的极限的计算题”。由于 lim 下面写的是“$n\to$”，所以本题属于“数列的极限的计算题”，要想做本题，就要知道数列极限计算的三种方法，即单调有界法、积分和式法、夹逼定理法。

那么究竟应不应该用方法 1（单调有界法）来做呢？要看看本题给没给数列的递推公式。

很显然，本题没有给出数列的递推公式，所以说本题不应该用方法 1（单调有界法）来做。

例. 设 $a_1>0$，$a_{n+1}=\dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n}\ (n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。请判断这道题应不应该用方法 1（单调有界法）来做。

解：首先看看本题是属于“函数的极限的计算题”还是“数列的极限的计算题”。由于 lim 下面写的是“$n\to$”，所以本题属于“数列的极限的计算题”，要想做本题，就要知道数列极限计算的三种方法，即单调有界法、积分和式法、夹逼定理法。

那么究竟应不应该用方法 1（单调有界法）来做呢？要看看本题给没给数列的递推公式。

很显然，本题中所说的 $a_{n+1}=\dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n}\ (n=1,2,\cdots)$，就是递推公式，所以本题给了数列的递推公式，本题应该用方法 1（单调有界法）来做。

相信大家现在应该已经能够轻易地判断出哪些题能用方法 1（单调有界法）来做，哪些题不能用方法 1（单调有界法）来做了。那么究竟什么叫“单调有界法”呢？下面通过一道例题来给大家讲“单调有界法”。

例. 设 $a_1>0$，$a_{n+1}=\dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n}\ (n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

解：这道题在之前曾经出现过，不过之前没有让大家真正去做这道题，只是让大家判断这道题究竟应该不应该用方法 1（单调有界法）来做，当时已经判断出这道题应该用方法 1（单调有界法）来做。那么，现在就要通过这道题来告诉大家“单调有界法”到底应该怎么用。

首先要告诉大家的是，这道题的问题虽然只有一问（就是计算出 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$），但是实际上，如果只算出 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，那么最多只能得到 30%的分数。假如这道题 10 分，那只能得 3 分。看到这里，大家可能心里会想，为什么？明明问题求的是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。这个就是做题经验的问题了，**大家一定要记住：以后凡是遇到应该用方法 1（单调有界法）做的题，绝对不能单纯地做出最后答案。必须要先证明这个极限存在！（尽管题中没让证明）然后再计算出答案。**

那么，究竟该如何证明极限存在呢？就利用“单调有界法”。具体就是：只需证明这个数列是单调递增并且有上界，**或者**只需证明这个数列是单调递减并且有下界，因为“单调递增且有上界”或“单调递减且有下界”可以被用来证明数列的极限存在。

看到这里，相信不少同学想问：“那究竟是证单调递增且有上界还是证单调递减且有下界？是都可以吗？”针对这个问题，我的回答是：“数列是定死的，也就是说，它到底是单调递增且有上界还是单调递减且有下界在客观上是定死的，你现在只是主观证明出来而已。也就是说，如果客观上来说这个数列是单调递增且有上界而不是单调

递减且有下界，那么怎么可能证明出单调递减且有下界呢？”

究竟是先证“单调”还是先证“有界”呢？应该是先证“有界”，然后在界内证“单调”。

应该如何证明有界呢？又应该如何证明单调呢？

证明有界一共有两种方法。

方法 1 是换常数。

方法 2 是用眼睛直接把界看出来。

证明单调就一种方法，那就是：将题中所给的递推公式 $a_{n+1}=f(a_n)$ 改写为 $y=f(x)$，然后证明函数 $y=f(x)$ 在刚刚证完的界内是单调递增的，此时只能说明数列是单调的，至于单调递增还是单调递减还不知道。之后，任意设一个满足条件的 x_1（当然，如果数列不是用 x_n 表示的而是用 a_n 表示的，那么就任意设一个满足条件的 a_1），然后用递推公式算出 $x^2(或a^2)$。如果 $x_2>x_1$，则说明此数列是单调递增的。如果 $x_2<x_1$，则说明此数列是单调递减的。

到此为止，就证明了极限存在。接着，就可以计算了。计算相当容易，只需要在题中所给的递推公式两侧同时取极限即可。

下面正式来做本题。

首先，证明数列有界。

对于本题来说，采用“换常数”的方法证有上界最合适，即

$$a_{n+1}=\frac{3(1+a_n)}{3+a_n}<\frac{3(3+a_n)}{3+a_n}=3$$

所以本题所给的数列有上界 3。也就是说，虽然这个数列有无穷多项（凡是让求极限的数列都是有无穷多项），但是这无穷多项中的每一项都不可能大于等于 3。

对于本题来说，采用“用眼睛直接把界看出来”的方法证有下界最合适，即由于 $a_{n+1}=\dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n}$，而题中又说了 $a_1>0$，所以应该一眼就能看出来这个数列的每一项都是大于 0 的。所以，本题所给的数列有下界 0。也就是说，虽然这个数列有无穷多项（凡是让求极限的数列都有无穷多项），但是这无穷多项中的每一项都不可能小于等于 0。

接着证明单调。在证明单调之前，先问大家一件事情：是每道这种题都要把上、下界证出来吗？当然不是，这道题是因为上、下界都有，而有的题只有上界或只有下界。而且针对这道题来说，也不是证出的上界和下界都有用。具体来说就是，如果证出数列是单调递增的，那只有上界有用，因为“单调递增且有上界”的数列极限必存在；如果证出数列是单调递减的，那只有下界有用，因为“单调递减且有下界”的数列极限必存在。

现在证明单调。

由于 $a_{n+1}=\dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n}$，所以取函数 $y=\dfrac{3(1+x)}{3+x}$。现在要证明此函数在 $(0,3)$ 内是单调递增的。因为，只有函数 $y=\dfrac{3(1+x)}{3+x}$ 在 $(0,3)$ 内是单调递增的，才能说明数列单调。至于数列是单调递增还是单调递减，需要比较 a_2 和 a_1。

应该如何证明函数 $y=\dfrac{3(1+x)}{3+x}$ 单调递增呢？很简单，求导即可（导函数大于 0 则说明原函数是单调递增的）。

由于 $y=\dfrac{3(1+x)}{3+x}$

所以 $y'=[\dfrac{3(1+x)}{3+x}]'=\dfrac{3(3+x)-(3+3x)}{(3+x)^2}=\dfrac{9+3x-3-3x}{(3+x)^2}=\dfrac{6}{(3+x)^2}$

显然，导函数 $y'=\dfrac{6}{(3+x)^2}$ 在（0,3）内是单调递增的，所以说明该数列具有单调性。

现在再来看看该数列是单调递增的还是单调递减的。由于题中说 $a_1>0$，所以假设 a_1=1。根据递推公式 $a_{n+1}=\dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n}$ 可知

$$a_2=\frac{3(1+1)}{3+1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}。$$

由于刚刚已经证明了数列具有单调性，并且 $a_2>a_1$，所以该数列是单调递增的。

综上所述，由于本题所给的数列单调递增并且有上界（上界是 3），所以该数列的极限存在。

如果这道题满分是 10 分，那做到现在已经得了 7 分，接下来的 3 分就是计算。怎样计算呢？非常简单，只需在题中所给的递推公式两侧同时取极限“$\lim\limits_{n\to\infty}$”即可。

所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n}$

而对于任何一个数列，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$（这个结论大家记住即可），所以有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3(1+a_n)}{3+a_n}$$

令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则有

$$A = \lim_{n\to\infty}\frac{3(1+a_n)}{3+a_n} \qquad \text{（1）式}$$

由于 $3(1+a_n) = 3+3a_n$，所以有

$$A = \lim_{n\to\infty}\frac{3+3a_n}{3+a_n} \qquad \text{（2）式}$$

根据加法极限的可拆性，可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(3+3a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}3 + \lim\limits_{n\to\infty}3a_n = 3+3A$，$\lim\limits_{n\to\infty}(3+a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}3 + \lim\limits_{n\to\infty}a_n = 3+A$，所以根据之前讲过的 9 个小技巧中的小技巧 1，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+3a_n}{3+a_n} = \frac{3+3A}{3+A} \qquad \text{（3）式}$$

（2）式、（3）式相结合，得

$$A = \frac{3+3A}{3+A} \qquad \text{（4）式}$$

整理（4）式，可得

$$A^2 - 3 = 0 \qquad \text{（5）式}$$

求解（5）式，得

$$A = \pm\sqrt{3}$$

一个数列的极限只要存在，就肯定是唯一的。而现在算出了两个极限，说明肯定要舍弃一个，那么到底舍弃哪个呢？大家记住，以后这种题的极限肯定是在界内（可以含端点），而不能在界外。

对于本题来说，由于界是 $(0,3)$，所以极限肯定是区间 $[0,3]$ 内的一个数（注意是闭区间）。

在 $\sqrt{3}$ 和 $-\sqrt{3}$ 这两个数中，哪个在区间 $[0,3]$ 内？很显然 $\sqrt{3}$ 在区间 $[0,3]$ 内，而 $-\sqrt{3}$ 不在区间 $[0,3]$ 内，所以舍去 $A = -\sqrt{3}$，取 $A = \sqrt{3}$。

所以本题的答案是 $\sqrt{3}$。

例. 设 $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$，$x_1 > 0$，求 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$。

解： 这道题在之前曾经出现过，不过之前没有让大家真正去做这道题，只是让大家判断这道题究竟应该不应该用方法 1（单调有界法）来做，当时已经判断出这道题应该用方法 1（单调有界法）来做。那么，现在就要通过这道题来告诉大家“单调有界法”到底应该怎么用。

同上一道题一样，这道题的问题虽然只有一问（就是计算出 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$），但是实际上，如果只算出 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$，那么最多只能得到 30%的分数。假如这道题 10 分，那只能得 3 分。看到这里，大家可能心里会想，为什么？明明问题求的是 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$。这个就是做题经验的问题了，**大家一定要记住：以后凡是遇到应该用方法 1（单调有界法）做的题，绝对不能单纯地做出最后答案。必须要先证明这个极限存在！（尽管题中没让证明）然后再计算出答案。**

那么，究竟该如何证明极限存在呢？就利用“单调有界法”。

先证明有界。

对于本题来说，采用“用眼睛把界直接看出来”的方法证有界最合适，即由于 $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$，而题中又说了 $x_1 > 0$，所以应该一眼就能看出来这个数列的每一项都是大于 0 的（因为 $\ln 1 = 0$，而 $y = \ln x$ 是增函数）。所以，本题所给的数列有下界 0。也就是说，虽然这个数列有无穷多项（凡是让求极限的数列都有无穷多项），但是这无穷多项中的每一项都不可能小于等于 0。

接下来证明单调，在没证以前就知道，一会儿证出的单调肯定是单调递减的（因为现在证出了“有下界”，“有下界”只有和“单调递减”配合在一起才能说明极限存在）。

现在证明单调。

由于 $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$，所以取函数 $y = \ln(1+x)$。现在要证明此函数在刚刚证完的界 $(0,+\infty)$ 内是单调递增的。因为，只有函数 $y = \ln(1+x)$ 在界 $(0,+\infty)$ 内是单调递增的，才能说明数列单调。至于数列是单调递增还是单调递减，需要比较 x_2 和 x_1。

那么应该如何证明函数 $y = \ln(1+x)$ 单调递增呢？是像上一道题那样求导吗？答案是不用。为何？求导的作用就是通过导函数的正负来判断原函数的单调性，如果能一眼看出原函数的单调性，当然就不用求导。本题就是这样，

大家在高中时就学过对数函数，一眼就能看出函数 $y=\ln(1+x)$ 是单调递增的（也就是函数值随着自变量的增大而增大），所以不用求导。

由于 $y=\ln(1+x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调递增的，所以说明该数列具有单调性。

现在再来看看该数列是单调递增的还是单调递减的。由于题中说 $x_1>0$，所以假设 $x_1=1$。根据递推公式 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$ 可知

$x_2=\ln(1+1)=\ln 2$。

而 $\ln 2$ 是小于1的，所以 $x_2<x_1$。

由于刚刚已经证明了数列具有单调性，并且 $x_2<x_1$，所以该数列是单调递减的。

综上所述，由于本题所给的数列单调递减并且有下界（下界是 0），所以该数列的极限存在。

如果这道题满分是 10 分，那做到现在已经得了 7 分，接下来的 3 分就是计算。怎样计算呢？非常简单，只需在题中所给的递推公式两侧同时取极限“$\lim\limits_{n\to\infty}$”即可。

所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+x_n)$

而对于任何一个数列来说，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，所以有

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+x_n)$

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则有

$A=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+x_n)$ （1）式

以前讲过，像这种复合的直接深入，所以有

$\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+x_n)=\ln[\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)]=\ln[\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}x_n]=\ln(1+A)$ （2）式

（1）式、（2）式相结合，得

$A=\ln(1+A)$ （3）式

求解（3）式，得

$A=0$

所以本题的答案为 0。

例. 设 $u_1>-6$，$u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}\,(n=1,2,\cdots)$，试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在，并求此极限。

解：首先看看本题是属于“函数的极限的计算题”还是“数列的极限的计算题”。由于 lim 下面写的是“$n\to$”，所以本题属于“数列的极限的计算题”，要想做本题，就要知道数列极限计算的三种方法，即单调有界法、积分和式法、夹逼定理法。

那么究竟应不应该用方法 1（单调有界法）来做呢？要看看本题给没给数列的递推公式。

很显然，本题中所说的 $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}\,(n=1,2,\cdots)$ 就是递推公式，所以本题给了数列的递推公式，本题应该用方法 1（单调有界法）来做。

这道题问了两问，第一问是让证明极限存在，第二问是让求极限。其实通过以上两道题，大家应该明白，就算本题没让证明极限存在，只是让求极限，也必须证明极限存在。

先来证明有界。

对于本题来说，采用“直接用眼睛把界看出来”的方法证明有界最合适，即从这个数列的第二项开始，每项都是大于 0 的。而第一项是大于 -6 的（这是题中明确说的），所以本题所给的数列有下界 -6。也就是说，这个数列的每一项都不可能小于等于 -6。

再来证明单调。

由于此数列的递推公式是 $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}\,(n=1,2,\cdots)$，所以取函数 $y=\sqrt{6+x}$。求导可得 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{6+x}}$。由于在界 $(-6,+\infty)$ 内 $y'>0$，说明原函数 $y=\sqrt{6+x}$ 是单调递增的，说明本题所给的数列具有单调性。至于到底是单调递增的，还是单调递减的，需要比较此数列的第一项和第二项。

由于 $u_1>-6$，不妨取 $u_1=0$。根据递推公式 $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$，可得 $u_2=\sqrt{6}$。预计现在 99%的同学都会认为此数列是单调递增的，可是实际上不是！这到底是为什么呢？因为对于这个数列来说，第二项不一定永远大于第一项！比如取 $u_1=10$，根据递推公式 $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$ 可得 $u_2=4$。第二项就小于第一项了！之前做的那两道题都不存在这个问题，而本题存在这个问题。这时肯定有同学会问：“是怎么发现本题存在这个问题的？”回答是：“这是看出来的，你要看不出来就没办法了，但是一般像这种题都非常容易看出来！”

因此，从头开始。那么到底如何从头开始呢？**大家记住：以后像这种情况，要从头开始时，就要分段。再具体就是，将数列的第一项的值范围分段，然后每一段用单调有界法证明极限存在。**

对于本题来说，题中告诉了第一项是大于 -6 的，又给出了递推公式 $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$，因此以 3 来分段。为什么要以 3 来分段呢？怎么不以别的数来分段呢？因为刚才第一次取的是 $u_1=0$，通过递推公式算出 $u_2=\sqrt{6}$，$u_2>u_1$。然后通过递推公式可知当 $u_1=3$ 时，$u_2=3$，这时 $u_2=u_1$。而刚才第二次取的是 $u_1=10$，通过递推公式算出 $u_2=4$，这时 $u_2<u_1$。由此可知，应该以 3 来分段。即

第一种情况：当 $-6<u_1<3$ 时。

先证明有界。

采用“用眼睛直接看出来”的方法证明有界。由递推公式 $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$ 可以明显看出，当 $-6<u_1<3$ 时，这个数列从第二项起都在区间 $(0,3)$ 内取值，但是第一项可能是小于 0 的，但也不可能小于等于 -6，所以这个数列有上界 3，下界 -6。

再证明单调。

由于此数列的递推公式是 $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}\,(n=1,2,\cdots)$，所以取函数 $y=\sqrt{6+x}$。求导可得 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{6+x}}$。由于在界 $(-6,3)$ 内 $y'>0$，说明原函数 $y=\sqrt{6+x}$ 是单调递增的，说明本题所给的数列具有单调性。至于到底是单调递增的，还是单调递减的，需要比较此数列的第一项和第二项。

由于 $-6<u_1<3$，所以不妨取 $u_1=0$，根据递推公式 $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$ 可以推出 $u_2=\sqrt{6}$。由于 $u_2>u_1$，所以此数列是单调递增的。

综上所述，当 $-6<u_1<3$ 时，由于数列“单调递增且有上界（上界是 3）”，所以该数列极限存在。

第二种情况：当 $u_1=3$ 时。

由递推公式 $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$ 可以明显看出，当 $u_1=3$ 时，这个数列从第二项起就都是 3。也就是说，这个数列是一个常数列，因此就不用采用单调有界法来证明极限存在了。因为常数列的极限一定存在，而且就等于那个常数。

综上所述，当 $u_1=3$ 时，由于该数列是一个常数列，所以该数列极限存在（而且极限值是 3）。

第三种情况：当 $u_1>3$ 时。

先证明有界。

采用“用眼睛直接看出来”的方法证明有界。由递推公式 $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$ 可以明显看出，当 $u_1>3$ 时，这个数列从第二项起都在区间 $(0,3)$ 内取值，所以这个数列有下界 3。

再证明单调。

由于此数列的递推公式是 $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}\,(n=1,2,\cdots)$，所以取函数 $y=\sqrt{6+x}$。求导可得 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{6+x}}$。由于在界 $(3,+\infty)$ 内 $y'>0$，说明原函数 $y=\sqrt{6+x}$ 是单调递增的，说明本题所给的数列具有单调性。至于到底是单调递增的，还是单调递减的，需要比较此数列的第一项和第二项。

由于 $u_1>3$，所以不妨取 $u_1=10$，根据递推公式 $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$ 可以推出 $u_2=4$。由于 $u_2<u_1$，所以此数列是单调递减的。

综上所述，当 $u_1>3$ 时，由于数列“单调递减且有下界（下界是 3）”，所以该数列极限存在。

综上所述，该数列的极限一定是存在的。在题中所给的递推公式两侧同时取极限“$\lim\limits_{n\to\infty}$”，即可算出极限值。

所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{6+u_n}$

而对于任何一个数列来说，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$，所以有

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{6+u_n}$

令 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$，则有

$A=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{6+u_n}$　　　　（1）式

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{6+u_n}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}(6+u_n)}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}6+\lim\limits_{n\to\infty}u_n}=\sqrt{6+A}$　　　　（2）式

（1）式、（2）式相结合，得

$A=\sqrt{6+A}$　　　　（3）式

求解（3）式，得

$A=3$

所以本题的答案为 3。

例. 设 $0<x_0<1$，$x_{n+1}=x_n(2-x_n)$，求证 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解： 首先看看本题是属于"函数的极限的计算题"还是"数列的极限的计算题"。由于 lim 下面写的是"$n\to$"，所以本题属于"数列的极限的计算题"，要想做本题，就要知道数列极限计算的三种方法，即单调有界法、积分和式法、夹逼定理法。

那么究竟应不应该用方法 1（单调有界法）来做呢？要看看本题给没给数列的递推公式。

很显然，本题中所说的 $x_{n+1}=x_n(2-x_n)$ 就是递推公式，所以本题给了数列的递推公式，应该用方法 1（单调有界法）来做。

先证明有界。

对于本题来说，采用"用眼睛把界直接看出来"的方法证有界最合适，即由于 $x_{n+1}=x_n(2-x_n)$，而

$$x_{n+1}=x_n(2-x_n)=-x_n^2+2x_n=1-(x_n^2-2x_n+1)=1-(x_n-1)^2$$

又由于这个数列的第一项 $0<x_0<1$，由递推公式 $x_{n+1}=1-(x_n-1)^2$ 可知这个数列的每一项都在区间 $(0,1)$ 内取值，所以这个数列有下界 0，上界 1。

现在证明单调。

由于 $x_{n+1}=x_n(2-x_n)$，所以取函数 $y=x(2-x)$。而

$$y'=2-2x$$

很明显在区间 $(0,1)$ 内 $y'>0$，所以函数 $y=x(2-x)$ 单调递增，说明该数列具有单调性。

现在再来看看该数列是单调递增的还是单调递减的。由于 $0<x_0<1$，所以假设 $x_0=\dfrac{1}{2}$。根据递推公式 $x_{n+1}=x_n(2-x_n)$ 可知 $x_1=\dfrac{3}{4}$。

而 $\dfrac{3}{4}>\dfrac{1}{2}$，即 $x_1>x_0$。

由于刚刚已经证明了数列具有单调性，并且 $x_1>x_0$，所以该数列是单调递增的。

综上所述，由于本题所给的数列单调递增并且有上界（上界是 1），所以该数列的极限存在。

下面计算极限值。

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}x_n(2-x_n)$$

而对于任何一个数列来说，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，所以有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}[x_n(2-x_n)]$$

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则有

$$A=\lim_{n\to\infty}[x_n(2-x_n)] \qquad \text{（1）式}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}[x_n(2-x_n)]=\lim_{n\to\infty}(2x_n-x_n^2)=2A-A^2 \qquad \text{（2）式}$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$A=2A-A^2 \qquad \text{（3）式}$$

求解（3）式，得

$$A=0 \text{ 或 } A=1$$

由于极限若存在则必唯一，因此需要舍一个。之前跟大家说舍界外的那个，可是本题的界是 $(0,1)$，而 0 和 1 都在区间 $[0,1]$ 中，那舍谁？此时要看单调性，由于此数列是单调递增的，所以取大的那个数，舍小的那个数，取 1 舍 0，所以本题的答案为 1。

方法 2. 积分和式法

注意：此方法 100%用于题中含"连加符号 Σ"的数列极限计算题，此方法 100%用于题中含"连乘符号 Π"的数列极限计算题。

什么叫"100%用于"呢？

也就是说，一旦某道让计算数列极限的题中出现了**"连加符号 Σ"**，那么就用此方法求解；一旦某道让计算数列极限的题中出现了**"连乘符号 Π"**，那么就用此方法求解。

下面来看几道例题。

例. 设 $x_n=\dfrac{1}{n^4}\prod\limits_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。请问这道题应该用积分和式法来做吗？

解： 首先看看本题是属于"函数的极限的计算题"还是"数列的极限的计算题"。由于 lim 下面写的是"$n\to$"，

所以本题属于“数列的极限的计算题”，要想做本题，就要知道数列极限计算的三种方法，即单调有界法、积分和式法、夹逼定理法。

那么究竟应不应该用方法 2（积分和式法）来做呢？要看看本题中出没出现**“连加符号 Σ”**或**“连乘符号 Π”**。

很显然，本题中出现了**“连乘符号 Π”**，所以本题应该用方法 2（积分和式法）来做。

例. 设 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(\sqrt{1+\dfrac{i}{n^2}}-1)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。请问这道题应该用积分和式法来做吗？

解：首先看看本题是属于“函数的极限的计算题”还是“数列的极限的计算题”。由于 lim 下面写的是“$n\to$”，所以本题属于“数列的极限的计算题”，要想做本题，就要知道数列极限计算的三种方法，即单调有界法、积分和式法、夹逼定理法。

那么究竟应不应该用方法 2（积分和式法）来做呢？要看看本题中出没出现**“连加符号 Σ”**或**“连乘符号 Π”**。

很显然，本题中出现了**“连加符号 Σ”**，所以本题应该用方法 2（积分和式法）来做。

例. 求 $w=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n\tan\dfrac{i}{n}}{n^2+i}$。请问这道题应该用积分和式法来做吗？

解：首先看看本题是属于“函数的极限的计算题”还是“数列的极限的计算题”。由于 lim 下面写的是“$n\to$”，所以本题属于“数列的极限的计算题”，要想做本题，就要知道数列极限计算的三种方法，即单调有界法、积分和式法、夹逼定理法。

那么究竟应不应该用方法 2（积分和式法）来做呢？要看看本题中出没出现**“连加符号 Σ”**或**“连乘符号 Π”**。

很显然，本题中出现了**“连加符号 Σ”**，所以本题应该用方法 2（积分和式法）来做。

相信大家现在已经能够轻易地判断出何种题应该用积分和式法来做了，那么积分和式法到底应该如何去用呢？下面通过一道例题来给大家讲解。

例. 请计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(3\times\dfrac{i}{n})$。

解：首先判断这道题应不应该用积分和式法来做。由于 lim 下面写的是“$n\to$”，所以本题属于“数列的极限的计算题”，要想做本题，就要知道数列极限计算的三种方法，即单调有界法、积分和式法、夹逼定理法。

那么究竟应不应该用方法 2（积分和式法）来做呢？要看看本题中出没出现**“连加符号 Σ”**或**“连乘符号 Π”**。

很显然，本题中出现了**“连加符号 Σ”**，所以本题应该用方法 2（积分和式法）来做。

那么到底怎么做呢？在讲之前，先提醒大家注意一点，**那就是：以下给大家讲的方法是这类题的通用方法，而不是特指这道题。**

第一步：将 Σ 里面的那个函数抽象为 $f(\dfrac{a}{b})$，其中 $a=x_1i+x_2$，$b=x_3n+x_4$。

针对本题来说，Σ 里面的那个函数是 $(3\times\dfrac{i}{n})$，$(3\times\dfrac{i}{n})$ 很显然是 $\dfrac{i}{n}$ 的一个函数，所以应该把 $(3\times\dfrac{i}{n})$ 抽象为 $f(\dfrac{i}{n})$。

在本题中，$x_1=1,x_2=0,x_3=1,x_4=0$。经过这样抽象，本题 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(3\times\dfrac{i}{n})$ 变为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\dfrac{i}{n})$。

第二步：关于 Σ 下方的那个 i，让 i 取三个值。第一个值是 Σ 下方写的 i 等于的那个数，第二个值是比是 Σ 下方写的 i 等于的那个数大 1 的数，第三个值是 Σ 上方写的那个数。

针对本题来说，由于 Σ 下方写的是 $i=1$，Σ 上方写的那个数是 n。所以应该让 i 取 $i=1,i=2,i=n$。

第三步：将刚才取的那三个 i 的值代入到 $\dfrac{a}{b}$ 中，然后算出三个 $\dfrac{a}{b}$。

针对本题来说，$\dfrac{a}{b}$ 是 $\dfrac{i}{n}$，所以将 $i=1,i=2,i=n$ 代入到 $\dfrac{i}{n}$ 中，算出的三个值为 $\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},1$。

第四步：用算出的第二个值减去算出的第一个值来确定前面应该乘以多少，然后看第一个值和第三个值分别离哪个常数最近来确定积分上下限。

针对本题来说，第二个值是 $\dfrac{2}{n}$，第一个值是 $\dfrac{1}{n}$，第二个值减去第一个值等于 $\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n}$，说明前面应该乘以 $\dfrac{1}{n}$。第一个值 $\dfrac{1}{n}$ 很显然离常数 0 最近，所以积分下限是 0。第三个值 1 很显然离常数 1 最近（它本身就是 1），所以积分上限是 1。

综上所述有

$\frac{1}{n}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

注意：假设第二个值减去第一个值等于的不是$\frac{1}{n}$而是$\frac{2}{n}$，那么就是

$\frac{2}{n}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

第五步：计算出最终的结果。

针对本题来说，$\frac{1}{n}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，由于$f(\frac{i}{n})=(3\times\frac{i}{n})$，所以

$f(x)=3x$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 3x\mathrm{d}x=3\times\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=3\times(\frac{1}{2}-0)=\frac{3}{2}$。

所以，$\frac{1}{n}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})=\frac{3}{2}$。

当然，积分我还没有讲，所以大家不会算也正常。

下面再来看几道例题。

例. 请计算$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{3i}{n^2})$。

解：上一道题是"请计算$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(3\times\frac{i}{n})$"，本题是"请计算$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{3i}{n^2})$"，不知道大家是否发现，这道题和上一道题其实是同一道题，一点也没有变。为何？因为

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{3i}{n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{3i}{n}\times\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{3i}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(3\times\frac{i}{n})$

大家可能比较奇怪为什么$\frac{1}{n}$可以提到Σ之外，下面解释一下。注意这里"$\sum\limits_{i=1}^{n}$"说明在$(\frac{3i}{n^2})$中只有i是在变的（i从1变到n），而n是永恒不变的。既然n永恒不变，就意味着可以把n当成一个常数，因此可以提到Σ外面。

接下来，本题就和上一道题一模一样了。

例. 请计算$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n}(3\times\frac{i}{n})$。

解：第一眼看上去，本题好像与之前的题一样，但细看，就会发现其实不一样。不一样的地方在于本题中的i是从0开始取值的。那么本题应该如何去做呢？还是按照那五步。

第一步：将Σ里面的那个函数抽象为$f(\frac{a}{b})$，其中$a=x_1 i+x_2$，$b=x_3 n+x_4$。

针对本题来说，Σ里面的那个函数是$(3\times\frac{i}{n})$，所以应该把$(3\times\frac{i}{n})$抽象为$f(\frac{i}{n})$。

在本题中$x_1=1,x_2=0,x_3=1,x_4=0$。经过这样抽象，本题$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(3\times\frac{i}{n})$变为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$。

第二步：关于Σ下方的那个i，让i取三个值。第一个值是Σ下方写的i等于的那个数，第二个值是比是Σ下方写的i等于的那个数大1的数，第三个值是Σ上方写的那个数。

针对本题来说，由于Σ下方写的是$i=0$，Σ上方写的是n，所以应该让i取$i=0,i=1,i=n$。

第三步：将刚才取的那三个i的值代入到$\frac{a}{b}$中，然后算出三个$\frac{a}{b}$。

针对本题来说，$\frac{a}{b}$是$\frac{i}{n}$，所以将$i=0,i=1,i=n$代入到$\frac{i}{n}$中，算出的三个值为$0,\frac{1}{n},1$。

第四步：用算出的第二个值减去算出的第一个值来确定前面应该乘以多少，然后看第一个值和第三个值分别离哪个常数最近来确定积分上下限。

针对本题来说，第二个值是$\frac{1}{n}$，第一个值是0，第二个值减去第一个值等于$\frac{1}{n}-0=\frac{1}{n}$，说明前面应该乘以$\frac{1}{n}$。第一个值0很显然离常数0最近（它本身就是0），所以积分下限是0。第三个值1很显然离常数1最近（它本身就是1），所以积分上限是1。

综上所述有

$\frac{1}{n}\lim\limits_{n}\sum\limits_{i=0}^{n} f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

注意：假设第二个值减去第一个值等于的不是$\frac{1}{n}$而是$\frac{2}{n}$，那么就是

$$\frac{2}{n}\lim_{n}\sum_{i=0}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

第五步：计算出最终的结果。

对本题来说，$\frac{1}{n}\lim_{n}\sum_{i=0}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，由于$f(\frac{i}{n})=(3\times\frac{i}{n})$，所以$f(x)=3x$。所以$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 3x\mathrm{d}x=3\times\frac{x^2}{2}\Big|_0^1$ $=3\times(\frac{1}{2}-0)=\frac{3}{2}$。所以本题的答案是$\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}f(\frac{i}{n})=\frac{3}{2}$。

本题和之前的题的答案是一样的。

例．请计算$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\frac{4i-2}{2n}$。

解：首先判断这道题应不应该用积分和式法来做。由于 lim 下面写的是“$n\to$”，所以本题属于“数列的极限的计算题”，要想做本题，就要知道数列极限计算的三种方法，即单调有界法、积分和式法、夹逼定理法。

那么究竟应不应该用方法 2（积分和式法）来做呢？要看看本题中出没出现**“连加符号Σ”**或**“连乘符号Π”**。很显然，本题中出现了**“连加符号Σ”**，所以本题应该用方法 2（积分和式法）来做。

第一步：将Σ里面的那个函数抽象为$f(\frac{a}{b})$，其中$a=x_1i+x_2$，$b=x_3n+x_4$。

针对本题来说，Σ里面的那个函数是$\frac{4i-2}{2n}$，$\frac{4i-2}{2n}$很显然是$\frac{2i-1}{n}$的一个函数，所以应该把$\frac{4i-2}{2n}$抽象为$f(\frac{2i-1}{n})$。当然了，也可以将本题中所给的$\frac{4i-2}{2n}$就当成是$\frac{4i-2}{2n}$的一个函数，即把$\frac{4i-2}{2n}$抽象为$f(\frac{4i-2}{2n})$。两者选其一即可，本题把$\frac{4i-2}{2n}$抽象为$f(\frac{2i-1}{n})$。

在本题中$x_1=2,x_2=-1,x_3=1,x_4=0$。经过这样抽象，本题$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\frac{4i-2}{2n}$变为$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}f(\frac{2i-1}{n})$。

第二步：关于Σ下方的那个i，让i取三个值。第一个值是Σ下方写的i等于的那个数，第二个值是比是Σ下方写的i等于的那个数大 1 的数，第三个值是Σ上方写的那个数。

针对本题来说，由于Σ下方写的是$i=1$，Σ上方写的是$2n$，所以应该让i取$i=1,i=2,i=2n$。

第三步：将刚才取的那三个i的值代入到$\frac{a}{b}$中，然后算出三个$\frac{a}{b}$。

针对本题来说，$\frac{a}{b}$是$\frac{2i-1}{n}$，所以将$i=1,i=2,i=2n$代入到$\frac{i}{n}$中，算出的三个值为$\frac{1}{n},\frac{3}{n},\frac{4n-1}{n}$。

第四步：用算出的第二个值减去算出的第一个值来确定前面应该乘以多少，然后看第一个值和第三个值分别离哪个常数最近来确定积分上下限。

针对本题来说，第二个值是$\frac{3}{n}$，第一个值是$\frac{1}{n}$，第二个值减去第一个值等于$\frac{3}{n}-\frac{1}{n}=\frac{2}{n}$，说明前面应该乘以$\frac{2}{n}$。第一个值$\frac{1}{n}$很显然离常数 0 最近，所以积分下限是 0。第三个值$\frac{4n-1}{n}$很显然离常数 4 最近，所以积分上限是 4。

综上所述有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{2n}f(\frac{2i-1}{n})=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$$

第五步：计算出最终的结果。

针对本题来说，$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{2n}f(\frac{2i-1}{n})=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$，由于$f(\frac{2i-1}{n})=\frac{2i-1}{n}$，所以$f(x)=x$，$\int_0^4 x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\Big|_0^4=8$。所以$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{2n}f(\frac{2i-1}{n})=8$。难道本题最后的答案就是 8 吗？当然不是。因为算出的是$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{2n}\frac{4i-2}{2n}$，而本题的问题问的是$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\frac{4i-2}{2n}$。也就是说，$2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\frac{4i-2}{2n}=8$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\frac{4i-2}{2n}=4$。

例．设$x_n=\frac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}$，求$\lim_{n\to\infty}x_n$。

解：首先判断这道题应不应该用积分和式法来做。由于 lim 下面写的是“$n\to$”，所以本题属于“数列的极限

的计算题”，要想做本题，就要知道数列极限计算的三种方法，即单调有界法、积分和式法、夹逼定理法。

那么究竟应不应该用方法 2（积分和式法）来做呢？要看看本题中出没出现**“连加符号 Σ”**或**“连乘符号 Π”**。

很显然，本题中出现了**“连乘符号 Π”**，所以本题应该用方法 2（积分和式法）来做。

之前做的那几道题都是因为出现**“连加符号 Σ”**，而现在是**“连乘符号 Π”**，那么怎么做呢？在给大家讲之前，先强调一点，这里讲的是这一类题型的做法，而不是针对本题说的。

很简单，只要将“连乘”转换成“连加”，然后再利用之前的那五个步骤去做就可以了。那么到底如何将“连乘”转换成“连加”呢？大家应该都知道“$\ln\Pi=\Sigma\ln$”，因此利用“$\ln\Pi=\Sigma\ln$”将“连乘”转换成“连加”。可是，哪来的 $\ln$ 呢？利用 $A=\mathrm{e}^{\ln A}$ 就可以了。

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln x_n}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln x_n}}$$

也就是说，只需算出 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n$ 即可。

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}} \qquad (1)式$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\prod\limits_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}}{n^4} \qquad (2)式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\prod\limits_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}}{n^4} \qquad (3)式$$

因为 $\ln\dfrac{a}{b}=\ln a-\ln b$，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\prod\limits_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}}{n^4}=\lim_{n\to\infty}[\ln\prod_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}-\ln n^4] \qquad (4)式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}[\ln\prod_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}-\ln n^4] \qquad (5)式$$

因为 $\ln a^b=b\ln a$，所以有

$$\lim_{n\to\infty}[\ln\prod_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}-\ln n^4]=\lim_{n\to\infty}[\ln\prod_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}-4\ln n] \qquad (6)式$$

（5）式、（6）式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}[\ln\prod_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}-4\ln n] \qquad (7)式$$

利用公式 $\ln\Pi=\Sigma\ln$，有

$$\lim_{n\to\infty}[\ln\prod_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}-4\ln n]=\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{2n}\ln(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}-4\ln n] \qquad (8)式$$

（7）式、（8）式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{2n}\ln(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}-4\ln n] \qquad (9)式$$

因为 $\ln a^b=b\ln a$，所以有

$$\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{2n}\ln(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}-4\ln n]=\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\ln(n^2+i^2)-4\ln n] \qquad (10)式$$

（9）式、（10）式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\ln(n^2+i^2)-4\ln n] \qquad (11)式$$

由于是“$\sum\limits_{i=1}^{2n}$”，说明在 $\dfrac{1}{n}\ln(n^2+i^2)$ 中 i 是变量而 n 不是变量，所以在 $\dfrac{1}{n}\ln(n^2+i^2)$ 中可以把 $\dfrac{1}{n}$ 当成是常数，而常数是可以提到 Σ 外面的，所以有

$$\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\ln(n^2+i^2)-4\ln n]=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln(n^2+i^2)-4\ln n] \qquad (12)式$$

（11）式、（12）式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln(n^2+i^2)-4\ln n] \qquad (13)式$$

由于 $\ln(n^2+i^2)$ 可以变形为 $\ln[n^2(1+\frac{i^2}{n^2})]$，所以有

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln(n^2+i^2)-4\ln n]=\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln[n^2(1+\frac{i^2}{n^2})]-4\ln n\}\qquad\text{（14）式}$$

（13）式、（14）式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln[n^2(1+\frac{i^2}{n^2})]-4\ln n\}\qquad\text{（15）式}$$

因为 $\ln ab=\ln a+\ln b$，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln[n^2(1+\frac{i^2}{n^2})]-4\ln n\}=\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}[\ln n^2+\ln(1+\frac{i^2}{n^2})]-4\ln n\}\qquad\text{（16）式}$$

（15）式、（16）式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}[\ln n^2+\ln(1+\frac{i^2}{n^2})]-4\ln n\}\qquad\text{（17）式}$$

因为 $\ln a^b=b\ln a$，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}[\ln n^2+\ln(1+\frac{i^2}{n^2})]-4\ln n\}=\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}[2\ln n+\ln(1+\frac{i^2}{n^2})]-4\ln n\}\qquad\text{（18）式}$$

（17）式、（18）式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}[2\ln n+\ln(1+\frac{i^2}{n^2})]-4\ln n\}\qquad\text{（19）式}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}[2\ln n+\ln(1+\frac{i^2}{n^2})]-4\ln n\}=\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{2n}2\ln n+\sum_{i=1}^{2n}\ln(1+\frac{i^2}{n^2})]-4\ln n\}\qquad\text{（20）式}$$

（19）式、（20）式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{2n}2\ln n+\sum_{i=1}^{2n}\ln(1+\frac{i^2}{n^2})]-4\ln n\}\qquad\text{（21）式}$$

现在来计算一下 $\sum_{i=1}^{2n}2\ln n$ 。 $\sum_{i=1}^{2n}2\ln n=2\ln n\sum_{i=1}^{2n}1=2\ln n\times 2n=4n\ln n$，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{2n}2\ln n+\sum_{i=1}^{2n}\ln(1+\frac{i^2}{n^2})]-4\ln n\}=\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{n}[4n\ln n+\sum_{i=1}^{2n}\ln(1+\frac{i^2}{n^2})]-4\ln n\}\qquad\text{（22）式}$$

（21）式、（22）式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{n}[4n\ln n+\sum_{i=1}^{2n}\ln(1+\frac{i^2}{n^2})]-4\ln n\}\qquad\text{（23）式}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{n}[4n\ln n+\sum_{i=1}^{2n}\ln(1+\frac{i^2}{n^2})]-4\ln n\}=\lim_{n\to\infty}[4\ln n+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln(1+\frac{i^2}{n^2})-4\ln n]\qquad\text{（24）式}$$

（23）式、（24）式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}[4\ln n+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln(1+\frac{i^2}{n^2})-4\ln n]\qquad\text{（25）式}$$

化简 $\lim_{n\to\infty}[4\ln n+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln(1+\frac{i^2}{n^2})-4\ln n]$可得

$$\lim_{n\to\infty}[4\ln n+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln(1+\frac{i^2}{n^2})-4\ln n]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln(1+\frac{i^2}{n^2})\qquad\text{（26）式}$$

（25）式、（26）式相结合，得

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln(1+\frac{i^2}{n^2})\qquad\text{（27）式}$$

现在可以进行五个步骤了。

第一步：将 Σ 里面的那个函数抽象为 $f(\frac{a}{b})$，其中 $a=x_1i+x_2$，$b=x_3n+x_4$。

针对本题来说，Σ 里面的那个函数是 $\ln(1+\frac{i^2}{n^2})$，$\ln(1+\frac{i^2}{n^2})$ 很显然是 $\frac{i}{n}$ 的一个函数，所以应该把 $\ln(1+\frac{i^2}{n^2})$ 抽象为 $f(\frac{i}{n})$。

在本题中 $x_1=1,x_2=0,x_3=1,x_4=0$。经过这样抽象，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{2n}\ln(1+\frac{i^2}{n^2})$ 变为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{2n}f(\frac{i}{n})$。

第二步：关于 Σ 下方的那个 i，让 i 取三个值。第一个值是 Σ 下方写的 i 等于的那个数，第二个值是比 Σ 下方写的 i 等于的那个数大 1 的数，第三个值是 Σ 上方写的那个数。

针对本题来说，由于 Σ 下方写的是 $i=1$，Σ 上方写的是 $2n$。所以应该让 i 取 $i=1,i=2,i=2n$。

第三步：将刚才取的那三个 i 的值代入到 $\frac{a}{b}$ 中，然后算出三个 $\frac{a}{b}$。

针对本题来说，$\frac{a}{b}$ 是 $\frac{i}{n}$，所以我们将 $i=1,i=2,i=2n$ 代入到 $\frac{i}{n}$ 中，算出的三个值为 $\frac{1}{n},\frac{2}{n},2$。

第四步：用算出的第二个值减去算出的第一个值来确定前面应该乘以多少，然后看第一个值和第三个值分别离哪个常数最近来确定积分上下限。

针对本题来说，第二个值是 $\frac{2}{n}$，第一个值是 $\frac{1}{n}$，第二个值减去第一个值等于 $\frac{2}{n}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$，说明前面应该乘以 $\frac{1}{n}$。第一个值 $\frac{1}{n}$ 很显然离常数 0 最近，所以积分下限是 0。第三个值 2 很显然离常数 2 最近（它本身就是 2），所以积分上限是 2。

综上所述有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}f(\frac{i}{n})=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$$

第五步：计算出最终的结果。

针对本题来说，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{2n}f(\frac{i}{n})=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，由于 $f(\frac{i}{n})=\ln[1+(\frac{i}{n})^2]$，所以 $f(x)=\ln(1+x^2)$。所以

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\ln(1+x^2)\mathrm{d}x&=[x\times\ln(1+x^2)]\Big|_0^2-\int_0^2\frac{2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=[x\times\ln(1+x^2)]\Big|_0^2-\int_0^2\frac{2x^2+2-2}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=2\ln5-4+2\arctan2\end{aligned}$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=2\ln5-4+2\arctan2$。难道本题最后的答案就是 $2\ln5-4+2\arctan2$ 吗？当然不是。为何？因为算出的是 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n$，而本题的是求 $\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n}$。也就是说，本题的答案是 $\mathrm{e}^{2\ln5-4+2\arctan2}$。

方法 3. 夹逼定理法

注意：此方法 80%用于题中含“连加符号 Σ”的数列极限计算题，此方法 100%用于题中说 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ 并且告诉了 y_n 和 z_n 的通项公式的题。

也就是说，一旦某道让计算数列极限的题中出现了**“连加符号 Σ”**，那么大概有 80%的可能性会用到夹逼定理；一旦某道让计算数列极限的题中说了 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ 并且告诉了 y_n 和 z_n 的通项公式，那么一定会用到夹逼定理。

可能有人糊涂了：刚刚在讲方法 2（积分和式法）的时候曾说，积分和式法 100%用于题中含“连加符号 Σ”的数列极限计算题，那现在怎么又说这方法 3（夹逼定理法）80%用于题中含“连加符号 Σ”的数列极限计算题呢？

给大家解释一下：比如卷子上出了 100 道含“连加符号 Σ”的数列极限计算题，那么这 100 道题肯定都会用到积分和式法，无一例外。但是，在这 100 道题中，或许有 80 道题只用积分和式法是做不出来的，还要与夹逼定理法配合使用才可以做出来（当然，有的含“连加符号 Σ”的题只用积分和式法而不用夹逼定理法也能做出来，比如之前做的那几道题）。

既然方法 3 的名字叫“夹逼定理法”，那么必然得先知道什么是“夹逼定理”。

现在先给大家讲一下夹逼定理。

夹逼定理：

若存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

夹逼定理描述的是这样一件事：**有三个数列 x_n、y_n、z_n，这三个数列中的每个数列都是无穷项的，大家记住，只要能求极限的数列都是无穷项。如果从某一项开始，如从第 98 项开始（当然这“从某一项开始”也可能指的是从第一项开始），从这项以后的所有项都满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，即数列 y_n 的第 99 项 $y_{99}\leqslant$ 数列 x_n 的第 99 项 $x_{99}\leqslant$ 数列 z_n 的第 99 项 z_{99}，数列 y_n 的第 100 项 $y_{100}\leqslant$ 数列 x_n 的第 100 项 $x_{100}\leqslant$ 数列 z_n 的第 100 项 z_{100}……并且有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。**

若把夹逼定理的使用条件中的 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ 改为 $y_n < x_n \leqslant z_n$ 或 $y_n \leqslant x_n < z_n$ 或 $y_n < x_n < z_n$，其他使用条件不变，则夹逼定理的结论依然成立。

例. $a>0$ 为常数，现在有三个数列 x_n、y_n、z_n，已知从第一项开始就有 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，而 $y_n = a+\dfrac{n+1}{2n}$，$z_n = a+\dfrac{(n+3)n}{2n^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

解：首先看看本题是属于“函数的极限的计算题”还是“数列的极限的计算题”。由于 lim 下面写的是“$n\to$”所以本题属于“数列的极限的计算题”，要想做本题，就要知道数列极限计算的三种方法，即单调有界法、积分和式法、夹逼定理法。

那么究竟应不应该用方法 3（夹逼定理法）来做呢？

由于本题已经明显告诉了 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，并且告诉了 y_n 和 z_n 的通项公式，所以应该用方法 3（夹逼定理法）来做。

先计算 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$。

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(a+\frac{n+1}{2n})$$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a+\dfrac{n+1}{2n})$ 应该如何算呢？它是数列的极限，可是它既不符合用单调有界法的条件，也不符合用积分和式法的条件，还不符合用夹逼定理法的条件。大家记住，以后一旦遇到这种情况，就把数列极限转化为函数极限来做。因此，对于本题来说，有

$$\lim_{n\to\infty}(a+\frac{n+1}{2n}) = \lim_{x\to\infty}(a+\frac{x+1}{2x}) = \lim_{x\to\infty} a + \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x} = a+\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x} \overset{?}{=} a+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2} = a+\frac{1}{2}$$

由于 $a+\dfrac{1}{2}$ 是常数，属于“常数或 ∞”，所以把上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“$=$”，即

$$\lim_{n\to\infty}(a+\frac{n+1}{2n}) = a+\frac{1}{2}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a+\dfrac{1}{2}$。

再计算 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$。

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}[a+\frac{(n+3)n}{2n^2}]$$
$$= \lim_{x\to\infty}[a+\frac{(x+3)x}{2x^2}]$$
$$= \lim_{x\to\infty} a + \lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)x}{2x^2}$$
$$= a+\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x}{2x^2}$$
$$\overset{?}{=} a+\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{4x}$$
$$\overset{?}{=} a+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{4}$$
$$= a+\frac{1}{2}$$

综上所述，由于 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a+\dfrac{1}{2}$，所以根据夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a+\dfrac{1}{2}$。

例. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，$x_n = \sum\limits_{i=1}^{n}(\sqrt{1+\dfrac{i}{n^2}}-1)$。

解：首先看看本题是属于“函数的极限的计算题”还是“数列的极限的计算题”。由于 lim 下面写的是“$n\to$”，所以本题属于“数列的极限的计算题”，要想做本题，就要知道数列极限计算的三种方法，即单调有界法、积分和式法、夹逼定理法。

那么究竟应该用这三种方法中的哪一种方法来做呢？

很显然这道题含“连加符号 Σ”，那么本题要么只用积分和式法来做，要么就是夹逼定理法配合积分和式法来做。

先看看本题能不能只用积分和式法来做。

第一步：将 Σ 里面的那个函数抽象为 $f(\dfrac{a}{b})$**，其中** $a = x_1 i + x_2$，$b = x_3 n + x_4$。

针对本题来说，看看 Σ 里面的那个函数能被抽象为 $f(\frac{a}{b})$ 吗？有人说能，理由：本题 Σ 里面的那个函数是 $(\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1)$，那完全可以抽象成 $f(\frac{i}{n^2})=(\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1)$。

这是完全错误的，本题 Σ 里面的那个函数根本就不能被抽象为 $f(\frac{a}{b})$。为何？大家仔细看看上面的粗体字中对 a 和 b 的限制：$a=x_1i+x_2$，$b=x_3n+x_4$。b 中不能出现 n^2。所以本题 Σ 里面的那个函数 $(\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1)$ 不能被抽象成 $f(\frac{a}{b})$。这意味着本题不能只用积分和式法来做，所以本题的做法是**用"夹逼定理法配合积分和式法"来做。**

所谓"夹逼定理法配合积分和式法"指的是：大体上用夹逼定理来做，但是当计算两侧的极限时，至少有一侧会用到积分和式。

本题中 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1)$，为了使用夹逼定理，就要找满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ 的 y_n 和 z_n。怎么找？方法是：将 x_n 进行放大和缩小。

先找 z_n。

先将 x_n 变形：

$$x_n=\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1}{1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1)(\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}+1)}{\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\frac{i}{n^2}-1}{\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}+1}$$

$\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}+1$ 和 $\sqrt{1+0}+1$ 这两者谁大谁小？只需比较 $\frac{i}{n^2}$ 和 0 即可。显然 $\frac{i}{n^2}$ 比 0 大，因为 Σ 下方写的是 $i=1$，说明 i 最小取 1，也就是说 $\frac{i}{n^2}$ 最小是 $\frac{1}{n^2}$，而 $\frac{1}{n^2}$ 必然大于 0（因为 n 肯定大于 0）。也就是说，在 $\frac{i}{n^2}$ 最小的情况下 $\frac{i}{n^2}$ 都比 0 大，所以有 $\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}+1>\sqrt{1+0}+1=2$。而对于两个分数来说（分子、分母都是正数），当分子一样时，分母越小，分数值越大，所以有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}+1}<\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{2}$$

将 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{2}$ 变形为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n}$，所以有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}+1}<\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}$$

z_n 现在已经找到了。

再找 y_n。

$\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}+1$ 和 $\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1$ 这两者谁大谁小？只需比较 $\frac{i}{n^2}$ 和 $\frac{1}{n}$ 即可。显然 $\frac{i}{n^2}$ 小于等于 $\frac{1}{n}$，因为 $\frac{i}{n^2}=\frac{1}{n}\times\frac{i}{n}$，而 $\frac{i}{n}$ 肯定是小于等于 1 的（因为 Σ 正上方写的是 n，说明 i 最大才能取到 n），所以有 $\frac{i}{n_2}\leqslant\frac{1}{n}$。而对于两个分数来说（分子、分母都是正数），当分子一样时，分母越小，分数值越大，所以有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{i}{n}}+1}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}+1}$$

将 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$ 变形为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\times\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n}$，所以有

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}+1}$$

y_n 现在也找到了。

综上所述，有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$。

现在需要做的就是算出 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$，然后使用夹逼定理。

先计算 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n})$。

利用积分和式法来算。

第一步：将 Σ 里面的那个函数抽象为 $f(\frac{a}{b})$，其中 $a=x_1i+x_2$，$b=x_3n+x_4$。

针对本题来说，Σ 里面的那个函数是 $\frac{i}{n}$，$\frac{i}{n}$ 很显然是 $\frac{i}{n}$ 的一个函数，所以应该把 $\frac{i}{n}$ 抽象为 $f(\frac{i}{n})$。

在本题中 $x_1=1,x_2=0,x_3=1,x_4=0$。经过这样抽象，本题 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n})$ 变为 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})]$。

第二步：关于 Σ 下方的那个 i，让 i 取三个值。第一个值是 Σ 下方写的 i 等于的那个数，第二个值是比 Σ 下方写的 i 等于的那个数大 1 的数，第三个值是 Σ 上方写的那个数。

针对本题来说，由于 Σ 下方写的是 $i=1$，Σ 上方写的是 n，所以应该让 i 取 $i=1,i=2,i=n$。

第三步：将刚才取的那三个 i 的值代入到 $\frac{a}{b}$ 中，然后算出三个 $\frac{a}{b}$。

针对本题来说，$\frac{a}{b}$ 是 $\frac{i}{n}$，所以将 $i=1,i=2,i=n$ 代入到 $\frac{i}{n}$ 中，算出的三个值为 $\frac{1}{n},\frac{2}{n},1$。

第四步：用算出的第二个值减去算出的第一个值来确定前面应该乘以多少，然后看第一个值和第三个值分别离哪个常数最近来确定积分上下限。

针对本题来说，第二个值是 $\frac{2}{n}$，第一个值是 $\frac{1}{n}$，第二个值减去第一个值等于 $\frac{2}{n}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$，说明前面应该乘以 $\frac{1}{n}$。第一个值 $\frac{1}{n}$ 显然离常数 0 最近，所以积分下限是 0。第三个值 1 很显然离常数 1 最近（它本身就是 1），所以积分上限是 1。

综上所述有

$$\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

第五步：计算出最终的结果。

针对本题来说，$\frac{1}{n}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，由于 $f(\frac{i}{n})=\frac{i}{n}$，所以 $f(x)=x$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$。$\frac{1}{2}$ 是答案吗？当然不是，因为这里算出的是 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n})$，而最终的目的是要计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n})$。所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$。

现在计算 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\times\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n})$。

第一步：将 Σ 里面的那个函数抽象为 $f(\frac{a}{b})$，其中 $a=x_1i+x_2$，$b=x_3n+x_4$。

针对本题来说，Σ 里面的那个函数是 $\frac{i}{n}$，$\frac{i}{n}$ 很显然是 $\frac{i}{n}$ 的一个函数，所以应该把 $\frac{i}{n}$ 抽象为 $f(\frac{i}{n})$。

在本题中，$x_1=1,x_2=0,x_3=1,x_4=0$。经过这样抽象，本题 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\times\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n})$ 变为 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)}\times\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})]$。

第二步：关于 Σ 下方的那个 i，让 i 取三个值。第一个值是 Σ 下方写的 i 等于的那个数，第二个值是比 Σ 下方写的 i 等于的那个数大 1 的数，第三个值是 Σ 上方写的那个数。

针对本题来说，由于 Σ 下方写的是 $i=1$，Σ 上方写的是 n，所以应该让 i 取 $i=1,i=2,i=n$。

第三步：将刚才取的那三个 i 的值代入到 $\frac{a}{b}$ 中，然后算出三个 $\frac{a}{b}$。

针对本题来说，$\frac{a}{b}$ 是 $\frac{i}{n}$，所以将 $i=1,i=2,i=n$ 代入到 $\frac{i}{n}$ 中，算出的三个值为 $\frac{1}{n},\frac{2}{n},1$。

第四步：用算出的第二个值减去算出的第一个值来确定前面应该乘以多少，然后看第一个值和第三个值分别离哪个常数最近来确定积分上下限。

针对本题来说，第二个值是 $\frac{2}{n}$，第一个值是 $\frac{1}{n}$，第二个值减去第一个值等于 $\frac{2}{n}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$，说明前面应该乘以 $\frac{1}{n}$。第一个值 $\frac{1}{n}$ 显然离常数 0 最近，所以积分下限是 0。第三个值 1 显然离常数 1 最近（它本身就是 1），所以积分上限是 1。

综上所述有

$$\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

第五步：计算出最终的结果。

针对本题来说，$\frac{1}{n}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，由于 $f(\frac{i}{n})=\frac{i}{n}$，所以 $f(x)=x$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$。$\frac{1}{2}$ 是答案吗？当然不是，因为这里算出的是 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n})$，而最终的目的是计算 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\times\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})]$。那怎么办？大家还记得在函数的极限的计算方法中曾经讲过极限的可拆性吧？函数极限的可拆性同样可以应用到数列的极限中。

现在看看 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\times\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})]$ 能不能拆为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\times\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})$。必然能，因为只要不是一个 0、一个 ∞ 就能拆，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})=\frac{1}{2}$，所以说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$、$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})$ 这两者不可能一个是 0、一个是 ∞（因为已经有一个是 $\frac{1}{2}$ 了），所以 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\times\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})]$ 能拆为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\times\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})$，有

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$ 又该怎样计算呢？之前跟大家说过，像这样的数列极限，如果数列极限的三种方法的使用条件都不满足，就转换成函数的极限来计算，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

由于

$$\lim_{x\to+\infty}1=1,\quad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\lim_{x\to+\infty}1=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})}+\lim_{x\to+\infty}1=1+1=2$$

所以根据函数极限计算方法的方法 1（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 1，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)}=\frac{1}{2}$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1)}=\dfrac{1}{2}$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}\times\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\dfrac{i}{n})]=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

综上所述，由于 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\dfrac{1}{4}$，所以根据夹逼定理，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{4}$。

例. 请计算 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$， $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n\tan\dfrac{i}{n}}{n^2+i}$。

解：首先看看本题是属于“函数的极限的计算题”还是“数列的极限的计算题”。由于 lim 下面写的是“$n\to$”，所以本题属于“数列的极限的计算题”，要想做本题，就要想数列极限计算的三种方法，即单调有界法、积分和式法、夹逼定理法。

那么究竟应该用这三种方法中的哪一种方法来做呢？

很显然这道题含“连加符号 Σ”，因此本题要么只用积分和式法来做，要么就是夹逼定理法配合积分和式法来做。

先看看本题能不能只用积分和式法来做。

第一步：将 Σ 里面的那个函数抽象为 $f(\dfrac{a}{b})$，其中 $a=x_1i+x_2$， $b=x_3n+x_4$。

针对本题来说，Σ 里面的那个函数能被抽象为 $f(\dfrac{a}{b})$ 吗？显然不能。这意味本题不能只用积分和式法来做，也就意味着本题的做法是**用“夹逼定理法配合积分和式法”来做。**

本题中， $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n\tan\dfrac{i}{n}}{n^2+i}$，那么为了使用夹逼定理，就要找满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ 的 y_n 和 z_n。怎么找呢？方法就是将 x_n 进行放大和缩小。

先找 z_n。

n^2 和 n^2+i 这两者谁大谁小？显然 n^2 比 n^2+i 小，即 $n^2<n^2+i$。而对于两个分数来说（分子、分母都是正数），当分子一样时，分母越小，分数值越大，所以有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n\tan\frac{i}{n}}{n^2+i}<\sum_{i=1}^{n}\frac{n\tan\frac{i}{n}}{n^2}$$

将 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n\tan\dfrac{i}{n}}{n^2}$ 变形为， $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n\tan\dfrac{i}{n}}{n^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\tan\dfrac{i}{n}}{n}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\tan\dfrac{i}{n}$，所以有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n\tan\frac{i}{n}}{n^2+i}<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tan\frac{i}{n}$$

z_n 现在已经找到了。

再找 y_n。

n^2+n 和 n^2+i 这两者谁大谁小？显然 n^2+n 大于等于 n^2+i，因为 Σ 正上方写的是 n，说明 i 最大才能取到 n，所以有 $n^2+n\geqslant n^2+i$。对于两个分数来说（分子、分母都是正数），当分子一样时，分母越大，分数值越小，所以有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n\tan\frac{i}{n}}{n^2+n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{n\tan\frac{i}{n}}{n^2+i}$$

将 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n\tan\dfrac{i}{n}}{n^2+n}$ 变形为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n\tan\dfrac{i}{n}}{n^2+n}=\dfrac{n}{n^2+n}\sum\limits_{i=1}^{n}\tan\dfrac{i}{n}=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\tan\dfrac{i}{n}$，所以有

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\tan\frac{i}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{n\tan\frac{i}{n}}{n^2+i}$$

y_n 现在也找到了。

综上所述，有 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$。

现在需要做的就是计算出 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$，然后使用夹逼定理。

先计算 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\tan\frac{i}{n}$。

第一步：将 Σ 里面的那个函数抽象为 $f(\frac{a}{b})$，其中 $a=x_1 i+x_2$，$b=x_3 n+x_4$。

针对本题来说，Σ 里面的那个函数是 $\tan\frac{i}{n}$，$\tan\frac{i}{n}$ 很显然是 $\frac{i}{n}$ 的一个函数，所以应该把 $\tan\frac{i}{n}$ 抽象为 $f(\frac{i}{n})$。

在本题中 $x_1=1,x_2=0,x_3=1,x_4=0$。经过这样抽象，本题 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\tan\frac{i}{n}$ 变为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})$。

第二步：关于 Σ 下方的那个 i，让 i 取三个值。第一个值是 Σ 下方写的 i 等于的那个数，第二个值是比 Σ 下方写的 i 等于的那个数大 1 的数，第三个值是 Σ 上方写的那个数。

针对本题来说，由于 Σ 下方写的是 $i=1$，Σ 上方写的是 n。所以应该让 i 取 $i=1,i=2,i=n$。

第三步：将刚才取的那三个 i 的值代入到 $\frac{a}{b}$ 中，然后算出三个 $\frac{a}{b}$。

针对本题来说，$\frac{a}{b}$ 是 $\frac{i}{n}$，所以将 $i=1,i=2,i=n$ 代入到 $\frac{i}{n}$ 中，算出的三个值为 $\frac{1}{n},\frac{2}{n},1$。

第四步：用算出的第二个值减去算出的第一个值来确定前面应该乘以多少，然后看第一个值和第三个值分别离哪个常数最近来确定积分上下限。

针对本题来说，第二个值是 $\frac{2}{n}$，第一个值是 $\frac{1}{n}$，第二个值减去第一个值等于 $\frac{2}{n}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$，说明前面应该乘以 $\frac{1}{n}$。第一个值 $\frac{1}{n}$ 显然离常数 0 最近，所以积分下限是 0。第三个值 1 显然离常数 1 最近（它本身就是 1），所以积分上限是 1。

综上所述有

$$\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

第五步：计算出最终的结果。

针对本题来说，$\frac{1}{n}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，由于 $f(\frac{i}{n})=\tan\frac{i}{n}$。所以 $f(x)=\tan x$，$\int_0^1\tan x\mathrm{d}x=-\ln\left|\cos x\right|\Big|_0^1=-\ln\left|\cos 1\right|-(-\ln 1)=-\ln\left|\cos 1\right|=-\ln\cos 1$。现在已经算出了 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=-\ln\cos 1$。

现在再计算 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\tan\frac{i}{n}$。

在用积分和式之前，先将 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\tan\frac{i}{n}$ 变形：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\tan\frac{i}{n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tan\frac{i}{n})$$

第一步：将 Σ 里面的那个函数抽象为 $f(\frac{a}{b})$，其中 $a=x_1 i+x_2$，$b=x_3 n+x_4$。

针对本题来说，Σ 里面的那个函数是 $\tan\frac{i}{n}$，$\tan\frac{i}{n}$ 很显然是 $\frac{i}{n}$ 的一个函数，所以应该把 $\tan\frac{i}{n}$ 抽象为 $f(\frac{i}{n})$。

在本题中 $x_1=1,x_2=0,x_3=1,x_4=0$。经过这样抽象，本题 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\tan\frac{i}{n})$ 变为 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})]$。

第二步：关于 Σ 下方的那个 i，让 i 取三个值。第一个值是 Σ 下方写的 i 等于的那个数，第二个值是比 Σ 下方写的 i 等于的那个数大 1 的数，第三个值是 Σ 上方写的那个数。

针对本题来说，由于 Σ 下方写的是 $i=1$，Σ 上方写的是 n，所以应该让 i 取 $i=1,i=2,i=n$。

第三步：将刚才取的那三个 i 的值代入到 $\frac{a}{b}$ 中，然后算出三个 $\frac{a}{b}$。

针对本题来说，$\frac{a}{b}$ 是 $\frac{i}{n}$，所以将 $i=1,i=2,i=n$ 代入到 $\frac{i}{n}$ 中，算出的三个值为 $\frac{1}{n},\frac{2}{n},1$。

第四步：用算出的第二个值减去算出的第一个值来确定前面应该乘以多少，然后看第一个值和第三个值分别离哪个常数最近来确定积分上下限。

针对本题来说，第二个值是 $\frac{2}{n}$，第一个值是 $\frac{1}{n}$，第二个值减去第一个值等于 $\frac{2}{n}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$，说明前面应该乘以 $\frac{1}{n}$。第

一个值$\frac{1}{n}$显然离常数 0 最近，所以积分下限是 0。第三个值1 显然离常数 1 最近（它本身就是 1），所以积分上限是 1。

综上所述有

$$\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

第五步：计算出最终的结果。

针对本题来说，$\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，由于 $f\left(\frac{i}{n}\right)=\tan\frac{i}{n}$，所以 $f(x)=\tan x$，$\int_0^1\tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|\big|_0^1=-\ln|\cos 1|-(-\ln 1)=-\ln|\cos 1|=-\ln\cos 1$。而最终的目的是要计算 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tan\frac{i}{n}\right)$。那怎么办？在讲函数的极限的计算方法时曾经给大家讲过极限的可拆性，函数极限的可拆性同样可以应用到数列的极限中来。

现在看看 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tan\frac{i}{n}\right)$能不能拆为 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tan\frac{i}{n}$。必然能，因为只要不是一个 0、一个$\infty$就能拆，而 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tan\frac{i}{n}=-\ln\cos 1$，所以说明 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$、$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tan\frac{i}{n}$ 这两者不可能一个是 0、一个是∞（因为已经有一个是$-\ln\cos 1$了），所以 $\lim_{n\to\infty}$（$\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tan\frac{i}{n}$）能拆为 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tan\frac{i}{n}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tan\frac{i}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tan\frac{i}{n}=-\ln\cos 1\times\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$$

那么 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$ 又该怎样计算呢？之前跟大家说过，像这样的数列极限，数列极限的三种方法的使用条件都不满足，就转换成函数的极限来计算，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}\overset{?}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1}=\lim_{x\to\infty}1=1$$

由于 1 是常数，属于“常数或∞”，所以把上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“=”，有 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$。

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tan\frac{i}{n}\right)=-\ln\cos 1\times\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=-\ln\cos 1\times 1=-\ln\cos 1$$

现在已经算出了 $\lim_{n\to\infty}y_n=-\ln\cos 1$。

综上所述，由于 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 $\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}z_n=-\ln\cos 1$，所以根据夹逼定理，有 $\lim_{n\to\infty}x_n=-\ln\cos 1$。

1.3　三个小技巧

本节要给大家讲的是做函数的极限的计算题的三个小技巧，在讲之前，先跟大家说明一点，那就是：其实本节根本不是新的知识点。也就是说，本节所要给大家讲的知识点之前都给大家讲过，只不过因为这三个小技巧太常用了，所以再强调一遍。

1.3.1　第一个小技巧

第一个小技巧：在做函数的极限的计算题时，一上来先想极限的可拆性，将会大大降低计算量。

下面来看例题。

例. 请计算 $\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x+\tan 2x+4)(\sqrt{1+9x^2}-1)\mathrm{e}^x}{(1+\cos 4x)\sin(\sin x^2)}$。

解： 这道题第一眼看上去，貌似很复杂，其实特别简单，就是利用极限的可拆性。下面看看 $\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x+\tan 2x+4)(\sqrt{1+9x^2}-1)\mathrm{e}^x}{(1+\cos 4x)\sin(\sin x^2)}$ 能否拆为 $\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x+\tan 2x+4)\mathrm{e}^x}{1+\cos 4x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+9x^2}-1}{\sin(\sin x^2)}$。

由代入法可知 $\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x+\tan 2x+4)\mathrm{e}^x}{1+\cos 4x}\times\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 0+\tan 0+4)\mathrm{e}^0}{1+\cos 0}=\frac{4}{2}=2$，所以 $\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x+\tan 2x+4)(\sqrt{1+9x^2}-1)\mathrm{e}^x}{(1+\cos 4x)\sin(\sin x^2)}$ 能拆为 $\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x+\tan 2x+4)\mathrm{e}^x}{1+\cos 4x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+9x^2}-1}{\sin(\sin x^2)}$。所以有

$$\lim_{x\to0}\frac{(\sin x+\tan 2x+4)(\sqrt{1+9x^2}-1)\mathrm{e}^x}{(1+\cos 4x)\sin(\sin x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x+\tan 2x+4)\mathrm{e}^x}{1+\cos 4x}\times\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+9x^2}-1}{\sin(\sin x^2)}$$

$$=2\times\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+9x^2}-1}{\sin(\sin x^2)}$$

根据等价无穷小法，有

$$2\times\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+9x^2}-1}{\sin(\sin x^2)}=2\times\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+9x^2}-1}{\sin x^2}$$

$$=2\times\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+9x^2}-1}{x^2}$$

$$=2\times\lim_{x\to0}\frac{\frac{9}{2}x^2}{x^2}$$

$$=2\times\frac{9}{2}$$

$$=9$$

所以，$\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sin x+\tan 2x+4)(\sqrt{1+9x^2}-1)\mathrm{e}^x}{(1+\cos 4x)\sin(\sin x^2)}=9$

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x+1)}{[1+(\mathrm{e}^x+1)^2](1+\mathrm{e}^x)}$。

解： 看看 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x+1)}{[1+(\mathrm{e}^x+1)^2](1+\mathrm{e}^x)}$ 能否拆为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{(1+\mathrm{e}^x)}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x+1)}{[1+(\mathrm{e}^x+1)^2]}$。

通过计算可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\mathrm{e}^x)=+\infty$，所以对 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{(1+\mathrm{e}^x)}$ 使用第二类洛必达法则，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(1+\mathrm{e}^x)}\overset{?}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{(1+\mathrm{e}^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x}=0$$

由于 0 是常数，属于“常数或∞”，所以将上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“=”，所以有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(1+\mathrm{e}^x)}=0$$

此时要说两点：

第一，目前能不能拆还不一定，要看另一个算完是不是∞，如果不是就能拆。

第二，如果能拆，那么最后的答案肯定是 0。因为能拆说明另一个算完不是∞，那就是常数，而 0 乘以任何常数都为 0。

现在算一下 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x+1)}{[1+(\mathrm{e}^x+1)^2]}$。

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x+1)}{[1+(\mathrm{e}^x+1)^2]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-2x}+1+2\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}}$$

通过计算可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(2+\mathrm{e}^{-x})=2$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^{-2x}+1+2\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x})=1$，所以根据函数极限计算的方法 1（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 1 可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-2x}+1+2\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}}=\frac{2}{1}=2$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\mathrm{e}^x+(2\mathrm{e}^x+1)}{[1+(\mathrm{e}^x+1)^2](1+\mathrm{e}^x)}$ 可以拆为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{(1+\mathrm{e}^x)}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x+1)}{[1+(\mathrm{e}^x+1)^2]}$，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\mathrm{e}^x+(2\mathrm{e}^x+1)}{[1+(\mathrm{e}^x+1)^2](1+\mathrm{e}^x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(1+\mathrm{e}^x)}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x+1)}{[1+(\mathrm{e}^x+1)^2]}=0\times2=0$$

1.3.2 第二个小技巧

第二个小技巧：在做函数的极限的计算题时，如果做到某一步（或者一开始），发现题中多处出现 $\frac{1}{x}$ 或 $\frac{1}{x-1}$ 等，那么最好将 $\frac{1}{x}$ 或 $\frac{1}{x-1}$ 等换为 t，这将会大大降低计算量。

下面看例题。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}$。

解： 本题中由于有多处出现了 $\dfrac{1}{x-1}$，所以设 $\dfrac{1}{x-1}=t$。可能有很多同学会感到奇怪，本题明明只有一处出现了 $\dfrac{1}{x-1}$，怎么叫“多处”呢？

把这道题变一下形大家就能看明白了。

由于 $(x-1)^2=\dfrac{1}{\dfrac{1}{(x-1)^2}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x-1}\times\dfrac{1}{x-1}}$，所以

$$\lim_{x\to1}(x-1)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\dfrac{1}{x-1}\times\dfrac{1}{x-1}}\times\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}$$

现在大家明白为什么是“多处”了吧。根据刚刚讲的第二个小技巧，设 $\dfrac{1}{x-1}=t$，所以

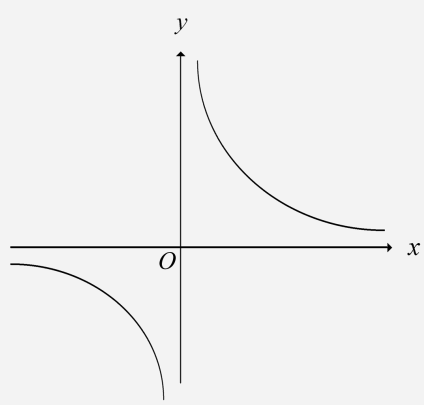
$$\lim_{x\to1}\frac{1}{\dfrac{1}{x-1}\times\dfrac{1}{x-1}}\times\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}$$

有些同学不明白为什么是“$t\to\infty$”，以后凡是遇见这种换元的题，第一步就是先反解出 x。

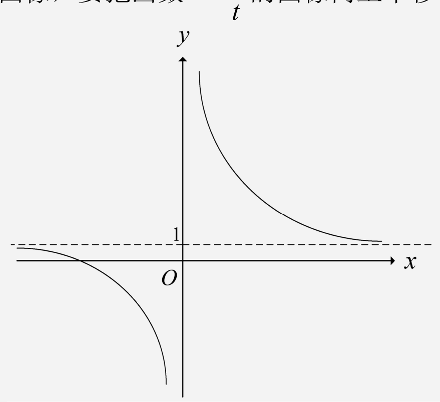
对于本题来说，由于设的是 $\dfrac{1}{x-1}=t$，所以反解完是 $x=\dfrac{1}{t}+1$。

第二步是在平面直角坐标系中画出函数 $x=\dfrac{1}{t}+1$ 的图像。

$x=\dfrac{1}{t}$ 的图像如下。



大家注意：以上的图是函数 $x=\dfrac{1}{t}$ 的图像，要把函数 $x=\dfrac{1}{t}$ 的图像向上平移一个单位才是 $x=\dfrac{1}{t}+1$ 的图像，即



由于题中是 $x\to1$，所以现在看 $x=\dfrac{1}{t}+1$ 的图像，看看当 t 怎样时 $x\to1$。从图像中可以明显看出，当 $t\to+\infty$ 或 $t\to-\infty$ 时（这两个综合起来就是 $t\to\infty$ 时），$x\to1$。

所以将“$x\to1$”改为“$t\to\infty$”，即

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{1}{x-1}\times\frac{1}{x-1}}\times e^{\frac{1}{x+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{t^2}$$

也就是说，只要将 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{e^t}{t^2}$ 算出来就可以了。

为了算出 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{e^t}{t^2}$，现在不得不分类，分别算 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^2}$ 、 $\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{e^t}{t^2}$ 。因为计算 $\lim\limits_{t\to\infty}e^t$ 时，用画图法，发现 $\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=+\infty$ 、 $\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$ ，必须分类。

先计算 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^2}$ 。

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^2}\overset{?}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{2t}\overset{?}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{2}=+\infty$$

注意：上式中两次出现了“$\overset{?}{=}$”，这是因为用到了两次洛必达法则。由于最终的答案是 $+\infty$，属于“常数或 ∞”，所以把上式中两处的“$\overset{?}{=}$”改为“=”，即

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^2}=\infty$$

再计算 $\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{e^t}{t^2}$ 。

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{e^t}{t^2}=\lim_{t\to-\infty}(\frac{1}{t^2}\times e^t)$$

通过计算可知 $\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{1}{t^2}=0$ 、 $\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$ ，根据函数极限计算的方法 1（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 1 可知

$$\lim_{t\to-\infty}(\frac{1}{t^2}\times e^t)=0$$

所以 $\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{e^t}{t^2}=0$ 。

到目前为止，已经算出了 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^2}=+\infty$ 、 $\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{e^t}{t^2}=0$ ，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不存在 但不是 ∞，所以本题 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2\times e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在但不是 ∞ 。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}})^x$ 。

解：先将本题变一下形，即

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}})^x=\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{\frac{1}{x}}}$$

由于本题中有多处出现了 $\frac{1}{x}$ ，所以利用第二个小技巧，设 $t=\frac{1}{x}$ ，则有

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}})^x=\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to0}(t+2^t)^{\frac{1}{t}}$$

计算 $\lim\limits_{t\to0}(t+2^t)$ 。

先看看 $\lim\limits_{t\to0}(t+2^t)$ 能不能拆为 $\lim\limits_{t\to0}t+\lim\limits_{t\to0}2^t$ 。由代入法可知， $\lim\limits_{t\to0}t=0$ ，所以说明 $\lim\limits_{x\to0}t$ 、 $\lim\limits_{x\to0}2^t$ 这两者不可能都是 ∞， $\lim\limits_{t\to0}(t+2^t)$ 能拆为 $\lim\limits_{t\to0}t+\lim\limits_{t\to0}2^t$ ，即

$$\lim_{t\to0}(t+2^t)=\lim_{t\to0}t+\lim_{t\to0}2^t$$

由于 $\lim\limits_{t\to0}t=0$ ，所以有

$$\lim_{t\to0}(t+2^t)=\lim_{t\to0}2^t$$

由代入法可知， $\lim\limits_{t\to0}2^t=2^0=1$ ，所以

$$\lim_{t\to0}(t+2^t)=1$$

计算 $\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}$。

由画图法可知 $\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}=\infty$。

综上所述，由于 $\lim\limits_{t\to0}(t+2^t)=1$、$\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}=\infty$，所以 $\lim\limits_{t\to0}(t+2^t)^{\frac{1}{t}}$ 属于“1^∞ 型”的函数极限计算题。因此，只要按照函数极限的计算方法中的方法 4（固定套路法）来求解本题就可以了，即

$$\lim_{t\to0}(t+2^t)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0}\mathrm{e}^{\ln(t+2^t)^{\frac{1}{t}}}=\lim_{t\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}\ln(t+2^t)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}\ln(t+2^t)}$$

只需算出 $\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}\ln(t+2^t)$ 就可以了。

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\ln(t+2^t)&=\lim_{t\to0}\frac{\ln(t+2^t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t+2^t-1)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t+2^t-1}{t}\\&=\lim_{t\to0}(\frac{t}{t}+\frac{2^t-1}{t})=\lim_{t\to0}(1+\frac{2^t-1}{t})=\lim_{t\to0}1+\lim_{t\to0}\frac{2^t-1}{t}\\&=1+\lim_{t\to0}\frac{2^t-1}{t}=1+\lim_{t\to0}\frac{t\ln2}{t}=1+\lim_{t\to0}\ln2=1+\ln2\end{aligned}$$

所以本题的答案为 $\mathrm{e}^{1+\ln2}$。当然，这个答案还可以再化简，即 $\mathrm{e}^{1+\ln2}=\mathrm{e}^1\times\mathrm{e}^{\ln2}=\mathrm{e}\times\mathrm{e}^{\ln2}=\mathrm{e}\times2=2\mathrm{e}$。

1.3.3 第三个小技巧

第三个小技巧：在做函数的极限的计算题时，如果遇到分数，并且分母中还含根号，那么应该将分母有理化，这会大大降低计算量。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$。

解：本题让计算的是一个分数的极限，并且分母还含有根号，所以根据第三个小技巧，应该进行“分母有理化”。本题的分母是 $\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}$，要想将这个分母有理化，需要做的就是“分子、分母同时乘以 $\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}$”，即

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{(\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x})(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}\qquad（1）式$$

化简 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{(\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x})(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}$ 可得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{(\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x})(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}=\frac{\sin^2x(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}\qquad（2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}\qquad（3）式$$

根据等价无穷小法得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}\qquad（4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}\qquad（5）式$$

现在看看 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}$ 能不能拆为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}\times\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})$。由代入法可知

$$\lim_{x\to0}(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})=\sqrt{1+0\times\sin0}+\sqrt{\cos0}=1+1=2$$

说明 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}$、$\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})$ 这两者不可能都是 ∞（因为已经有一个是 2 了），所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}$ 能拆为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}\times\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})$，即

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}\times\lim_{x\to0}(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})$$

因为 $\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})=2$，所以有

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}=2\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}\qquad（6）式$$

（5）式、（6）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=2\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}\qquad（7）式$$

对 $2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}$ 使用第一类洛必达法则，得

$$\begin{aligned}2\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}&\overset{?}{=}2\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin x+x\cos x+\sin x}\\&\overset{?}{=}2\lim_{x\to0}\frac{2}{\cos x+\cos x-x\sin x+\cos x}\\&=2\lim_{x\to0}\frac{2}{\cos0+\cos0-0\times\sin0+\cos0}\\&=2\lim_{x\to0}\frac{2}{1+1-0+1}\\&=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

注意，上式中出现了两次“$\overset{?}{=}$”，是因为使用了两次洛必达法则。由于最终算出的答案是 $\frac{4}{3}$，$\frac{4}{3}$ 是常数，属于“常数或∞”，所以把上式中的两处“$\overset{?}{=}$”都改为“=”，即

$$2\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}=\frac{4}{3}\qquad（8）式$$

（7）式、（8）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\frac{4}{3}\qquad（9）式$$

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\arctan x}}$。

解： 有的同学认为，根据第三个小技巧，本题的做法应该是分子、分母同时乘以 $\sqrt{x^2-\arctan x}$。但是，这种做法最后是很难做出来的，即这道题的正确做法不应该是分子、分母同时乘以 $\sqrt{x^2-\arctan x}$。这是为何呢？

因为这道题**属于“$\dfrac{\text{同号无穷相减}}{\infty}$ 且分子和分母中都含有根号的题”，**这种题的解题方法在讲函数极限计算中的方法 4（固定套路法）时，已经给大家讲过了。方法 4 是“大方法”，而现在讲的第三个小技巧是“小技巧”，“小技巧”必须要服从“大方法”。接下来这道题应该怎么做就不细说了，因为前面出现过这道题。

1.4　极限的定义

通过之前的讲解，大家现在应该对极限的计算方法很清楚了。现在回归到一个最原始的问题上来：极限的定义究竟是什么？

举个例子，计算 $\lim\limits_{x\to2}2x$，大家都知道使用代入法来算，算出的结果是 $\lim\limits_{x\to2}2x=2\times2=4$，那么 $\lim\limits_{x\to2}2x=4$ 究竟意味着什么？

再比如计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$，大家都知道使用画图法来算，算出的结果是 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，那么 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 究竟意味着什么？

要解决以上两个问题，需要了解极限的定义。

在讲之前，先强调一下，有不少同学只关注极限的计算方法，而不关注极限的定义，这直接导致考研数学中很多题做不出来，因为在考研数学中无论是选择题还是大题都会考到极限的定义，所以大家对于“极限的定义”这个知识点必须要足够重视。

1.4.1　数列的极限的定义

所谓数列，其实指的就是一堆数形成的一个序列而已。数列分为**有穷数列**和**无穷数列**。如果某个数列中只有有限项，那么称这个数列为有穷数列；如果某个数列中有无穷多项，那么称这个数列为无穷数列。

例. “1，3，5，7”是数列，而且是有穷数列，因为这个数列中只有 4 个数；“1，3，5，7，…”是数列，而且是无穷数列，因为这个数列中有无穷多个数。

接下来要深入讨论无穷数列，先给大家讲两个知识点。

第一个知识点：无穷数列一般用符号$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{x_n\}$、$\{y_n\}$等来表示。

例. 若记无穷数列“1，3，5，7，…”为$\{a_n\}$，则这个数列的第一项 1 用a_1来表示（即$a_1=1$），这个数列的第二项用a_2来表示（即$a_2=3$）……

当然，数列的下标也可以从 0 开始，这完全根据每个人不同的喜好。例如，本例中的这个数列的第一项 1 也可以用a_0来表示（即$a_0=1$），这个数列的第二项用a_1来表示（即$a_1=3$）……

第二个知识点：无穷数列可以细分为有通项公式的无穷数列和没有通项公式的无穷数列。

什么叫通项公式？通项公式其实就是一个等式$x_n=f(n)$，可以通过这个等式推导出这个无穷数列的任意一项。

例. 若数列$\{x_n\}$是一个有通项公式的无穷数列，它的通项公式是$x_n=2n+3$，求数列$\{x_n\}$的第 1000 项是多少。

解： 由数列$\{x_n\}$的通项公式$x_n=2n+3$可知，数列$\{x_n\}$的第 1000 项是

$x_{1000}=2\times1000+3=2003$

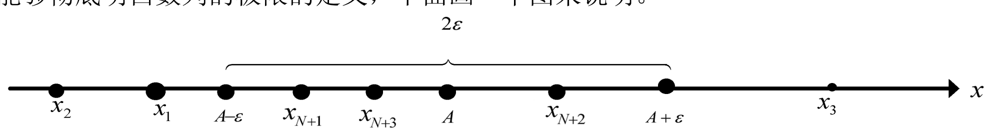
数列的极限的定义如下。

对于有穷数列而言，根本不存在“极限”这个概念。

对于无穷数列$\{x_n\}$而言（无论这个无穷数列是有通项公式的无穷数列还是没有通项公式的无穷数列），“$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$常数$A$”的意思都是：对于任意一个正数$\varepsilon$，不管正数$\varepsilon$有多么小，总会存在一个正整数$N$，使得当$n>N$时，所有的$x_n$都在区间$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$内。

以上就是数列的极限的定义。细心的同学应该能发现，这里并没有正着讲“若怎样，则称常数A是数列x_n的极限”，而是反着说“数列的极限是常数A意味着什么”。

为了让大家能够彻底明白数列的极限的定义，下面画一个图来说明。



例. 请计算数列$\{x_n\}$的极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n, x_n=\dfrac{1}{2n}+4$，此计算结果说明什么，并回答数列$\{x_n\}$是否有界。

解： 首先要明确三件事情。

第一件要明确的事情是：数列$\{x_n\}$是一个无穷数列，因为只要一个数列让求极限了，那必然是无穷数列。有穷数列不存在“极限”的概念。

第二件要明确的事情是：数列$\{x_n\}$是一个有通项公式的无穷数列，因为题中给出了数列$\{x_n\}$的通项公式$x_n=\dfrac{1}{2n}+4$。

第三件要明确的事情是：此题中的“$n\to\infty$”实际上指的是“$n\to+\infty$”，因为数列的极限中n只能趋于$+\infty$。

明确这三件事情后，开始正式做这道题。这道题一共有三问，第一问让计算，第二问是计算结果说明什么，第三问是该数列是否有界。

现在做第一问，也就是计算出这个数列的极限。

$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{2n}+4)$应该怎样去算呢？是用单调有界法、积分和式法、夹逼定理法之一吗？不是。因为这三种方法都有明确的使用条件。而本题不满足这三种方法的使用条件，所以不能用这三种方法计算。

当不能用这三种方法计算时，就把数列的极限转化为函数的极限来计算，所以

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2n}+4)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{2x}+4)\qquad（1）式$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{2x}+4)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}+\lim\limits_{x\to+\infty}4$ （2）式

（1）式、（2）式相结合，得

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2n}+4)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}+\lim\limits_{x\to+\infty}4$ （3）式

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}4=4$，得

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2n}+4)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}+4$ （4）式

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$；而常数的极限永远等于它本身，所以有 $\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$。

根据函数极限计算的方法1（基本计算方法）中的9个小技巧中的小技巧5，有

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$ （5）式

将（5）式代入（4）式可得

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2n}+4)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}+4=0+4=4$ （6）式

现在做第二问，即看看这个计算结果说明了什么。

第二问牵扯到了数列的极限的定义。由数列的极限的定义可知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=4$ 说明：任意找一个正数，无论多么小，如 0.001，那么数列 $\{x_n\}$ 总会从某一项之后的所有项都在区间 $(3.999,4.001)$ 内。比如“某一项”有可能指的是第1000项，则 x_{1001}，x_{1002}，x_{1003}，…这些项都在区间 $(3.999,4.001)$ 内。

需要注意的是，“某一项”到底指的是哪一项，这取决于选的那个正数 ε 到底是多少。如刚才选的 ε 是 0.001，那么可能“某一项”指的是第1000项。但如果选的 ε 不是 0.001 而是 0.00001，那么“某一项”可能指的就是第1500项。

不管 ε 取多少，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=4$，因此这个数列总会从某一项之后的所有项都在区间 $(4-\varepsilon,4+\varepsilon)$ 内。

现在做第三问，即数列 $\{x_n\}$ 是否有界。

“数列有界”分“数列有上界”和“数列有下界”两个层次来讲。

所谓“数列有上界”，指的是：如果能找出一个数 M，使一个数列中的所有项都小于等于 M，则称该数列有上界 M。

而且如果某数列有上界，那么该数列肯定有无数个上界，而不可能只有一个上界。例如，对于某个数列而言，1是它的上界，那么所有大于1的数必然都是该数列的上界。

大家还要注意一点，若某数列的上界是1，那么1这个数在该数列中一定能取到吗？当然不是，可以取不到，只要该数列中的所有数都小于等于1，那么1就是上界，而不管这个数列中有没有1这个数。这也是“上界”和“最大值”的区别，如果一个数列的最大值是1，那么1这个数在数列中肯定能取到，而“上界”并非如此。

所谓“数列有下界”，指的是：如果能找出一个数 m，使一个数列中的所有项都大于等于 m，则称该数列有下界 m。

而且如果某数列有下界，那么该数列肯定有无数个下界，而不可能只有一个下界。例如，对于某个数列而言，1是它的下界，那么所有小于1的数必然都是该数列的下界。

大家还要注意一点，若某数列的下界是1，那么1这个数在该数列中一定能取到吗？当然不是，可以取不到，只要该数列中的所有数都大于等于1，那么1就是下界，而不管这个数列中有没有1这个数。这也是“下界”和“最小值”的区别，如果一个数列的最小值是1，那么1这个数在数列中肯定能取到，而“下界”并非如此。

如果一个数列既有上界又有下界，则称这个数列有界。

由于本题所给的数列的极限是4，根据数列的极限的定义，这说明：对于任意一个正数 ε，无论选的这个正数 ε 是多少，总存在一个正整数 N，使当 $n>N$ 时，所有的 x_n 都在区间 $(4-\varepsilon,4+\varepsilon)$ 内。这也就意味着 x_{N+1}，x_{N+2}，x_{N+3}，…这无穷多个数是有界的，上界是 $4+\varepsilon$，下界是 $4-\varepsilon$。那么对于数列 $\{x_n\}$ 而言，它除了 x_{N+1}，x_{N+2}，x_{N+3}，…这无穷多个数之外，还有多少个数？还有 N 个数，即 x_1，x_2，…，x_N。x_1，x_2，…，x_N 这 N 个数有界吗？必然有界，因为这是有限个数，有限个数一定有界。

综上所述，x_1，x_2，…，x_N 这 N 个数是有界的，x_{N+1}，x_{N+2}，x_{N+3}，…这无穷多个数也是有界的，所以数列 $\{x_n\}$ 有界。大家以后就不要推导了，应该直接把这个结论背下来：**若某数列的极限存在，则该数列有界。**

1.4.2　趋于无穷大时函数的极限的定义

本节讲的是“趋于无穷大时函数的极限的定义”，下一节要讲的是“趋于定点时函数的极限的定义”。

有的同学或许会奇怪，函数的极限的定义为什么要分两节来讲，而数列的极限只讲一节。这是因为在数列的极限的计算题中n只能趋于$+\infty$，所以不用再细分了。而在函数的极限的计算题中x既能趋于∞，又能趋于定点，所以要细分。

趋于无穷大时函数的极限的定义如下。

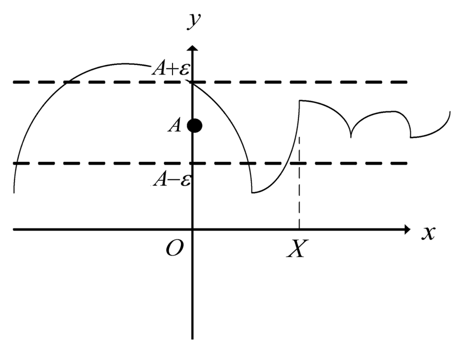
对于函数$y=f(x)$而言，“$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=$常数$A$”的意思是：对于任意一个正数$\varepsilon$，不管正数$\varepsilon$多么小，总会存在一个正数$X$，使当$x>X$时，所有的函数值$f(x)$都在区间$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$内。

对于函数$y=f(x)$而言，“$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=$常数$A$”的意思是：对于任意一个正数$\varepsilon$，不管正数$\varepsilon$多么小，总会存在一个正数$X$，使当$x<-X$时，所有的函数值$f(x)$都在区间$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$内。

对于函数$y=f(x)$而言，“$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=$常数$A$”的意思是：对于任意一个正数$\varepsilon$，不管正数$\varepsilon$多么小，总会存在一个正数$X$，使当$|x|>X$时，所有的函数值$f(x)$都在区间$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$内。

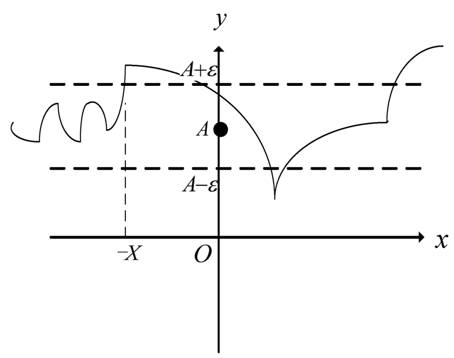
为了让大家能够彻底明白趋于无穷大时函数的极限的定义，通过画图来详细解释一下。

“$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=$常数$A$”的图像：



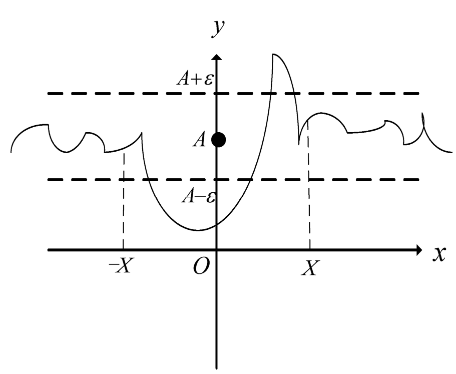
从以上图像中可以明显看出，当$x>X$时，所有的函数值$f(x)$都在区间$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$内。

“$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=$常数$A$”的图像：



从以上图像中可以明显看出，当$x<-X$时，所有的函数值$f(x)$都在区间$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$内。

“$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=$常数$A$”的图像：



从以上图像中可以明显看出，当$|x|>X$时，所有的函数值$f(x)$都在区间$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$内。

例. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x},x\neq 0$，请计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，此计算结果说明什么，并回答函数 $f(x)$ 是否有界。

解： 这道题一共有三问，第一问让计算，第二问是计算结果说明什么，第三问是该函数是否有界。

现在做第一问，即计算出这个函数的极限。

由画图法直接可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$。

现在做第二问，即这个计算结果说明了什么。

第二问牵扯到趋于无穷大时函数的极限的定义。由趋于无穷大时函数的极限的定义可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 说明：任意找一个正数 ε，无论多么小，如 0.001。那么总存在一个正数 X，使当 $x>X$ 时，所有的函数值 $f(x)$ 都在区间 $(-0.001,0.001)$ 内。

需要注意的是，X 到底指的是哪个正数，这取决于选的那个正数 ε 到底是多少。如刚才选的 ε 是 0.001，则 X 可以是 1000，即当 $x>1000$ 时，所有的函数值 $f(x)$ 都在区间 $(-0.001,0.001)$ 内。

但如果选的 ε 是 0.00001，则 X 就不是 1000，而是 100000 了，即当 $x>100000$ 时，所有的函数值 $f(x)$ 都在区间 $(-0.00001,0.00001)$ 内。

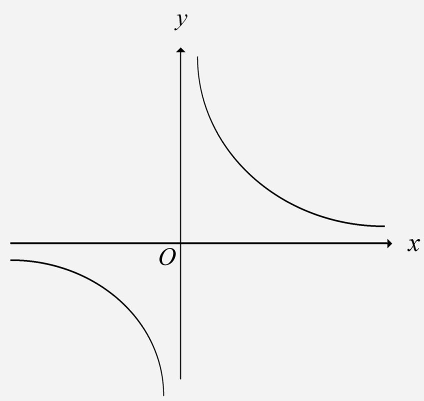
但不管 ε 取多少，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，则总存在一个正数 X，使当 $x>X$ 时，对于函数 $f(x)$ 而言，所有的函数值 $f(x)$ 都在区间 $(0-\varepsilon,0+\varepsilon)$ 内。

现在做第三问，即函数 $f(x)$ 是否有界。

由于本题所给的这个函数，在自变量趋于正无穷大时的极限是 0，根据趋于无穷大时函数的极限的定义，这说明：对于任意一个正数 ε，无论 ε 是多少，总存在一个正数 X，使当 $x>X$ 时，对于函数 $f(x)$ 而言，所有的函数值 $f(x)$ 都在区间 $(0-\varepsilon,0+\varepsilon)$ 内。

这也就意味着，当 $x>X$ 时，函数 $f(x)$ 是有界的，上界是 ε，下界是 $-\varepsilon$。但是这道题问的是“**函数 $f(x)$ 是否有界**”，即“函数 $f(x)$ 在整个定义域内是否有界”。

画出函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的图像。



从图中可以明显看出来，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是无界的，而且是既没有上界也没有下界。因为不能找出一个数，使定义域内所有的函数值都小于等于该数或都大于等于该数，所以这个函数既没有上界也没有下界。也就是说，该函数无界。

那么，如果一个函数只有上界而没有下界，或者只有下界而没有上界，叫有界吗？当然也不叫。只有上、下界均存在时，才叫有界。

大家一定要注意，“此函数无界”指的是“此函数在整个定义域内无界”。如果本题的问题是：存不存在一个正数 X，使当 $x>X$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 有界？那答案就是存在。

这也是数列极限存在与函数极限存在的区别，具体就是：如果一个数列的极限存在，那么该数列必有界。如果一个函数在自变量趋于无穷大时的极限存在，则只能说明局部有界而已。

以上这道例题是针对“$\lim\limits_{x\to+\infty}$”而出的，针对“$\lim\limits_{x\to-\infty}$”和“$\lim\limits_{x\to\infty}$”也是类似的道理，就不再给出例题了。

1.4.3 趋于定点时函数的极限的定义

趋于定点时函数的极限的定义如下。

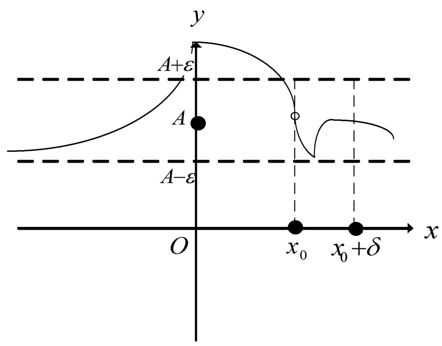
对于函数 $y=f(x)$ 而言，“$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=$常数$A$”的意思是：函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有没有定义都无所谓，对于任意一个正数 ε，不管正数 ε 有多么小，总会存在一个正数 δ，使得当自变量 x 在区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 内取值时，函数值 $f(x)$ 都在区间 $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$ 内。

对于函数 $y=f(x)$ 而言，“$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=$常数$A$”的意思是：函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有没有定义都无所谓，对于任意一个正数 ε，不管对于的正数 ε 有多么小，总会存在一个正数 δ，使得当自变量 x 在区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 内取值时，函数值 $f(x)$ 都在区间 $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$ 内。

对于函数 $y=f(x)$ 而言，“$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=$常数$A$”的意思是：函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有没有定义都无所谓，对于任意一个正数 ε，不管对于的正数 ε 有多么小，总会存在一个正数 δ，使得当自变量 x 在区间 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 内取值时，函数值 $f(x)$ 都在区间 $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$ 内。

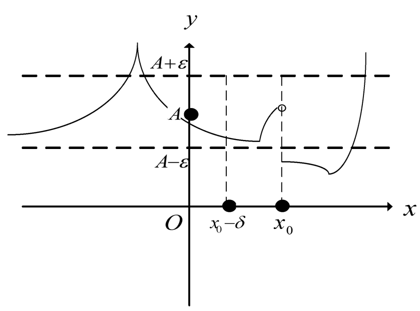
为了让大家能够彻底地明白趋于定点时函数的极限的定义，通过画图来详细解释一下。

“$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=$常数$A$”的图像：



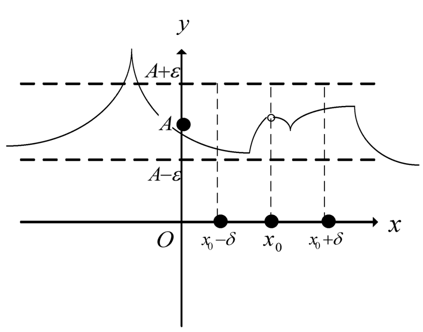
从以上图像中可以明显看出，当自变量 x 在区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 内取值时，函数值 $f(x)$ 都在区间 $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$ 内。

“$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=$常数$A$”的图像：



从以上图像中可以明显看出，当自变量 x 在区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 内取值时，函数值 $f(x)$ 都在区间 $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$ 内。

“$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=$常数$A$”的图像：



从以上图像中可以明显看出，当自变量 x 在区间 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 内取值时，函数值 $f(x)$ 都在区间 $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$ 内。

大家一定要注意一点：如果函数在某一点根本没有定义，那么该函数在该点的极限也完全可以存在。也就是说，函数在某一点是否有定义与该函数在该点的极限是否存在完全没关系。

例. 已知函数 $f(x)=2x+3$，请计算 $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$，此计算结果说明什么，并回答函数 $f(x)$ 是否有界。

解：现在做第一问，即计算出这个函数的极限。

由代入法直接可得 $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=\lim\limits_{x\to 4}(2x+3)=2\times 4+3=11$。

现在做第二问，即这个计算结果说明什么。

由趋于定点时函数的极限的定义可知，$\lim\limits_{x\to 4}f(x)=11$ 说明：任意找一个正数 ε，无论多么小，如 0.001，那么总会存在一个正数 δ，使得当自变量 x 在区间 $(4-\delta)\cup(4+\delta)$ 内取值时，函数值 $f(x)$ 都在区间 $(10.999,11.001)$ 内。

需要注意的是，δ 到底指的是哪个正数，取决于选的那个正数 ε 到底是多少。

但不管 ε 取多少，由于 $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=11$，则意味着总会存在一个正数 δ，使得当自变量 x 在区间 $(4-\delta)\cup(4+\delta)$ 内取值时，函数值 $f(x)$ 都在区间 $(11-\varepsilon,11+\varepsilon)$ 内。

现在做第三问，即函数 $f(x)$ 是否有界。

由于本题所给的这个函数在自变量趋于 4 时的极限是 11，根据趋于定点时函数的极限的定义，这说明：任意一个正数 ε，无论选的这个正数 ε 是多少，总存在一个正数 δ，使得当自变量 x 在区间 $(4-\delta)\cup(4+\delta)$ 内取值时，函数值 $f(x)$ 都在区间 $(11-\varepsilon,11+\varepsilon)$ 内。

这也就意味着，在区间 $(4-\delta)\cup(4+\delta)$ 内，函数 $f(x)$ 是有界的，上界是 $11+\varepsilon$，下界是 $11-\varepsilon$。但是这道题问的是“**函数 $f(x)$ 是否有界**”，也就是说问的是“函数 $f(x)$ 在整个定义域内是否有界”。

函数 $f(x)=2x+3$ 的图像明显是一条直线，因此它在定义域内必然无界。

大家一定要注意，“此函数无界”指的是“此函数在整个定义域内无界”。如果本题的问题是：存不存在一个正数 δ，使得函数 $f(x)=2x+3$ 在区间 $(4-\delta)\cup(4+\delta)$ 内有界？答案是存在。

1.5 函数的连续性与间断点

本节讲的是函数的连续性与间断点，这是本章乃至整个高等数学中最重要的知识点之一，请大家务必重视。

1.5.1 函数的连续性

“函数的连续性”可细分为三个小知识点：函数在一点处连续、函数在一点处左/右连续、函数在某区间内连续。

1．函数在一点处连续

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续（口诀：若极限值=函数值，则连续）。

定义虽然只有一句话，但实际上指的是以下三条同时满足。

第一条：函数 $f(x)$ 必须要在点 x_0 有定义才行，否则连 $f(x_0)$ 都不存在，何谈 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

例如，函数 $f(x)=\ln x$，这个函数在 $x=0$ 处没有定义，那么它不可能在 $x=0$ 处连续。

第一条：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 必须存在，也就是说，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=$一个常数，否则连 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 都不存在，何谈 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，由画图法可知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，也就是说 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，那么函数 $f(x)$ 不可能在 $x=0$ 处连续。

顺便复习一下以前讲过的两个结论。

第一个结论：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。注，其中 A 为任意常数或 ∞。

第二个结论：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在但不是 ∞。

以前讲过的这两个结论大家千万不要忘记。

第三条：在 $f(x_0)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 这两者都存在的前提下，还需要满足 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

例. 函数 $f(x)=6x+9$，请问该函数在 $x=4$ 处连续吗？

解：利用定义来做就可以了。

首先计算函数值 $f(4)$。

由于函数 $f(x)=6x+9$，所以 $f(4)=6\times 4+9=24+9=33$。

然后计算极限 $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$。

由代入法可知，$\lim\limits_{x\to4}f(x)=\lim\limits_{x\to4}(6x+9)=6\times4+9=24+9=33$。

综上所述，由于 $\lim\limits_{x\to4}f(x)=f(4)$，所以该函数在 $x=4$ 处连续。

例. 函数 $f(x)=\sin x$，请问该函数在 $x=2$ 处连续吗？

解： 利用定义来做就可以了。

首先计算函数值 $f(2)$。

由于函数 $f(x)=\sin x$，所以 $f(2)=\sin 2$。

然后计算极限 $\lim\limits_{x\to2}f(x)$。

由代入法可知，$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\sin x=\sin 2$。

综上所述，由于 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$，所以该函数在 $x=2$ 处连续。

例. 函数 $f(x)=\ln x$，请问该函数在 $x=0$ 处连续吗？

解： 函数 $f(x)=\ln x$ 的定义域是 $x>0$，也就是说，函数 $f(x)=\ln x$ 在 $x=0$ 处的函数值不存在，因此函数值不可能等于极限值，所以函数 $f(x)=\ln x$ 在 $x=0$ 处不连续。

例. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0\\ 28, & x=0\\ \cos x, & x<0\end{cases}$，请问该函数在 $x=0$ 处连续吗？

解： 利用定义来做就可以了。

首先计算函数值 $f(0)$。

由于函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0\\ 28, & x=0\\ \cos x, & x<0\end{cases}$，所以 $f(0)=28$。

然后计算极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$。

要想算 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$，必须先将 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化。可是 $f(x)$ 是一个分段函数，有三段，那么到底应该将 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化成这三段中的哪一段呢？本题说的是“$x\to0$”，即“x 趋于 0”，意思是 x 无限接近 0 但却永远不到达 0。因此，绝对不能将 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化成 28。如果 x 是从左侧趋于 0（如 x 取 $-0.1,-0.01,-0.001$ 等），那么由于 $x<0$，所以应该将 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化成 $\cos x$；如果 x 是从右侧趋于 0（如 x 取 $0.1,0.01,0.001$ 等），那么由于 $x>0$，所以应该将 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化成 $\sin x$。

所以有

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\cos x$，用画图法求得答案为 1。

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sin x$，用代入法求得答案为 0。

由于 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，所以，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在但不是 ∞。

因为极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在，所以绝对不可能等于函数值，因此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续。

例. 已知 $f(x)\begin{cases}\sin x, & x>0\\ 28, & x=0\\ \mathrm{e}^x-1, & x<0\end{cases}$，请问该函数在 $x=0$ 处连续吗？

解： 利用定义来做就可以了。

首先计算函数值 $f(0)$。

由于函数 $f(x)\begin{cases}\sin x, & x>0\\ 28, & x=0\\ \mathrm{e}^x-1, & x<0\end{cases}$，所以 $f(0)=28$。

然后计算极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$。

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(e^x-1)$，用代入法求得答案为 0。

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sin x$，用代入法求得答案为 0。

由于 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$=0。

由于 $\lim\limits_{x\to0}f(x)\neq f(0)$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续。

例．已知 $f(x)\begin{cases}\sin x, & x>0\\ 0, & x=0\\ e^x-1, & x<0\end{cases}$，请问该函数在 $x=0$ 处连续吗？

解：利用定义来做就可以了。

首先计算函数值 $f(0)$。

由于函数 $f(x)\begin{cases}\sin x, & x>0\\ 0, & x=0\\ e^x-1, & x<0\end{cases}$，所以 $f(0)=0$。

然后计算极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$。

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(e^x-1)$，用代入法求得答案为 0。

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sin(\sin x)$，用代入法求得答案为 0。

由于 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$=0。

由于 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

例．已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<-1\\ -1, & x=-1\\ x, & -1<x<1\\ 1, & x=1\\ \dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}$，请问该函数在 $x=-1$ 处连续吗？请问该函数在 $x=1$ 处连续吗？

解：先看第一问。

首先计算函数值 $f(-1)$。

由于函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<-1\\ -1, & x=-1\\ x, & -1<x<1\\ 1, & x=1\\ \dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}$，所以 $f(-1)=-1$。

然后计算极限 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$。

有的同学不会做，原因是之前虽然也出现过分段函数，但是那时只分成三段，而现在分成了五段，所以不知道该如何显化。

有些同学不知道在显化 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$ 中的 $f(x)$ 时，究竟应该将 $f(x)$ 显化为 x、1 还是 $\dfrac{1}{x}$，他们认为既然 x 是从右侧趋于 -1，那么就应让 x 取大于 -1 的数。如果让 x 取 2，由于 $x=2$ 属于 $x>1$，所以又应该将 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化成 $\dfrac{1}{x}$。如果让 x 取 1，由于 $x=1$ 属于 $x=1$，所以又应该将 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化成 1。如果让 x 取 $\dfrac{1}{2}$，由于 $x=\dfrac{1}{2}$ 属于 $-1<x<1$，所以又应该将 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化成 x。综上所述，他们不会做了。

现在回答这个问题：$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$ 说明什么，说明 x 是从右侧趋于 -1，那么就应让 x 取大于 -1 的数，但是到底取多少？必须是比 -1 大而且离 -1 要多近有多近的数。如 $x=-0.99999$，那么 $x=-0.99999$ 属于哪一段？显然属于 $-1<x<1$，所以应该将 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化成 x。

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x$，用代入法求得答案为 -1。

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1}{x}$，用代入法求得答案为 -1。

由于 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-1$，所以 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-1$。

由于 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1)$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续。

再来看第二问。

首先计算函数值 $f(1)$。

由于函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<-1\\ -1, & x=-1\\ x, & -1<x<1\\ 1, & x=1\\ \dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}$，所以 $f(1)=1$。

然后计算极限 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$。

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x}$，用代入法求得答案为 1。

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x$，用代入法求得答案为 1。

由于 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$。

由于 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续。

例. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续且 $f(2)=3$，求 $\lim\limits_{x\to2}f(x)$。

解： 由于 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，所以根据连续的定义，有 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$。又因为 $f(2)=3$，所以 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=3$。

例. 设函数 $f(x)\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ ae^{2x}, & x\leqslant0\end{cases}$，已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，求 a。

解： 由于函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以根据连续的定义，有 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$。

由于 $f(x)\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ ae^{2x}, & x\leqslant0\end{cases}$，所以 $f(0)=ae^{2\times0}=a$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=a$。

因为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。注：其中 A 为任意常数或 ∞。所以，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=a$、$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=a$。

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\tan x}-1}{\arcsin\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x}{\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\frac{x}{2}}=-2\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=-2$$

所以，$a=-2$。

2．函数在一点处左/右连续

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续（口诀：若左极限值=函数值，则左连续）。

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 右连续（口诀：若右极限值=函数值，则右连续）。

对比“函数在一点处连续的定义”与“函数在一点处左/右连续的定义”，可发现：**如果函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则函数 $f(x)$ 一定在 $x=x_0$ 处左连续；如果函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则函数 $f(x)$ 一定在 $x=x_0$ 处右连续。**

例. 已知 $f(x)=\begin{cases}2x, & x>0\\ 1, & x=0\\ \cos x, & x<0\end{cases}$，请问该函数在 $x=0$ 处左连续吗？该函数在 $x=0$ 处右连续吗？该函数在 $x=0$ 处

连续吗？

解：利用定义来做就可以了。

首先计算函数值 $f(0)$。

由于函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & x>0\\ 1, & x=0\\ \cos x, & x<0\end{cases}$，所以 $f(0)=1$。

然后计算自变量从左侧趋于 0 的极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$。

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x$，用代入法求得答案为 1。

再计算自变量从右侧趋于 0 的极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$。

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}2x$，用代入法求得答案为 0。

综上所述，有如下结论成立。

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左连续。

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq f(0)$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不右连续。

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续。

3．函数在某区间内连续

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续。

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续，且在点 $x=a$ 处右连续，则称函数 $f(x)$ 在半开半闭区间 $[a,b)$ 内连续。

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续，且在点 $x=b$ 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在半开半闭区间 $(a,b]$ 内连续。

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续，且在点 $x=a$ 处右连续，在点 $x=b$ 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内连续。

例. 已知函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=3,\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=4,f(a)=3,f(b)=4$，问函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内连续吗？

解：由于 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$，所以说明函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处右连续。由于 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$，所以说明函数 $f(x)$ 在 $x=b$ 处左连续。

综上所述，函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处右连续，函数 $f(x)$ 在 $x=b$ 处左连续，所以函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内连续。

接下来要给大家讲 5 个小结论。

小结论 1. 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，函数 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则有：函数 $f(x)+g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，函数 $f(x)-g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，函数 $f(x)\times g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，函数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$（当 $g(x_0)\neq 0$ 时）在 $x=x_0$ 处连续。

小结论 1.的记忆口诀：连续加减乘除连续还等于连续。

小结论 2. 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，函数 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续，则有：函数 $f(x)+g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续，函数 $f(x)-g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续。

小结论 2 的记忆口诀：连续加减不连续等于不连续。

为了能让大家明白小结论 3，在讲小结论 3 之前，先给大家介绍两个知识点，一个是“基本初等函数”，另一个是“初等函数”。

基本初等函数：其实指的就是以下六类函数。

常函数 $y=c$，如 $y=2$。

幂函数 $y=x^n$，如 $y=x^3$。

指数函数 $y=a^x(a>0\text{且}a\neq 1)$，如 $y=3^x$。

对数函数 $y=\log_a x(a>0\text{且}a\neq 1)$，如 $y=\ln x$。

三角函数，如 $y=\sin x$。

反三角函数，如 $y = \arcsin x$。

例. 请问函数 $f(x) = 2x + 3$ 是基本初等函数吗？

解： 不是，因为函数 $f(x) = 2x + 3$ 不属于上述六类函数之一。

例. 请问函数 $f(x) = e^{2x}$ 是基本初等函数吗？

解： 不是，因为函数 $f(x) = e^{2x}$ 不属于上述六类函数之一。

例. 请问函数 $f(x) = e^{x}$ 是基本初等函数吗？

解： 是，因为函数 $f(x) = e^{x}$ 属于上述六类函数中的第三类函数。

初等函数：指的是基本初等函数经过有限次的加减乘除四则运算和有限次的函数复合后形成的函数。

例. 请问函数 $f(x) = 2x + 3$ 是初等函数吗？

解： 是，因为函数 $f(x) = 2x + 3$ 是基本初等函数 $y = 2$ 和基本初等函数 $y = x$ 进行一次乘法运算后，所得到的结果再和基本初等函数 $y = 3$ 进行一次加法运算后形成的函数。

例. 请问函数 $f(x) = e^{2x}$ 是基本初等函数吗？

解： 是，因为函数 $f(x) = e^{2x}$ 是基本初等函数 $y = 2$ 和基本初等函数 $y = x$ 进行一次乘法运算后，所得到的结果再和基本初等函数 $y = e^{x}$ 进行一次函数复合后所形成的函数。

现在问大家一个问题，从小学到现在，除了基本初等函数和初等函数外，还见过别的函数吗？好好想想就会发现，除了基本初等函数和初等函数之外，就只见过一种函数，那就是分段函数，其余的就没了。

有了以上知识做铺垫，下面给大家讲小结论 3。

小结论 3：所有的基本初等函数和所有的初等函数在其定义域内都是连续的。

小结论 3 解释了为何在考研数学的题目中凡是涉及连续性的题基本上都与分段函数有关（正是由于只见过基本初等函数、初等函数、分段函数，而基本初等函数和初等函数在其定义域内又必然是连续的，所以当考查连续性时，没有必要考查基本初等函数和初等函数，所以在考研数学的题目中凡是涉及连续性的题基本上都与分段函数有关）。

例. 已知函数 $f(x) = 2x^2 + e^x + \ln x$，请问函数 $f(x)$ 在 $x = 4$ 处连续吗？

解： 要想做出本题，有两种方法。第一种方法是算出极限值 $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ 和函数值 $f(4)$，然后比较两者是否相等，若相等，则说明函数 $f(x)$ 在 $x = 4$ 处连续。

不过建议大家采用第二种方法。第二种方法如下。

由于函数 $f(x) = 2x^2 + e^x + \ln x$ 是初等函数，根据小结论 3 可知，函数 $f(x) = 2x^2 + e^x + \ln x$ 在其定义域内连续。函数 $f(x) = 2x^2 + e^x + \ln x$ 的定义域是 $(0, +\infty)$，也就是说，函数 $f(x) = 2x^2 + e^x + \ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内连续。也就意味着该函数在这个开区间内的任意一点都连续，而 $x = 4$ 属于区间 $(0, +\infty)$，所以说函数 $f(x)$ 在 $x = 4$ 处连续。

例. 已知函数 $f(x) = \arcsin x + 6e^{2x} + \dfrac{1}{x}$，请问函数 $f(x)$ 在其定义域内连续吗？

解： 有的同学想求函数 $f(x) = \arcsin x + 6e^{2x} + \dfrac{1}{x}$ 的定义域，其实不需要求。不管函数 $f(x) = \arcsin x + 6e^{2x} + \dfrac{1}{x}$ 的定义域是什么，它都是初等函数，初等函数在其定义域内就一定是连续的。

例. 已知 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x < -1 \\ -1, & x = -1 \\ x, & -1 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$，请问该函数在其定义域内连续吗？

解： 本题所给的函数 $f(x)$ 是一个分段函数（而不是初等函数），这个函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，也就是说，本题的问题是该函数在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是否连续。

对于这种题要记住一句话，那就是：**对于分段函数而言，除了分段点的连续性需要判断之外，其他点肯定都是连续的！** 这是因为如果单独看分段点以外的其他段，每一段其实都是基本初等函数或初等函数。

对于本题来说，有：在区间 $(-\infty,-1)$ 内函数 $f(x)$ 连续，在区间 $(-1,1)$ 内函数 $f(x)$ 连续，在区间 $(1,+\infty)$ 内函数 $f(x)$ 连续。

现在需要判断函数 $f(x)$ 在分段点 $x=-1$ 处和分段点 $x=1$ 处的连续性。

（1）判断函数 $f(x)$ 在分段点 $x=-1$ 处的连续性。

首先计算一下函数值 $f(-1)$ 。

由于函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<-1\\ -1, & x=-1\\ x, & -1<x<1\\ 1, & x=1\\ \dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}$，所以 $f(-1)=-1$ 。

然后计算极限 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ 。

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x$，用代入法求得答案为 -1 。

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1}{x}$，用代入法求得答案为 -1 。

由于 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-1$，所以 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-1$ 。

综上所述，由于 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1)$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处是连续的。

（2）判断函数 $f(x)$ 在分段点 $x=1$ 处的连续性。

首先计算函数值 $f(1)$ 。

由于函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<-1\\ -1, & x=-1\\ x, & -1<x<1\\ 1, & x=1\\ \dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}$，所以 $f(1)=1$ 。

然后计算极限 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 。

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x}$，用代入法求得答案为 1 。

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x$，用代入法求得答案为 1 。

由于 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$ 。

综上所述，由于 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是连续的。

由于在区间 $(-\infty,-1)$ 内函数 $f(x)$ 连续，在区间 $(-1,1)$ 内函数 $f(x)$ 连续，在区间 $(1,+\infty)$ 内函数 $f(x)$ 连续，在点 $x=-1$ 处函数 $f(x)$ 连续，在点 $x=1$ 处函数 $f(x)$ 连续，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

例. 已知函数 $f(x)\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ -2\mathrm{e}^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$，请问该函数在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是否连续？

解：根据上一道题中的加粗字体（**对于分段函数而言，除了分段点的连续性需要判断之外，其他点肯定都是连续的！**）可知，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内肯定是连续的，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内肯定也是连续的。所以只需判断该函数在分段点 $x=0$ 处是否连续即可。

大家一定要注意，并不是说必须单分出来一段的那个点才叫分段点。对于本题而言，$x=0$ 虽然没单分出来一段，但 0 依然是分段点。

现在判断该函数在分段点 $x=0$ 处是否连续。

首先求函数值 $f(0)$ 。

由于函数 $f(x)\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ -2\mathrm{e}^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$，所以 $f(0)=-2\times\mathrm{e}^{2\times 0}=-2\times 1=-2$。

接着我们求极限值 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$。

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}-2\mathrm{e}^{2x}=-2$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x}{\dfrac{x}{2}}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\dfrac{x}{2}}=-2$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-2$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-2$。

由于极限值 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 与函数值 $f(0)$ 相等，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

由于函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内连续，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内连续，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

小结论 4：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内连续，则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内必存在最大值和最小值。

关于小结论 4 的解释：因为一个函数在闭区间连续，体现在平面直角坐标系中就是：可以一笔画完该函数在该闭区间的图像。既然如此，最大值和最小值必然存在。

小结论 5：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内连续，则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内必存在上界和下界。

关于小结论 5 的解释：最大值和最小值都有了，一定有上下界。因为最大值本身就可以作为上界，最小值本身就可以作为下界。

1.5.2　函数的间断点

在正式开始讲函数的间断点之前，先跟大家强调一件很重要的事情，那就是**很多人都认为“间断点”与“连续性”是对立的关系，认为对于函数 $f(x)$ 而言，任意指定一个点 x_0，那么函数 $f(x)$ 要么在点 x_0 处连续，要么在点 x_0 处间断。这种说法是不正确的。**

之所以不正确，是因为：无论函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续或间断，都有一个前提，那就是函数 $f(x)$ 必须在点 x_0 的某去心邻域内有定义（所谓“ x_0 的去心邻域”，指的是“ $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ ”，其中 $\delta>0$ 。例如，对于 4 来说，$(3.99,4)\cup(4,4.01)$ 就是 4 的一个去心邻域，注意不包括 4 本身）。否则，函数 $f(x)$ 在点 x_0 就既不连续也不间断。

例. 函数 $f(x)=\ln x$，请问点 $x=-4$ 是函数 $f(x)$ 的连续点还是间断点。

解： 由于函数 $f(x)$ 在 $x=-4$ 的任意一个去心邻域内都没有定义，所以 $x=-4$ 既不是函数 $f(x)$ 的连续点也不是函数 $f(x)$ 的间断点。

下面正式给大家讲解函数的间断点。

函数的间断点的定义：在函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义的前提下，若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称点 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点。

函数的间断点的定义的记忆口诀：在去心邻域有定义的前提下，不是连续点就是间断点。

例. 请问 $x=0$ 是不是函数 $f(x)\begin{cases}\sin x, & x>0\\ 28, & x=0\\ \cos x, & x<0\end{cases}$ 的间断点。

解： 首先，可看出函数 $f(x)$ 在点 0 的去心邻域内是有定义的。然后，看看函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续，如果不连续，那么 $x=0$ 就是函数 $f(x)\begin{cases}\sin x, & x>0\\ 28, & x=0\\ \cos x, & x<0\end{cases}$ 的间断点。

首先计算函数值 $f(0)$。

由于函数 $f(x)\begin{cases}\sin x, & x>0\\ 28, & x=0\\ \cos x, & x<0\end{cases}$，所以 $f(0)=28$。

然后计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$。

要想计算 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，必须先将 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化。可是 $f(x)$ 是一个分段函数，有三段，那么应该将 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 中

的 $f(x)$ 显化成这三段中的哪一段呢？本题中“ $x \to 0$ ”，即“ x 趋于 0”，意思是 x 无限接近 0 但却永远不到达 0，因此不能将 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化成 28。那么应该将 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化成 $\sin x$ 还是 $\cos x$ 呢？这要看 x 到底是怎样趋于 0 的。如果 x 是从左侧趋于 0（如 x 取 $-0.1,-0.01,-0.001$ 等），那么由于 $x<0$，所以应该将 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化成 $\cos x$；如果 x 是从右侧趋于 0（如 x 取 $0.1, 0.01, 0.001$ 等），那么由于 $x>0$，所以应该将 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化成 $\sin x$。

所以有

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \cos x$，用画图法求得答案为 1。

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sin x$，用代入法求得答案为 0。

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在但不是 ∞。

因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，因此 $x=0$ 是函数 $f(x)\begin{cases}\sin x, & x>0\\ 28, & x=0\\ \cos x, & x<0\end{cases}$ 的间断点。

例．请问 $x=0$ 是不是函数 $f(x)\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ -2\mathrm{e}^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 的间断点。

解：首先，可看出来函数 $f(x)$ 在点 0 的去心邻域内是有定义的。然后，看看函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续，如果不连续，那么 $x=0$ 就是函数 $f(x)\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ -2\mathrm{e}^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 的间断点。

首先求函数值 $f(0)$。

由于函数 $f(x)\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ -2\mathrm{e}^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$，所以 $f(0) = -2\times\mathrm{e}^{2\times 0} = -2\times 1 = -2$。

接着求极限值 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$。

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -2\mathrm{e}^{2x} = -2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\tan x}-1}{\arcsin\frac{x}{2}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{\frac{x}{2}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{x}{2}} = -2$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -2$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$。

由于极限值 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 与函数值 $f(0)$ 相等，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，因此 $x=0$ 不是函数 $f(x)\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ -2\mathrm{e}^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 的间断点。

在给大家讲“间断点的分类”之前，先强调一点，就是：**无论点 x_0 是哪一类间断点，只要它是间断点，肯定就不满足 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$。**

现在正式讲解间断点的分类。

第一类间断点：若 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，而且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点。第一类间断点还可以再细分，即：若 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，而且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在且相等，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的可去间断点；若 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，而且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在但不相等，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点。换言之，第一类间断点可以细分为可去间断点和跳跃间断点。

第二类间断点：若 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，而且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 中至少有一个不存在（注意，“极限不存在”分为两种情况，一是“ ∞ ”，二是“不存在但不为 ∞ ”），则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的第二类间断点。第二类间断

点同第一类间断点一样，还可以再细分，而且可以细分成很多种。不过针对考研数学而言，大家不需要掌握第二类间断点的所有细分，只需要掌握第二类间断点中的无穷间断点即可。所谓无穷间断点，指的是：若 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，而且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 中至少有一个是 ∞，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的无穷间断点。

为了帮助大家理解，下面给出一个框图。

$$
\text{函数的间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点}\begin{cases}\text{可去间断点}\\ \text{跳跃间断点}\end{cases}\\ \text{第二类间断点}\begin{cases}\text{无穷间断点}\\ \text{考研数学中不要求的其他第二类间断点}\end{cases}\end{cases}
$$

例. 请问 $x=0$ 是不是函数 $f(x)\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ 1, & x=0\\ -2e^{2x}, & x<0\end{cases}$ 的间断点？如果是，请判断该间断点的类型。

解： 首先求函数值 $f(0)$。

由于函数 $f(x)\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ 1, & x=0\\ -2e^{2x}, & x<0\end{cases}$，所以 $f(0)=1$。

接着求极限值 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$。

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}-2e^{2x}=-2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\tan x}-1}{\arcsin\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{x}{2}}=-2$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-2$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-2$。

由于极限值 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 与函数值 $f(0)$ 不相等，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，也就是说 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点。

接下来，判断间断点 $x=0$ 的类型。

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$、$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 均存在，所以间断点 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点。由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$，所以间断点 $x=0$ 是第一类间断点中的可去间断点。

例. 请问 $x=0$ 是不是函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ 1, & x=0\\ -e^{2x}, & x<0\end{cases}$ 的间断点？如果是，请判断该间断点的类型。

解： 首先求函数值 $f(0)$。

由于函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ 1, & x=0\\ -e^{2x}, & x<0\end{cases}$，所以 $f(0)=1$。

接着求极限值 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$。

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}-e^{2x}=-2$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\tan x}-1}{\arcsin\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x}{\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\frac{x}{2}}=-2$$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在。

因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，也就是说 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点。

接下来，判断间断点 $x=0$ 的类型。

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$、$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ 均存在，所以间断点 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点。由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，所以间断点 $x=0$ 是第一类间断点中的跳跃间断点。

例. 请问 $x=0$ 是不是函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}, & x>0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{1}{x}, & x<0\end{cases}$ 的间断点？如果是，请判断该间断点的类型。

解：首先求函数值 $f(0)$。

由于函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}, & x>0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{1}{x}, & x<0\end{cases}$，所以 $f(0)=1$。

接着求极限值 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$。

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\tan x}-1}{\arcsin\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x}{\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\frac{x}{2}}=-2$$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在。

因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，也就是说 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点。

接下来，判断间断点 $x=0$ 的类型。

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$、$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ 这两个之中有一个是不存在的，所以间断点 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的第二类间断点。由于 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$，所以间断点 $x=0$ 是第二类间断点中的无穷间断点。

例. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，$g(x)=\begin{cases}f(\frac{1}{x}), & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则（　　）。

（A）$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点

（B）$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

（C）$x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点

（D）$g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

解：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，不妨设函数 $f(x)$ 是常函数，即设 $f(x)=a$。既然 $f(x)=a$，所以有 $f(\frac{1}{x})=a$，

$$g(x)=\begin{cases}a, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

下面判断函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

首先求函数值 $g(0)$。

由于 $g(x)=\begin{cases}a, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，所以 $g(0)=0$。

再求极限值 $\lim\limits_{x\to0}g(x)$。

$g(x)$ 是一个分段函数，应该将 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 中的 $g(x)$ 显化为哪一段呢？由于是 $x\to 0$，这说明 x 无限接近 0 却到达不了 0，也就是说 $x\neq 0$，所以不能将 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 中的 $g(x)$ 显化为 0，而应该将 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 中的 $g(x)$ 显化为 a。所以 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} a$。由于常数的极限永远是它本身，所以 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} a=a$。

综上所述，求出了函数值 $g(0)$ 及极限值 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$，现在需要比较这两者。如果这两者相等，则说明函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续；如果这两者不相等，则说明函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处不连续。

若 $a=0$，则相等；若 $a\neq 0$，则不相等。

所以，$g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关，因此本题应该选择（D）选项。

1.6　无穷小、同阶无穷小、等阶无穷小、高阶无穷小、低阶无穷小、*k* 阶无穷小

本节将介绍与无穷小有关的一些知识，主要包括：无穷小、同阶无穷小、等价无穷小、高阶无穷小、低阶无穷小、k 阶无穷小。

1.6.1　无穷小

若 $\lim\limits_{x\to\Delta} f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 是 $x\to\Delta$ 时的无穷小。

例. 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，所以函数 $y=\sin x$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小。

例. 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1\neq 0$，所以函数 $y=\cos x$ 不是 $x\to 0$ 时的无穷小。

例. 由于 $\lim\limits_{x\to 1}\sin x=\sin 1\neq 0$，所以函数 $y=\sin x$ 不是 $x\to 1$ 时的无穷小。

例. 由于 $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$，所以函数 $y=x^2$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小。

1.6.2　同阶无穷小

若函数 $f(x)$ 是 $x\to\Delta$ 时的无穷小，函数 $g(x)$ 也是 $x\to\Delta$ 时的无穷小，$g(x)\neq 0$，并且有 $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$ 非零常数 C，则称函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 是 $x\to\Delta$ 时的同阶无穷小。

例. 已知函数 $f(x)=2x^2$，函数 $g(x)=x^2$，请判断函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 是不是 $x\to 0$ 时的同阶无穷小。

解： 本题的问题是“函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 是不是 $x\to 0$ 时的同阶无穷小”，那么首先应**分别**判断这两个函数各自是不是 $x\to 0$ 时的无穷小，这是大前提。

由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2x^2=0$，所以函数 $f(x)$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小。

由于 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$，所以函数 $g(x)$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小。

然后计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$。

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0} 2=2$$

由于 2 是非零常数，所以函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 是 $x\to 0$ 时的同阶无穷小。

例. 已知函数 $f(x)=2x^3$，函数 $g(x)=x^2$，请判断函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 是不是 $x\to 0$ 时的同阶无穷小。

解： 本题的问题是“函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 是不是 $x\to 0$ 时的同阶无穷小”，那么首先应**分别**判断这两个函数各自是不是 $x\to 0$ 时的无穷小，这是大前提。

由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2x^3=0$，所以函数 $f(x)$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小。

由于 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$，所以函数 $g(x)$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小。

然后计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$。

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to 0}2x=0$$

所以函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 不是 $x\to 0$ 时的同阶无穷小。

例. 已知函数 $f(x)=2x^2$，函数 $g(x)=x^2$，请判断函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 是不是 $x\to 1$ 时的同阶无穷小。

解： 本题的问题是“函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 是不是 $x\to 1$ 时的同阶无穷小”，那么首先应**分别**判断这两个函数各自是不是 $x\to 1$ 时的无穷小，这是大前提。

由于 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}2x^2=2\neq 0$，所以函数 $f(x)$ 不是 $x\to 0$ 时的无穷小。本题不用再往下做了，因为 $f(x)$ 不是 $x\to 0$ 时的无穷小，所以函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ **不是** $x\to 0$ 时的同阶无穷小。

1.6.3　等价无穷小

若函数 $f(x)$ 是 $x\to\Delta$ 时的无穷小，函数 $g(x)$ 也是 $x\to\Delta$ 时的无穷小，$g(x)\neq 0$，并且有 $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 是 $x\to\Delta$ 时的等价无穷小。

由等价无穷小的定义可以明显看出：**等价无穷小其实就是特殊的同阶无穷小。也就是说，若函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 是 $x\to\Delta$ 时的等价无穷小，那么函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 一定是 $x\to\Delta$ 时的同阶无穷小。**

例. 已知函数 $f(x)=2x^2$，函数 $g(x)=x^2$，请判断函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 是不是 $x\to 0$ 时的等价无穷小。

解： 本题的问题是“函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 是不是 $x\to 0$ 时的等价无穷小”，那么首先应**分别**判断这两个函数各自是不是 $x\to 0$ 时的无穷小，这是大前提。

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}2x^2=0$，所以函数 $f(x)$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小。

由于 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，所以函数 $g(x)$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小。

然后计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$。

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}2=2\neq 1$$

所以函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 不是 $x\to 0$ 时的等价无穷小。

例. 已知函数 $f(x)=\sin(x^2)$，函数 $g(x)=x^2$，请判断函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 是不是 $x\to 0$ 时的等价无穷小。

解： 本题的问题是“函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 是不是 $x\to 0$ 时的等价无穷小”，那么首先应**分别**判断这两个函数各自是不是 $x\to 0$ 时的无穷小，这是大前提。

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin(x^2)=\sin 0=0$，所以函数 $f(x)$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小。

由于 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，所以函数 $g(x)$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小。

然后计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$。

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

所以函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 是 $x\to 0$ 时的等价无穷小。

例. 已知函数 $f(x)=2x^2$，函数 $g(x)=x^2$，请判断函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 是不是 $x\to 1$ 时的等价无穷小。

解： 本题的问题是“函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 是不是 $x\to 1$ 时的等价无穷小”，那么首先应**分别**判断这两个函数各自是不是 $x\to 1$ 时的无穷小，这是大前提。

由于 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}2x^2=2\neq 0$，所以函数 $f(x)$ 不是 $x\to 0$ 时的无穷小。本题不用再往下做了，因为 $f(x)$ 不是 $x\to 0$ 时的无穷小，所以函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ **不是** $x\to 0$ 时的等价无穷小。

1.6.4　高阶无穷小

若函数 $f(x)$ 是 $x\to\Delta$ 时的无穷小，函数 $g(x)$ 也是 $x\to\Delta$ 时的无穷小，$g(x)\neq 0$，并且有 $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称 $x\to\Delta$ 时函数 $f(x)$ 是函数 $g(x)$ 的高阶无穷小。

例. 已知函数 $f(x)=2x^3$，函数 $g(x)=x^2$，请判断 $x\to 0$ 时函数 $f(x)$ 是不是函数 $g(x)$ 的高阶无穷小。

解： 本题的问题是“$x\to\Delta$ 时函数 $f(x)$ 是不是函数 $g(x)$ 的高阶无穷小”，那么首先应**分别**判断这两个函数各自是不是 $x\to 0$ 时的无穷小，这是大前提。

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$，所以函数 $f(x)$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小。

由于 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，所以函数 $g(x)$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小。

然后计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$。

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to 0}2x=0$$

所以 $x\to 0$ 时函数 $f(x)$ 是函数 $g(x)$ 的高阶无穷小。

例. 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于（　　）。

（A）1　　　　（B）2

（C）3　　　　（D）4

解： 由题意可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n}=0 \qquad （1）式$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x^n}{e^{x^2}-1}=0 \qquad （2）式$$

对（1）式使用等价无穷小替换可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2\times x^2}{x^{n+1}}=0$$

由上式可知 $n+1<4$（否则答案不可能是 0），解得 $n<3$。

对（2）式使用等价无穷小替换可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x^n}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{n+1}}{x^2}=0$$

由上式可知 $n+1>2$（否则答案不可能是 0），解得 $n>1$。

综上所述，$n>1$ 且 $n<3$，而题中说 n 为正整数，所以 $n=2$。

有关“高阶无穷小”的知识点还有一个没讲，那就是：若 $x\to\Delta$ 时函数 $f(x)$ 是函数 $g(x)$ 的高阶无穷小，则函数 $f(x)$ 可以记为，当 $x\to\Delta$ 时，$f(x)=o(g(x))$。

例. 已知 $x\to 2$ 时，$f(x)=o(g(x))$，求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$。

解： 题中的“已知 $x\to 2$ 时，$f(x)=o(g(x))$”可翻译为“当 $x\to 2$ 时，函数 $f(x)$ 是函数 $g(x)$ 的高阶无穷小”。

所以根据高阶无穷小的定义可知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$。

有时，人们常常省略“当 $x\to\Delta$ 时”，而是直接说“$f(x)=o(g(x))$”。下面通过一道例题来解释。

例. 已知 $f(x)=o(2x)$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}$。

解： 题中的“已知 $f(x)=o(2x)$”可翻译成“函数 $f(x)$ 是 $2x$ 的高阶无穷小”。大家可能会奇怪为什么没说 x 趋于多少时函数 $f(x)$ 是 $2x$ 的高阶无穷小？

首先，“函数 $f(x)$ 是 $2x$ 的高阶无穷小”应满足一个前提，那就是：$f(x)$ 和 $2x$ 这两者本身是无穷小。很显然，只有当 x 趋于 0 时，$2x$ 才是无穷小。

也就是说，本题虽然只是说“$f(x)=o(2x)$”，而没有说“当 $x\to 0$ 时，$f(x)=o(2x)$”，但是可以推断出“$f(x)=o(2x)$”实际上指的是“当 $x\to 0$ 时，$f(x)=o(2x)$”。

所以根据高阶无穷小的定义可知，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=0$。

1.6.5 低阶无穷小

若函数 $f(x)$ 是 $x\to\Delta$ 时的无穷小，函数 $g(x)$ 也是 $x\to\Delta$ 时的无穷小，$g(x)\neq 0$，并且有 $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$，则称 $x\to\Delta$ 时函数 $f(x)$ 是函数 $g(x)$ 的低阶无穷小。

例. 当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 是 x^2 的（　　）。

（A）低阶无穷小　　（B）高阶无穷小

（C）等价无穷小　　（D）同阶但非等价无穷小

解： 对于本题而言，不用**分别**判断这两个函数各自是不是 $x\to 0$ 时的无穷小，因为这 4 个选项中肯定有一个是对的，而无论哪个选项是对的，这两个函数各自肯定都是 $x\to 0$ 时的无穷小。

直接计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}$ 即可。

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}\overset{?}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x}=0$$

由于最终的计算结果为 0，0 是常数，属于“常数或∞”，所以把上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“=”，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=0$$

所以当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 是 x^2 的高阶无穷小。

1.6.6 *k* 阶无穷小

若函数 $f(x)$ 是 $x\to\Delta$ 时的无穷小，函数 $g(x)$ 也是 $x\to\Delta$ 时的无穷小，$g(x)\neq 0$，并且有 $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{[g(x)]^k}=$ 非零常数 C，则称 $x\to\Delta$ 时函数 $f(x)$ 是函数 $g(x)$ 的 k 阶无穷小。

$x\to\Delta$ 时函数 $f(x)$ 是函数 $g(x)$ 的 k 阶无穷小，**其实就意味着** $x\to\Delta$ 时函数 $f(x)$ 和函数 $[g(x)]^k$ 是同阶无穷小。

例. 当 $x\to 0$ 时，$4(\mathrm{e}^{x^2}-1)$ 是 x 的________阶无穷小（填数字）。

解： 假设这个空填 n，最后只要把 n 求出来就可以了。由于当 $x\to 0$ 时，$4(\mathrm{e}^{x^2}-1)$ 是 x 的 n 阶无穷小，所以有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4(\mathrm{e}^{x^2}-1)}{x^n}=$ 非零常数 C。由等价无穷小替换可知，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{x^n}=$ 非零常数 C，所以此时可以得到 $n=2$。

1.7 两个常用的结论

本节将要给大家介绍两个非常重要且常用的结论。

结论 1. 在“$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$ 非零常数 C”这个大前提下：若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=0$；若 $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$。

关于结论 1 的解释：已知 $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$ 非零常数 C，如果单独算分母的极限是 0，那么单独算分子的极限必然也是 0；如果单独算分子的极限是 0，那么单独算分母的极限必然也是 0。

结论 2. 在“$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$”这个大前提下：若 $\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0$。

关于结论 2 的解释：已知 $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，如果单独算分母的极限是 0，那么单独算分子的极限必然也是 0。

例. 若 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=3$，求 a,b 的值。

解： 由于 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}$ 等于一个非零常数，又由代入法可得 $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$，所以根据刚刚讲的两个常用的结论中的结论 1，立刻有

$$\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)=0 \qquad \text{（1）式}$$

由代入法可知

$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax+b)=4+2a+b$　　（2）式

（1）式、（2）式相结合，得

$4+2a+b=0$　　（3）式

通过（3）式可解得

$b=-4-2a$　　（4）式

将 $b=-4-2a$ 代入 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=3$ 中，有

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax-4-2a}{x-2}=3$　　（5）式

将 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax-4-2a}{x-2}$ 的分子进行因式分解可得

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax-4-2a}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2+a)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2+a)$　　（6）式

（5）式、（6）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to 2}(x+2+a)=3$　　（7）式

由代入法可得

$\lim\limits_{x\to 2}(x+2+a)=4+a$　　（8）式

（7）式、（8）式相结合，得

$4+a=3$　　（9）式

通过（9）式可解得 $a=-1$。将 $a=-1$ 代入（4）式，可解得

$b=-4-2a=-4+2=-2$

因此，$a=-1,b=-2$。

例. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，求 a,b 的值。

解： 先将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$ 变一下形，得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(\cos x-b)}{e^x-a}=5$　　（1）式

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(\cos x-b)}{e^x-a}$ 等于一个非零常数，又由代入法可得

$\lim\limits_{x\to 0}[\sin x(\cos x-b)]=\sin 0\times(\cos 0-b)=0\times(1-b)=0$

所以根据两个常用的结论中的结论 1，立刻有

$\lim\limits_{x\to 0}(e^x-a)=0$　　（2）式

由代入法可知

$\lim\limits_{x\to 0}(e^x-a)=e^0-a=1-a$　　（3）式

（2）式、（3）式相结合得

$1-a=0$　　（4）式

通过（4）式可解得

$a=1$　　（5）式

将 $a=1$ 代入（1）式中，有

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(\cos x-b)}{e^x-1}=5$　　（6）式

利用等价无穷小替换，有

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\cos x-b)}{x}=5$　　（7）式

化简（7）式，可得

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-b)=5$　　（8）式

由代入法可得

$\lim\limits_{x\to0}(\cos x-b)=\cos0-b=1-b$ （9）式

（8）式、（9）式相结合，得

$1-b=5$ （10）式

通过（10）式可解得 $b=-4$。

因此，$a=1,b=-4$。

例. 已知极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-a}{(1+\cos x)\sin x}=0$，求常数 a。

解： 由题意可知

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-a}{(1+\cos x)\sin x}=0$$

又根据代入法可知

$$\lim_{x\to0}[(1+\cos x)\sin x]=2\times0=0$$

所以根据两个常用的结论中的结论 2，立刻有

$$\lim_{x\to0}(e^{x^2}-a)=0$$

而由代入法可知

$$\lim_{x\to0}(e^{x^2}-a)=1-a$$

所以有 $1-a=0$，解得 $a=1$。

1.8 函数的极限存在性

在开始讲解本节之前，首先强调一件事情：只有 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=$ 常数，才叫 $x\to\Delta$ 时函数 $f(x)$ 的极限存在。如果 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=$ 不存在但不为∞，那么都叫 $x\to\Delta$ 时函数 $f(x)$ 的极限不存在。

1.8.1 函数和差的极限存在性

函数和差的极限存在性定理 1：若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$ 也存在，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)+g(x)]$、$\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)-g(x)]$ 一定都存在（因为在讲函数极限计算的基本计算方法中的 9 个小技巧中的小技巧 1 时，曾经给大家讲过这条结论，所以现在这属于重复讲解）。

函数和差的极限存在性定理 2：若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)$、$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$ 这两者中一个存在，另一个不存在，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)+g(x)]$、$\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)-g(x)]$ 一定都不存在。

函数和差的极限存在性定理 2 的推论：若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)$、$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$ 这两者中一个存在，另一个不存在但不为 ∞，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)+g(x)]$、$\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)-g(x)]$ 一定都不存在但不为 ∞。

函数和差的极限存在性定理 3：若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$ 也不存在，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)+g(x)]$、$\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)-g(x)]$ 这两者不可能都存在（这实际上包含了两种情况，第一种情况是 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)+g(x)]$、$\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)-g(x)]$ 这两者其中一个存在，另一个不存在。第二种情况是 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)+g(x)]$、$\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)-g(x)]$ 这两者都不存在）。

例. 设 $f(x)=u(x)+v(x),g(x)=u(x)-v(x)$，并已知 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)$ 都不存在，下列论断正确的是（　　）。

（A）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在

（B）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必不存在

（C）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必不存在

（D）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 必存在

解： 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)$ 都不存在，根据函数和差的极限存在性定理 3 可知，$\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)+v(x)]$、$\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)-v(x)]$ 这两者不可能都存在，也就是说 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 这两者不可能都存在。这实际上包含了两种情况，第一是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 这两者其中一个存在，而另一个不存在；第二是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 这两者都不存在。

（A）选项"若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 必存在"相当于是在特指"第一种情况"，所以（A）选项肯定是错误的。

（B）选项"若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 必不存在"相当于是在特指"第二种情况"，所以（B）选项肯定是错误的。

（C）选项"若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 必不存在"指的是"两者不可能都存在"，所以（C）选项是正确选项。

（D）选项"若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 必存在"指的是"两者都存在"，所以很明显（D）选项是错误的。

综上所述，本题应该选择（C）选项。

1.8.2 函数乘积的极限存在性

函数乘积的极限存在性定理 1：若 $\lim\limits_{x\to\Delta} f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to\Delta} g(x)$ 也存在，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)g(x)]$ 一定存在（因为在讲函数极限计算的基本计算方法中的 9 个小技巧中的小技巧 1 时，曾经给大家讲过这条结论，所以现在这属于重复讲解）。

函数乘积的极限存在性定理 2：若 $\lim\limits_{x\to\Delta} f(x)$、$\lim\limits_{x\to\Delta} g(x)$ 这两者中一个存在，另一个不存在，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)g(x)]$ 的存在性是不确定的（也就是说此时有可能 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)g(x)]$ 是存在的，也有可能 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)g(x)]$ 是不存在的）。

函数乘积的极限存在性定理 2 的推论：若 $\lim\limits_{x\to\Delta} f(x)$、$\lim\limits_{x\to\Delta} g(x)$ 这两者中一个存在，另一个不存在但不为 ∞，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)g(x)]$ 一定不存在但不为 ∞。

函数乘积的极限存在性定理 3：若 $\lim\limits_{x\to\Delta} f(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to\Delta} g(x)$ 也不存在，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)g(x)]$ 的存在性是不确定的（也就是说，此时有可能 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)g(x)]$ 是存在的，也有可能 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)g(x)]$ 是不存在的）。

例. 下列命题正确的是（　　）。

（A）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ 必存在

（B）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ 必不存在

（C）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ 必不存在

（D）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ 必存在

解：先来看（A）选项。

（A）选项说的是"若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ 必存在"。

根据函数乘积的极限存在性定理 2 可知，若 $\lim\limits_{x\to\Delta} f(x)$、$\lim\limits_{x\to\Delta} g(x)$ 这两者中一个存在，另一个不存在，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)g(x)]$ 的存在性是不确定的，即第一种情况是 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)g(x)]$ 存在，第二种情况是 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)g(x)]$ 不存在。

而（A）选项相当于特指"第一种情况"，所以肯定是错误的。

再来看（B）选项。

（B）选项说的是"若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ 必不存在"。

根据函数乘积的极限存在性定理 2 可知，若 $\lim\limits_{x\to\Delta} f(x)$、$\lim\limits_{x\to\Delta} g(x)$ 这两者中一个存在，另一个不存在，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)g(x)]$ 的存在性是不确定的，即第一种情况是 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)g(x)]$ 存在，第二种情况是 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)g(x)]$ 不存在。

而（B）选项相当于特指"第二种情况"，所以肯定是错误的。

再来看（C）选项。

（C）选项说的是"若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ 必不存在"。

根据函数乘积的极限存在性定理 3 可知，若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)$、$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$ 这两者均不存在，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)g(x)]$ 的存在性是不确定的，即第一种情况是 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)g(x)]$ 存在，第二种情况是 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)g(x)]$ 不存在。

而（C）选项相当于特指“第二种情况”，所以肯定是错误的。

再来看（D）选项。

（D）选项说的是“若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ 必存在”。

根据函数乘积的极限存在性定理 1 可知，若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$ 也存在，则 $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)g(x)]$ 一定存在，所以（D）选项肯定是正确的。

综上所述，本题应该选择（D）选项。

1.9 已知一极限求另外一极限

在考研数学中，经常会碰到一种题，那就是：已知一极限求另外一极限。那么这种题应该如何去做呢？其实，每一道这样的题都是有各自独特的做法，但是现在，要给大家讲的是一个通法。这个通法可能不是最快的解题方法，但是只要按照这个通法来做，那就绝对能做出所有这样的题。

“已知一极限求另外一极限”的通法是：**利用极限存在与无穷小的关系。**

极限存在与无穷小的关系如下：

若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=$ 常数A，则有 $f(x)=$ 常数$A+a(x)$。其中，$a(x)$ 就是 $x\to\Delta$ 时的无穷小，也就是说，$a(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to\Delta}a(x)=0$。

例. 由代入法可知 $\lim\limits_{x\to1}2x=2\times1=2$。那么，由极限存在与无穷小的关系可知 $2x=2+a(x)$，其中 $a(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to1}a(x)=0$。

例. 由等价无穷小替换法或由洛必达法则可知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。那么，由极限存在与无穷小的关系可知，$\dfrac{\sin x}{x}=1+a(x)$，其中 $a(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}a(x)=0$。

例. 由函数极限的计算方法可知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\sin x}{x}=2$。那么，由极限存在与无穷小的关系可知 $\dfrac{x+\sin x}{x}=2+a(x)$，其中 $a(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}a(x)=0$。

通过以上几道例题，大家已经掌握了“极限存在与无穷小的关系”。利用极限存在与无穷小的关系是解已知一极限求另外一极限的题的通法。那么到底应该怎么“利用”呢？下面详细讲解。

但凡考研中出的“已知一极限求另外一极限”的题，都有一个特点，就是：已知极限的那个函数与要求极限的那个函数中总有个一样的函数。下面来看几道例题。

例. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)+\ln(1-2x)}{x^2}=4$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2}{x}$。

解： 本题已知极限的函数是 $\dfrac{xf(x)+\ln(1-2x)}{x^2}$，让求极限的函数是 $\dfrac{f(x)-2}{x}$，这两个函数中都有一个一样的函数 $f(x)$。

例. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=0$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$。

解： 本题已知极限的函数是 $\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x^3}$，让求极限的函数是 $\dfrac{6+f(x)}{x^2}$，这两个函数中都有一个一样的函数 $f(x)$。

例. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$。

解：本题已知极限的函数是 $[1+x+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}$，让求极限的函数是 $\frac{f(x)}{x^2}$，这两个函数中都有一个一样的函数 $f(x)$。

正因为"已知一极限求另外一极限"的题具有这个特点，所以这类题的解题方法就是：

第一步，关注那个已知的极限，利用极限存在与无穷小的关系，写出一个关系式。

第二步，通过第一步写出的那个关系式，解出已知极限的函数与让求极限的函数中的那个共同函数。

第三步，把第二步解出的那个共同函数代入让求极限的函数中。

第四步，计算。

例. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$。

解：由于本题属于"已知一极限求另外一极限"的题，所以应该用刚刚讲完的方法来求解。

第一步，关注那个已知的极限，利用极限存在与无穷小的关系，写出一个关系式。

对于本题而言，已知的极限是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$。利用极限存在与无穷小的关系，有 $\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0+a(x)=a(x)$，其中 $a(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}a(x)=0$。

第二步，通过第一步写出的那个关系式，解出已知极限的函数与让求极限的函数中的那个共同函数。

对于本题而言，第一步写出的那个关系式是 $\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=a(x)$。现在要通过这个关系式，解出已知极限的函数与让求极限的函数中的共同函数。对于本题来说，共同函数是 $f(x)$，所以要通过第一步写出的关系式 $\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=a(x)$ 解出 $f(x)$。

由于 $\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=a(x)$，所以 $f(x)=\frac{x^3a(x)-\sin 6x}{x}$。

第三步，把第二步解出的那个共同函数代入让求极限的函数中。

对于本题而言，第二步解出的那个共同函数是 $f(x)=\frac{x^3a(x)-\sin 6x}{x}$，现在把它代入让求极限的函数 $\frac{6+f(x)}{x^2}$ 中，即

$$\frac{6+f(x)}{x^2}=\frac{6+\frac{x^3a(x)-\sin 6x}{x}}{x^2}$$

那么这样一来，本题的问题 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$ 就变成了 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+\frac{x^3a(x)-\sin 6x}{x}}{x^2}$。

第四步，计算。

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+\frac{x^3a(x)-\sin 6x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{6x}{x}+\frac{x^3a(x)-\sin 6x}{x}}{x^2} \qquad \text{（1）式}$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{6x}{x}+\frac{x^3a(x)-\sin 6x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{6x+x^3a(x)-\sin 6x}{x}}{x^2} \qquad \text{（2）式}$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+\frac{x^3a(x)-\sin 6x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{6x+x^3a(x)-\sin 6x}{x}}{x^2} \qquad \text{（3）式}$$

将 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{6x+x^3a(x)-\sin 6x}{x}}{x^2}$ 整理，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{6x+x^3a(x)-\sin 6x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+x^3a(x)-\sin 6x}{x^3} \qquad \text{（4）式}$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+\frac{x^3a(x)-\sin 6x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+x^3a(x)-\sin 6x}{x^3} \qquad （5）式$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x+x^3a(x)-\sin 6x}{x^3}=\lim_{x\to 0}[\frac{6x-\sin 6x}{x^3}+\frac{x^3a(x)}{x^3}] \qquad （6）式$$

（5）式、（6）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+\frac{x^3a(x)-\sin 6x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}[\frac{6x-\sin 6x}{x^3}+\frac{x^3a(x)}{x^3}] \qquad （7）式$$

（7）式可以化简为

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+\frac{x^3a(x)-\sin 6x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}[\frac{6x-\sin 6x}{x^3}+a(x)] \qquad （8）式$$

由于 $a(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}a(x)=0$，所以这说明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}$、$\lim\limits_{x\to 0}a(x)$ 这两者肯定不都是 ∞（因为已经有一个是 0 了），所以 $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{6x-\sin 6x}{x^3}+a(x)]$ 可以拆分。

$$\lim_{x\to 0}[\frac{6x-\sin 6x}{x^3}+a(x)]=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}+\lim_{x\to 0}a(x) \qquad （9）式$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}a(x)=0$，所以有

$$\lim_{x\to 0}[\frac{6x-\sin 6x}{x^3}+a(x)]=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3} \qquad （10）式$$

（9）式、（10）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+\frac{x^3a(x)-\sin 6x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3} \qquad （11）式$$

现在对 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}$ 使用第一类洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}\overset{?}{=}\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}$$
$$\overset{?}{=}\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{6(1-\cos 6x)}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{6\times\frac{1}{2}(6x)^2}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{108x^2}{3x^2}$$
$$=36$$

由于最后的计算结果是 36，36 是常数，属于“常数或 ∞”，所以把上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“=”，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}=36 \qquad （12）式$$

（11）式、（12）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+\frac{x^3a(x)-\sin 6x}{x}}{x^2}=36 \qquad （13）式$$

所以，本题答案是 36。

例. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)+\ln(1-2x)}{x^2}=4$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}$。

解：由于本题属于“已知一极限求另外一极限”的题，所以应该用刚刚讲完的方法来求解。

第一步，关注那个已知的极限，利用极限存在与无穷小的关系，写出一个关系式。

对于本题而言，已知的极限是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\ln(1-2x)}{x^2}=4$。利用极限存在与无穷小的关系，有

$\dfrac{xf(x)+\ln(1-2x)}{x^2}=4+a(x)$，其中 $a(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}a(x)=0$。

第二步，通过第一步写出的那个关系式，解出已知极限的函数与让求极限的函数中的那个共同函数。

对于本题而言，第一步写出的那个关系式是 $\dfrac{xf(x)+\ln(1-2x)}{x^2}=4+a(x)$。现在要通过这个关系式，解出已知极限的函数与让求极限的函数中的共同函数。对于本题来说，共同函数是 $f(x)$，所以要通过第一步写出的关系式 $\dfrac{xf(x)+\ln(1-2x)}{x^2}=4+a(x)$ 解出 $f(x)$。

由于 $\dfrac{xf(x)+\ln(1-2x)}{x^2}=4+a(x)$，所以 $f(x)=\dfrac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)}{x}$。

第三步，把第二步解出的那个共同函数代入让求极限的函数中。

对于本题而言，第二步解出的那个共同函数是 $f(x)=\dfrac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)}{x}$，现在把它代入让求极限的函数 $\dfrac{f(x)-2}{x}$ 中，即

$$\frac{f(x)-2}{x}=\frac{\dfrac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)}{x}-2}{x}$$

这样一来，本题的问题 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}$ 就变成了 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)}{x}-2}{x}$。

第四步，计算。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)}{x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)}{x}-\dfrac{2x}{x}}{x}\qquad（1）式$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)}{x}-\dfrac{2x}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)-2x}{x}}{x}\qquad（2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)}{x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)-2x}{x}}{x}\qquad（3）式$$

将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)-2x}{x}}{x}$ 整理，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)-2x}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)-2x}{x^2}\qquad（4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)}{x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)-2x}{x^2}\qquad（5）式$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)-2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\{\frac{-\ln(1-2x)-2x}{x^2}+\frac{[4+a(x)]x^2}{x^2}\}\qquad（6）式$$

（5）式、（6）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)}{x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\{\frac{-\ln(1-2x)-2x}{x^2}+\frac{[4+a(x)]x^2}{x^2}\}\qquad（7）式$$

（7）式可以化简为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)}{x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\{\frac{-\ln(1-2x)-2x}{x^2}+[4+a(x)]\}\qquad（8）式$$

由于$a(x)$满足$\lim\limits_{x\to 0}a(x)=0$，所以有$\lim\limits_{x\to 0}[4+a(x)]=4$，这说明$\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\ln(1-2x)-2x}{x^2}$、$\lim\limits_{x\to 0}[4+a(x)]$这两者肯定不都是$\infty$（因为已经有一个是 4 了），所以$\lim\limits_{x\to 0}\{\frac{-\ln(1-2x)-2x}{x^2}+[4+a(x)]\}$可以拆为

$$\lim_{x\to 0}\{\frac{-\ln(1-2x)-2x}{x^2}+[4+a(x)]\}=\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1-2x)-2x}{x^2}+\lim_{x\to 0}[4+a(x)]\qquad（9）式$$

由于$\lim\limits_{x\to 0}[4+a(x)]=4$，所以有

$$\lim_{x\to 0}\{\frac{-\ln(1-2x)-2x}{x^2}+[4+a(x)]\}=\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1-2x)-2x}{x^2}+4\qquad（10）式$$

（8）式、（10）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)}{x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1-2x)-2x}{x^2}+4\qquad（11）式$$

将（11）式整理，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)}{x}-2}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)+2x}{x^2}+4\qquad（12）式$$

现在对$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)+2x}{x^2}$使用第一类洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)+2x}{x^2}\overset{?}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2}{1-2x}+2}{2x}$$
$$\overset{?}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-(-2)(-2)}{(1-2x)^2}}{2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-4}{(1-2x)^2}}{2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4}{2}$$
$$=-2$$

由于最后的计算结果是-2，-2是常数，属于“常数或∞”，所以把上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“$=$”，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)+2x}{x^2}=-2\qquad（13）式$$

把（13）式代入（12）式中，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{[4+a(x)]x^2-\ln(1-2x)}{x}-2}{x}=-(-2)+4=2+4=6\qquad（14）式$$

所以，本题的答案是 6。

例. 已知$\lim\limits_{x\to 0}[1+x+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$。

解： 由于本题属于“已知一极限求另外一极限”的题，所以应该用刚刚讲完的方法来求解。

第一步，关注那个已知的极限，利用极限存在与无穷小的关系，写出一个关系式。

对于本题而言，已知的极限是$\lim\limits_{x\to 0}[1+x+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$。利用极限存在与无穷小的关系，有

$[1+x+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}=e^3+a(x)$，其中 $a(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}a(x)=0$。

但是这样对于第二步解 $f(x)$ 就会造成很大的困难，即 $f(x)$ 比较难解。因此，对于本题而言，不妨先将已知的极限变形，然后再进行第一步就会方便多了。

由于已知的极限是 $\lim\limits_{x\to 0}[1+x+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}=e^3$，而 $A=e^{\ln A}$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln[1+x+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}}=e^3$。因为 $\ln A^B=B\ln A$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln[1+x+\frac{f(x)}{x}]}=e^3$。像 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln[1+x+\frac{f(x)}{x}]}$ 这种复合的函数求极限应直接将 lim 深入，所以 $e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln[1+x+\frac{f(x)}{x}]}=e^3$。

$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln[1+x+\frac{f(x)}{x}]}=e^3$

这也就意味着

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln[1+x+\frac{f(x)}{x}]=3$

此时再进行第一步就方便多了。

已知的极限是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln[1+x+\frac{f(x)}{x}]=3$。利用极限存在与无穷小的关系，有

$\frac{1}{x}\ln[1+x+\frac{f(x)}{x}]=3+a(x)$，其中 $a(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}a(x)=0$。

第二步，通过第一步写出的那个关系式，解出已知极限的函数与让求极限的函数中的那个共同函数。

对于本题而言，第一步写出的那个关系式是 $\frac{1}{x}\ln[1+x+\frac{f(x)}{x}]=3+a(x)$。现在要通过这个关系式，解出已知极限的函数与让求极限的函数中的共同函数。对于本题来说，共同函数是 $f(x)$，所以要通过第一步写出的关系式 $\frac{1}{x}\ln[1+x+\frac{f(x)}{x}]=3+a(x)$ 解出 $f(x)$。

由于 $\frac{1}{x}\ln[1+x+\frac{f(x)}{x}]=3+a(x)$，所以 $f(x)=[e^{3x+a(x)x}-1-x]x$。

第三步，把第二步解出的那个共同函数代入让求极限的函数中。

对于本题而言，第二步解出的那个共同函数是 $f(x)=[e^{3x+a(x)x}-1-x]x$，现在把它代入让求极限的函数 $\frac{f(x)}{x^2}$ 中，即

$\frac{f(x)}{x^2}=\frac{[e^{3x+a(x)x}-1-x]x}{x^2}$，

这样一来，本题的问题 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$ 就变成了 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[e^{3x+a(x)x}-1-x]x}{x^2}$。

第四步，计算。

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{[e^{3x+a(x)x}-1-x]x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x+a(x)x}x-x-x^2}{x^2}$ （1）式

而

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x+a(x)x}-x-x-x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}[\frac{e^{3x+a(x)x}x-x}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}]$ （2）式

（1）式、（2）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{[e^{3x+a(x)x}-1-x]x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}[\frac{e^{3x+a(x)x}x-x}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}]$ （3）式

将 $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{e^{3x+a(x)x}x-x}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}]$ 整理，得

$\lim\limits_{x\to 0}[\frac{e^{3x+a(x)x}x-x}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}]=\lim\limits_{x\to 0}[\frac{e^{3x+a(x)x}-x-x}{x^2}]-1$ （4）式

（3）式、（4）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{[e^{3x+a(x)x}-1-x]x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}[\frac{e^{3x+a(x)x}-x-x}{x^2}-1]$ （5）式

而

$\lim\limits_{x\to 0}[\frac{e^{3x+a(x)x}-x-x}{x^2}-1]=\lim\limits_{x\to 0}[\frac{e^{3x+a(x)x}-1}{x}-1]$ （6）式

（5）式、（6）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{[e^{3x+a(x)x}-1-x]x}{x^2}=\lim_{x\to 0}[\frac{e^{3x+a(x)x}-1}{x}-1] \qquad \text{（7）式}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}1=1$，这说明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x+a(x)x}-1}{x}$、$\lim\limits_{x\to 0}1$ 这两者不可能都是 ∞（因为已经有一个是 1 了），因此 $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{e^{3x+a(x)x}-1}{x}-1]$ 一定可以拆为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x+a(x)x}-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}1$，所以有

$$\lim_{x\to 0}[\frac{e^{3x+a(x)x}-1}{x}-1]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x+a(x)x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}1=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x+a(x)x}-1}{x}-1 \qquad \text{（8）式}$$

（7）式、（8）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{[e^{3x+a(x)x}-1-x]x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x+a(x)x}-1}{x}-1 \qquad \text{（9）式}$$

现在计算 $\lim\limits_{x\to 0}[3x+a(x)x]$。$\lim\limits_{x\to 0}[3x+a(x)x]=\lim\limits_{x\to 0}3x+\lim\limits_{x\to 0}a(x)x=0+0=0$，所以在 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x+a(x)x}-1}{x}$ 中，$3x+a(x)x$ 可以被当成“□”，所以根据等价无穷小替换，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x+a(x)x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+a(x)x}{x} \qquad \text{（10）式}$$

将（10）式代入（9）式，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{[e^{3x+a(x)x}-1-x]x}{x^2}==\lim_{x\to 0}\frac{3x+a(x)x}{x}-1 \qquad \text{（11）式}$$

式可以化简为

$$\lim_{x\to 0}\frac{[e^{3x+a(x)x}-1-x]x}{x^2}=\lim_{x\to 0}[3+a(x)]-1 \qquad \text{（12）式}$$

现在计算 $\lim\limits_{x\to 0}(3+a(x))$。由函数极限的可拆性，有 $\lim\limits_{x\to 0}[3+a(x)]=\lim\limits_{x\to 0}3+\lim\limits_{x\to 0}a(x)=3+0=3$，所以（12）式可以变为

$$\lim_{x\to 0}\frac{[e^{3x+a(x)x}-1-x]x}{x^2}=3-1=2 \qquad \text{（13）式}$$

所以，本题的答案是 2。

1.10　求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式

在考研数学中，除了会经常遇到上一节所讲的“已知一极限求另一极限”的题型之外，还会经常遇到求以数列极限的形式给出的函数 $f(x)$ 的表达式。

例. 设 $x\geqslant 0$，求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{2n}+\frac{1}{2^n}x^{3n}}$ 的分段表达式。

解： 本题就属于“求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式”的题型。

例. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$。

若 $f(x)$ 处处连续，求 a,b 的值。

若 (a,b) 不是求出的值时，$f(x)$ 有何间断点，并指出它的类型。

解： 本题这两问虽然没有直接让“求 $f(x)$ 的表达式”，但是要想做出这两问，首先应知道 $f(x)$ 的表达式，所以本题属于“求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式”的题型。

例. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}$，求 $f(x)$ 的间断点。

解： 本题虽然没有直接让“求 $f(x)$ 的表达式”，但是要想求出间断点，首先应知道 $f(x)$ 的表达式，所以本题属于“求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式”的题型。

通过以上几个例子，已经了解了什么是“求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式”的题型，那么这样的题型应该如何去做呢？

有的同学一定会想：这不就是求数列的极限吗，既然是数列的极限计算题，那么可按照本章所讲的数列极限计算的三种方法来做。当然，如果那三种方法的使用条件都不满足，则把函数极限转化成函数极限来做。这以前不都讲过吗？

现在回答这个问题：大家要明确一点，当做“求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式”的题时，就不要去想本章所讲的数列极限计算的三种方法了。要把“求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式”的题当成一种特殊题型，用接下来给大家讲的方法做。

方法 1. 利用夹逼定理来做。

方法 1 用于求解“n 出现在指数位置并且含根号的题”。当然，大前提要满足，也就是说此题应是一道“求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式”的题。

例. 设 $x \geqslant 0$，求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{2n}+\frac{1}{2^n}x^{3n}}$ 的分段表达式。

解： 首先看看本题是否属于“求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式”的题。

很明显，本题属于“求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式”的题型。

因为在本题中 n 出现在了指数位置并且含根号，所以本题应该用夹逼定理来做。

夹逼定理：若存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

若把夹逼定理的使用条件中的 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ 改为 $y_n < x_n \leqslant z_n$ 或 $y_n \leqslant x_n < z_n$ 或 $y_n < x_n < z_n$，其他使用条件不变，则夹逼定理的结论依然成立。

本题要想使用夹逼定理，就要找到能满足 $y_n \leqslant \sqrt[n]{x^n+x^{2n}+\frac{1}{2^n}x^{3n}} \leqslant z_n$ 的 y_n 和 z_n。

先将 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{2n}+\frac{1}{2^n}x^{3n}}$ 中的 $\sqrt[n]{x^n+x^{2n}+\frac{1}{2^n}x^{3n}}$ 变形，即 $\sqrt[n]{x^n+x^{2n}+\frac{1}{2^n}x^{3n}}=\sqrt[n]{x^n+(x^2)^n+(\frac{1}{2}x^3)^n}$。

在平面直角坐标系中画出函数 $y=x$、$y=x^2$、$y=\frac{1}{2}x^3$ 的图像，从图像中可以明显看出：

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，在 $y=x$、$y=x^2$、$y=\frac{1}{2}x^3$ 这三者中 $y=x$ 最大；当 $1<x<2$ 时，在 $y=x$、$y=x^2$、$y=\frac{1}{2}x^3$ 这三者中 $y=x^2$ 最大；当 $2\leqslant x<+\infty$ 时，在 $y=x$、$y=x^2$、$y=\frac{1}{2}x^3$ 这三者中 $y=\frac{1}{2}x^3$ 最大。

当然，等号跟在哪边其实都无所谓。

可以是：当 $0\leqslant x<1$ 时，在 $y=x$、$y=x^2$、$y=\frac{1}{2}x^3$ 这三者中 $y=x$ 最大；当 $1\leqslant x<2$ 时，在 $y=x$、$y=x^2$、$y=\frac{1}{2}x^3$ 这三者中 $y=x^2$ 最大；当 $2\leqslant x<+\infty$ 时，在 $y=x$、$y=x^2$、$y=\frac{1}{2}x^3$ 这三者中 $y=\frac{1}{2}x^3$ 最大。

也可以是：当 $0\leqslant x<1$ 时，在 $y=x$、$y=x^2$、$y=\frac{1}{2}x^3$ 这三者中 $y=x$ 最大；当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，在 $y=x$、$y=x^2$、$y=\frac{1}{2}x^3$ 这三者中 $y=x^2$ 最大；当 $2<x<+\infty$ 时，在 $y=x$、$y=x^2$、$y=\frac{1}{2}x^3$ 这三者中 $y=\frac{1}{2}x^3$ 最大。

如果不会画函数 $y=x$、$y=x^2$、$y=\frac{1}{2}x^3$ 的图像，难道就没法做了吗？当然不是。即使不会画图，也能想出来。当 x 处于 0 到 1 时，那必然是越乘越小，所以在 x、x^2、$\frac{1}{2}x^3$ 这三者中肯定是 x 最大。当 $x>1$ 时，在 x、x^2、$\frac{1}{2}x^3$ 这三者中 x 肯定不可能是最大的（因为不管 $\frac{1}{2}x^3$，就看 x 和 x^2。当 $x>1$ 时，必然是越乘越大，所以 x^2 肯定比 x 大），那么 x^2 与 $\frac{1}{2}x^3$ 究竟谁大谁小呢？x^2 相当于是 $1\times x^2$，$\frac{1}{2}x^3$ 相当于是 $\frac{1}{2}x\times x^2$，那也就是说，要想判断出当 $x>1$ 时，x^2 与 $\frac{1}{2}x^3$ 究竟谁大谁小，只需判断此时 1 和 $\frac{1}{2}x$ 谁大谁小就行了。显然当 x 比 1 大且比 2 小时，1 大；当 x 比 2 大时，$\frac{1}{2}x$ 大。所以，当 x 比 1 大且比 2 小时，在 $y=x$、$y=x^2$、$y=\frac{1}{2}x^3$ 这三者中 $y=x^2$ 最大；当 x 比 2 大时，在 $y=x$、$y=x^2$、$y=\frac{1}{2}x^3$ 这三者中 $y=\frac{1}{2}x^3$ 最大。

所以，就算不会画函数 $y=x$、$y=x^2$、$y=\frac{1}{2}x^3$ 的图像，也完全没有关系。

情况 1：由于当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，在 $y=x$、$y=x^2$、$y=\frac{1}{2}x^3$ 这三者中 $y=x$ 最大，所以有

$$\sqrt[n]{x^n+0+0}\leqslant\sqrt[n]{x^n+(x^2)^n+(\frac{1}{2}x^3)^n}\leqslant\sqrt[n]{x^n+x^n+x^n}$$

也就是说，当$0\leqslant x\leqslant 1$时，满足$y_n\leqslant\sqrt[n]{x^n+x^{2n}+\frac{1}{2^n}x^{3n}}\leqslant z_n$的$y_n$和$z_n$已经找到了。$y_n=\sqrt[n]{x^n+0+0}$，$z_n=\sqrt[n]{x^n+x^n+x^n}$。

现在计算$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}z_n$。

在算之前，先告诉大家三个常用的结论，这三个常用的结论不是只针对这道题而言的，而是通用的。

常用的结论 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n}=n$。

常用的结论 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=a$。

常用的结论 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

先计算$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$。

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+0+0}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n}$$

根据刚刚讲完的常用的结论 2 可知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n}=x$，所以

$$\lim_{n\to\infty}y_n=x$$

再计算$\lim\limits_{n\to\infty}z_n$。

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^n+x^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3x^n}$$

因为 $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3x^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\times\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n}$。

根据刚刚讲完的常用的结论 3 可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$；根据刚刚讲完的常用的结论 2 可知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n}=x$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\times\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n}=1\times x=x$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=x$。

由于当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$y_n\leqslant\sqrt[n]{x^n+x^{2n}+\frac{1}{2^n}x^{3n}}\leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=x$，所以根据夹逼定理可得

当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{2n}+\frac{1}{2^n}x^{3n}}=x$

情况 2：由于当$1<x<2$时，在$y=x$、$y=x^2$、$y=\frac{1}{2}x^3$这三者中$y=x^2$最大，所以有

$$\sqrt[n]{0+(x^2)^n+0}\leqslant\sqrt[n]{x^n+(x^2)^n+(\frac{1}{2}x^3)^n}\leqslant\sqrt[n]{(x^2)^n+(x^2)^n+(x^2)^n}$$

也就是说，当$1<x<2$时，满足$y_n<\sqrt[n]{x^n+x^{2n}+\frac{1}{2^n}x^{3n}}<z_n$的$y_n$和$z_n$已经找到了。$y_n=\sqrt[n]{0+(x^2)^n+0}$，$z_n=\sqrt[n]{(x^2)^n+(x^2)^n+(x^2)^n}$。

先计算$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$。

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{0+(x^2)^n+0}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(x^2)^n}$$

根据刚刚讲完的常用的结论 2 可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(x^2)^n}=x^2$，所以

$$\lim_{n\to\infty}y_n=x^2$$

再计算$\lim\limits_{n\to\infty}z_n$。

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(x^2)^n+(x^2)^n+(x^2)^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3(x^2)^n}$$

由于$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3(x^2)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\times\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(x^2)^n}$

根据刚刚讲完的常用的结论 3 可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$；根据刚刚讲完的常用的结论 2 可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(x^2)^n}=x^2$，所以

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\times\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(x^2)^n}=1\times x^2=x^2$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=x^2$。

由于当 $1<x<2$ 时，$y_n<\sqrt[n]{x^n+x^{2n}+\frac{1}{2^n}x^{3n}}<z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x^2$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=x^2$，所以根据夹逼定理可得

当 $1<x<2$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{2n}+\frac{1}{2^n}x^{3n}}=x^2$

情况 3：由于当 $2\leqslant x<+\infty$ 时，在 $y=x$、$y=x^2$、$y=\frac{1}{2}x^3$ 这三者中 $y=\frac{1}{2}x^3$ 最大，所以有

$$\sqrt[n]{0+0+(\frac{1}{2}x^3)^n}\leqslant\sqrt[n]{x^n+(x^2)^n+(\frac{1}{2}x^3)^n}\leqslant\sqrt[n]{(\frac{1}{2}x^3)^n+(\frac{1}{2}x^3)^n+(\frac{1}{2}x^3)^n}$$

也就是说，当 $2\leqslant x<+\infty$ 时，满足 $y_n<\sqrt[n]{x^n+x^{2n}+\frac{1}{2^n}x^{3n}}<z_n$ 的 y_n 和 z_n 经找到了。$y_n=\sqrt[n]{0+0+(\frac{1}{2}x^3)^n}$，$z_n=\sqrt[n]{(\frac{1}{2}x^3)^n+(\frac{1}{2}x^3)^n+(\frac{1}{2}x^3)^n}$。

先计算 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$。

$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{0+0+(\frac{1}{2}x^3)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{1}{2}x^3)^n}$

根据刚刚讲完的常用的结论 2 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{1}{2}x^3)^n}=\frac{1}{2}x^3$，所以

$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\frac{1}{2}x^3$

再计算 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$。

$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{1}{2}x^3)^n+(\frac{1}{2}x^3)^n+(\frac{1}{2}x^3)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3(\frac{1}{2}x^3)^n}$

由于 $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3(\frac{1}{2}x^3)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\times\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{1}{2}x^3)^n}$。

根据刚刚讲完的常用的结论 3 可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$；根据刚刚讲完的常用的结论 2 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{1}{2}x^3)^n}=\frac{1}{2}x^3$，所以

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\times\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{1}{2}x^3)^n}=1\times\frac{1}{2}x^3=\frac{1}{2}x^3$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\frac{1}{2}x^3$。

由于当 $2\leqslant x<+\infty$ 时，$y_n<\sqrt[n]{x^n+x^{2n}+\frac{1}{2^n}x^{3n}}<z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\frac{1}{2}x^3$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\frac{1}{2}x^3$，所以根据夹逼定理可得

当 $2\leqslant x<+\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{2n}+\frac{1}{2^n}x^{3n}}=\frac{1}{2}x^3$

综上所述有

$$f(x)\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2, & 1<x<2\\ \frac{1}{2}x^3, & 2\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

方法 2. 利用以 ±1 分段来做。

方法 2 用于求解“n 出现在指数位置并且不含根号的题”。当然，大前提得满足，也就是说此题应是一道“求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式”的题。

例. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$。

（1）若 $f(x)$ 处处连续，求 a,b 的值。

（2）若 (a,b) 不是求出的值时，$f(x)$ 有何间断点，并指出它的类型。

解： 首先看看本题是否属于“求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式”的题。

本题这两问虽然没有直接让“求 $f(x)$ 的表达式”，但是要想做出这两问，首先应知道 $f(x)$ 的表达式，所以本题属于“求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式”的题型。

那本题究竟是该用方法 1 做还是该用方法 2 做？方法 1 的适用条件是“用于求解 n 出现在指数位置并且含根号的题”，方法 2 的适用条件是“用于求解 n 出现在指数位置并且不含根号的题”。而本题，明显是 n 出现在指数位置并不含根号的题，所以本题应该用方法 2 来做。

方法 2 说的是以 ±1 分段，指的是分成五段（注意，不是说这道题，而是说方法 2），具体来说就是 $\begin{cases} x<-1 \\ x=-1 \\ -1<x<1 \\ x=1 \\ x>1 \end{cases}$。

第一段：当 $x<-1$ 时。

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}\overset{\text{分子分母同时除以}x^{2n}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2n-2}}\times a+\frac{1}{x^{2n-1}}\times b}{1+\frac{1}{x^{2n}}}$$

大家记住：每当用“以 ±1 分段法”做这种“n 出现在指数位置并且不含根号的题”做到这一步时，就不要去想任何曾经给大家讲过的极限计算方法了，而要按照如下的思路来做。

当 $x<-1$ 时，在 n 趋于 $+\infty$ 的情况下，x^{2n} 越来越接近 $+\infty$，所以 $\frac{1}{x^{2n}}$ 越来越接近 0。

当 $x<-1$ 时，在 n 趋于 $+\infty$ 的情况下，x^{2n-2} 越来越接近 $+\infty$，所以 $\frac{1}{x^{2n-2}}$ 越来越接近 0。

当 $x<-1$ 时，在 n 趋于 $+\infty$ 的情况下，x^{2n-1} 越来越接近 $+\infty$，所以 $\frac{1}{x^{2n-1}}$ 越来越接近 0。

所以有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2n-2}}\times a+\frac{1}{x^{2n-1}}\times b}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{\frac{1}{x}+0\times a+0\times b}{1+0}=\frac{1}{x}$$

所以，当 $x<-1$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}$。

第二段：当 $x=-1$ 时。

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n-1}+a(-1)^2+b(-1)}{(-1)^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1+a-b}{1+1}=\frac{1}{2}(a-b-1)$$

第三段：当 $-1<x<1$ 时。

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$$

当 $-1<x<1$ 时，在 n 趋于 $+\infty$ 的情况下，x^{2n} 越来越接近 0。当 $-1<x<1$ 时，在 n 趋于 $+\infty$ 的情况下，x^{2n-1} 越来越接近 0。

所以有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\frac{0+ax^2+bx}{0+1}=ax^2+bx$$

第四段：当 $x=1$ 时。

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{2n-1}+a\times1^2+b\times1}{1^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+b}{1+1}=\frac{1}{2}(a+b+1)$$

第五段：当 $x>1$ 时。

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}\overset{\text{分子分母同时除以}x^{2n}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2n-2}}\times a+\frac{1}{x^{2n-1}}\times b}{1+\frac{1}{x^{2n}}}$$

当 $x>1$ 时，在 n 趋于 $+\infty$ 的情况下，x^{2n} 越来越接近 $+\infty$，所以 $\dfrac{1}{x^{2n}}$ 越来越接近 0。

当 $x>1$ 时，在 n 趋于 $+\infty$ 的情况下，x^{2n-2} 越来越接近 $+\infty$，所以 $\dfrac{1}{x^{2n-2}}$ 越来越接近 0。

当 $x>1$ 时，在 n 趋于 $+\infty$ 的情况下，x^{2n-1} 越来越接近 $+\infty$，所以 $\dfrac{1}{x^{2n-1}}$ 越来越接近 0。

所以有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^{2n-2}}\times a+\dfrac{1}{x^{2n-1}}\times b}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=\frac{\dfrac{1}{x}+0\times a+0\times b}{1+0}=\frac{1}{x}$$

所以，当 $x>1$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$。

综合以上五段所述，有

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<-1\\ \dfrac{1}{2}(a-b-1), & x=-1\\ ax^2+bx, & -1<x<1\\ \dfrac{1}{2}(a+b+1), & x=1\\ \dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}$$

到目前为止，本题所涉及的本节的知识点已经彻底用完了。接下来看看本题所问的两个问题（特别注意：接下来就与本节的知识点无关了）。

（1）若 $f(x)$ 处处连续，求 a,b 的值。

已经求出了 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<-1\\ \dfrac{1}{2}(a-b-1), & x=-1\\ ax^2+bx, & -1<x<1\\ \dfrac{1}{2}(a+b+1), & x=1\\ \dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}$，第一问说 $f(x)$ 处处连续，而分段函数在非分段点处一定是连续的，这也就意味着本题所说的“$f(x)$ 处处连续”实际上只想告诉大家“函数 $f(x)$ 在点 $x=-1$ 和点 $x=1$ 处连续”。

由于函数 $f(x)$ 在点 $x=-1$ 处连续，根据“函数在某一点连续的定义”，有

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)$。

通过计算可知

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}(ax^2+bx)=a-b$$

$$f(-1)=\frac{1}{2}(a-b-1)$$

由此可以得到 $a-b=-1$。

由于函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续，根据“函数在某一点连续的定义”，有

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$。

通过计算可知

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(ax^2+bx)=a+b$$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x}=1$

$f(1)=\dfrac{1}{2}(a+b+1)$

由此可以得到 $a+b=1$。

由**函数 $f(x)$ 在点 $x=-1$ 处连续**得到了 $a-b=-1$，由**函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续**得到了 $a+b=1$。联立这两个方程，可得到方程组

$$\begin{cases}a-b=-1\\a+b=1\end{cases}$$

解得 $a=0,b=1$。

（2）若 (a,b) 不是求出的值时，$f(x)$ 有何间断点，并指出它的类型。

第二问说"若 (a,b) 不是求出的值时"，而第一问求出了 $a=0,b=1$，也就是说第二问问的实际是"在不满足 $a=0,b=1$ 的前提下，$f(x)$ 有何间断点，并指出它的类型"。

情况 1：当 $a-b\neq-1$ 且 $a+b\neq1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=-1$、$x=1$ 处都是不连续的，也就是说函数 $f(x)$ 在 $x=-1$、$x=1$ 处都是间断的。并且这两个间断点都是第一类间断点，且是第一类间断点中的跳跃间断点。

情况 2：当 $a-b\neq-1$ 且 $a+b=1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处是不连续的，也就是说函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处是间断的。并且这个间断点是第一类间断点，且是第一类间断点中的跳跃间断点。

对于这第二问来说，"$a-b\neq-1$ 且 $a+b=1$"其实和"$a+b=1$"是同一个意思（因为第二问的前提是"在不满足 $a=0,b=1$ 的前提下"，既然是在这个前提下，那么 $a+b=1$ 必然能推出 $a-b\neq-1$）。

所以刚刚说的"当 $a-b\neq-1$ 且 $a+b=1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处是不连续的，也就是说函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处是间断的。并且这个间断点是第一类间断点，且是第一类间断点中的跳跃间断点"可以改为"当 $a+b=1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处是不连续的，也就是说函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处是间断的。并且这个间断点是第一类间断点，且是第一类间断点中的跳跃间断点"。

情况 3：当 $a+b\neq1$ 且 $a-b=-1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是不连续的，也就是说函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是间断的。并且这个间断点是第一类间断点，且是第一类间断点中的跳跃间断点。

对于这第二问来说，"$a+b\neq1$ 且 $a-b=-1$"其实和"$a-b=-1$"是同一个意思（因为第二问的前提是"在不满足 $a=0,b=1$ 的前提下"，既然是在这个前提下，那么 $a-b=-1$ 必然能推出 $a+b\neq1$）。

所以刚刚说的"当 $a+b\neq1$ 且 $a-b=-1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是不连续的，也就是说函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是间断的。并且这个间断点是第一类间断点，且是第一类间断点中的跳跃间断点"可以改为"当 $a-b=-1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是不连续的，也就是说函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是间断的。并且这个间断点是第一类间断点，且是第一类间断点中的跳跃间断点"。

方法 3. 将数列极限转化为函数极限来做。

方法 3 用于求解"不满足方法 1 和方法 2 的适用条件的题"。当然，大前提得满足，也就是说此题应是一道"求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式"的题。

例. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，求函数 $f(x)$ 的间断点。

解： 首先看看本题是否属于"求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式"的题。

本题虽然没有直接让"求 $f(x)$ 的表达式"，但是要想求出间断点，首先应知道 $f(x)$ 的表达式，所以本题属于"求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式"的题型。

本题究竟是该用方法 1、方法 2、方法 3 中的哪种来做呢？方法 1 的适用条件是"用于求解 n 出现在指数位置并且含根号的题"，方法 2 的适用条件是"用于求解 n 出现在指数位置并且不含根号的题"。而本题，n 根本没有出现在指数位置，所以本题既不满足方法 1 的适用条件，也不满足方法 2 的适用条件，本题应该用方法 3 来做。

方法 3 说的是"将数列极限转化为函数极限来做"，那么就把所有的 n 换成 x。但是，题中本身就有 x，那就把 x 换成 a。

由 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$ 可得 $f(a)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)a}{xa^2+1}$。现在已经是一道函数的极限计算题了，那么应该用本章给大家讲的函数极限的计算方法来做。

有的同学这样做：

由第一类洛必达法则可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)a}{xa^2+1}\overset{?}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a}{a^2}=\dfrac{1}{a}$，由于 $\dfrac{1}{a}$ 是常数，属于"常数或 ∞"，所以将"$\overset{?}{=}$"改为"$=$"，

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-1)a}{xa^2+1}=\frac{1}{a}$，也就是说 $f(a)=\frac{1}{a}$，所以 $f(x)=\frac{1}{x}$。

这种做法对吗？不对！因为这种做法根本没有考虑 $a=0$ 的情况，所以不对！

正确的做法应该如下。

情况 1：当 $a=0$ 时。

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-1)a}{xa^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}0=0$

$f(a)=0$，所以 $f(x)=0$。

情况 2：当 $a\neq0$ 时。

由第一类洛必达法则可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-1)a}{xa^2+1}\overset{?}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a}{a^2}=\frac{1}{a}$，由于 $\frac{1}{a}$ 是常数，属于"常数或 ∞"，所以将"$\overset{?}{=}$"改为"="，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-1)a}{xa^2+1}=\frac{1}{a}$，也就是说 $f(a)=\frac{1}{a}$，所以 $f(x)=\frac{1}{x}$。

综上所述有

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

从这之后，已经不涉及本节的知识点了。接下来求间断点。

这道题既然让求间断点，则说明肯定有间断点。由于分段函数在非分段点处一定是连续的，而本题只有一个分段点 $x=0$，所以不用算就可以知道 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点。

当然，这属于有点投机取巧的做法，正常来说，应该算一下。

由于 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，所以 $f(0)=0$。

而由画图法可知，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$。

$\lim\limits_{x\to0}f(x)\neq f(0)$，所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点，并且 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的无穷间断点。

1.11　函数极限的保号性

本节要给大家讲的是函数极限的保号性，保号性是函数极限的一个很重要的性质，大家务必要重视。

1.11.1　趋于无穷型的函数极限的保号性

趋于无穷型的函数极限的保号性：

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)>\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$，那么必存在一个正数 X，使得当 $x>X$ 时，有 $f(x)>g(x)$。

如果 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)>\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$，那么必存在一个正数 X，使得当 $x<-X$ 时，有 $f(x)>g(x)$。

如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)>\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$，那么必存在一个正数 X，使得当 $|x|>X$ 时，有 $f(x)>g(x)$。

保号性的实质就是通过极限值的大小推出函数值的大小。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}+2)$，并比较两者的大小，最后请根据保号性推出一个结论。

解： 本题一共有三问，第一问让计算，第二问让比大小，第三问让通过保号性推结论。

先来看第一问，即计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}+2)$。

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$，　$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}+2)=2$。

再来看第二问，即比较 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}+2)$。

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}+2)=2$，而 $2>0$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}+2)>\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$。

最后来看第三问，即利用保号性看看能推出什么结论。

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}+2)>\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$，所以根据“趋于无穷型的函数极限的保号性”可知：存在正数 X，使得当 $x>X$ 时，有 $(\frac{1}{x}+2)>\frac{1}{x}$。

例. 已知 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)>0$，请根据保号性推出一个结论。

解： 所谓保号性，指的是通过两个极限值的大小来推出两个函数值的大小，可本题只有一个极限，那怎么办？做法如下。

题中说 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)>0$，由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}0=0$，所以有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)>\lim\limits_{x\to-\infty}0$。把一个常数转换为极限的形式，这样就有了两个极限，就可以用保号性了。

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)>\lim\limits_{x\to-\infty}0$，所以根据“趋于无穷型的函数极限的保号性”可知：存在正数 X，使得当 $x<-X$ 时，有 $f(x)>0$。

例. 已知 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，请根据保号性推出一个结论。

解： 所谓保号性，指的是通过两个极限值的大小来推两个函数值的大小，可本题只有一个极限，而且还没有大于号、小于号，那怎么办？做法如下。

题中说 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$=0，由于 $0>-1$，所以有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)>-1$。又由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}(-1)=-1$，所以有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)>\lim\limits_{x\to-\infty}(-1)$。

把“等于一个常数”改写为“大于一个常数”，然后又把常数转换为极限的形式，这样就有了两个极限，且有大于号、小于号，就可以用保号性了。

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)>\lim\limits_{x\to-\infty}(-1)$，所以根据“趋于无穷型的函数极限的保号性”可知：存在正数 X，使得当 $x<-X$ 时，有 $f(x)>-1$。

1.11.2 趋于无穷型的函数极限的保号性的推论

“保号性的推论”与“保号性”的不同之处就在于，“保号性”是利用两个极限值的大小来推两个函数值的大小，而“保号性的推论”恰恰相反，它是由两个函数值的大小来推两个极限值的大小。

趋于无穷型的函数极限的保号性的推论：

如果存在一个正数 X，使得当 $x>X$ 时，有 $\underline{f(x)\geqslant g(x)}$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$、$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ 均存在，那么必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\geqslant\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$。

如果存在一个正数 X，使得当 $x<-X$ 时，有 $\underline{f(x)\geqslant g(x)}$，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$、$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ 均存在，那么必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\geqslant\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$。

如果存在一个正数 X，使得当 $|x|>X$ 时，有 $\underline{f(x)\geqslant g(x)}$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$、$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 均存在，那么必有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\geqslant\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$。

例. 已知存在一个数10000，当 $x>10000$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\geqslant\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$。请判断上述结论是否正确。

解： 有的同学一看就说正确，是根据保号性的推论。可是实际上，本题的结论是完全错误的，那么到底错在哪里了呢？大家对比一下“保号性的推论”和“本题给出的结论”，就会发现：本题没有说 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$、$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ 存在。如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$、$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ 这两者有其中一个不存在或都不存在，那如何比大小？所以本题所给的结论是错误的。

例. 已知存在一个数10000，当 $x>10000$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)>\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$。请判断上述结论是否正确。

解： 有的同学一看就说正确，是根据保号性的推论。可是实际上，本题的结论是完全错误的，那么到底错在哪里了呢？大家对比一下“保号性的推论”和“本题给出的结论”，就会发现：保号性的推论是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\geqslant\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$，而本题的结论是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)>\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$。也就是说，本题所给的结论比保号性的推论中所给的结论少了一个“等于号”，所以本题所给的结论是错误的。

在“趋于无穷型的函数极限的保号性的推论”的三条结论的每条结论中“$f(x)\geqslant g(x)$”下面都加了下划线。现在要告诉大家的是：**如果其他条件不变，把加下划线的“$f(x)\geqslant g(x)$”改为“$f(x)>g(x)$”，那么最后的结论依然成立，也就是说，最后的结论依然是“$\geqslant$”。**

1.11.3　趋于定点型的函数极限的保号性

趋于定点型的函数极限的保号性：

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)$，那么必存在一个 x_0 的右去心邻域，使得当 x 在此邻域内取值时，有 $f(x) > g(x)$。

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)$，那么必存在一个 x_0 的左去心邻域，使得当 x 在此邻域内取值时，有 $f(x) > g(x)$。

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$，那么必存在一个 x_0 的去心邻域，使得当 x 在此邻域内取值时，有 $f(x) > g(x)$。

定点型的保号性与无穷型的保号性一样，都是通过极限值的大小推函数值的大小。

a 的去心邻域指：$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$。

例. 请计算 $\lim\limits_{x\to 2} 2x$ 和 $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)$，并比较两者的大小，最后请根据保号性推出一个结论。

解： 本题一共有三问，第一问让计算，第二问让比大小，第三问让通过保号性推结论。

先来看第一问，也就是计算 $\lim\limits_{x\to 2} 2x$ 和 $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)$。

由代入法可知 $\lim\limits_{x\to 2} 2x = 4$，$\lim\limits_{x\to 2}(2x+3) = 7$。

再来看第二问，也就是比较 $\lim\limits_{x\to 2} 2x$ 和 $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)$。

由于 $\lim\limits_{x\to 2} 2x = 4$，$\lim\limits_{x\to 2}(2x+3) = 7$，而 $7 > 4$，所以 $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3) > \lim\limits_{x\to 2} 2x$。

最后来看第三问，也就是利用保号性看看能推出什么结论。

由于 $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3) > \lim\limits_{x\to 2} 2x$，所以根据“趋于定点型的函数极限的保号性”可知：必存在一个 2 的去心邻域，使得当 x 在此邻域内取值时，有 $2x+3 > 2x$。

例. 已知 $\lim\limits_{x\to 3} f(x) > 0$，请根据保号性推出一个结论。

解： 所谓保号性，指的是通过两个极限值的大小来推两个函数值的大小，可本题只有一个极限，那怎么办？做法如下。

题中说 $\lim\limits_{x\to 3} f(x) > 0$，由于 $\lim\limits_{x\to 3} 0 = 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 3} f(x) > \lim\limits_{x\to 3} 0$。把一个常数转换为极限的形式，这样就有了两个极限，就可以用保号性了。

由于 $\lim\limits_{x\to 3} f(x) > \lim\limits_{x\to 3} 0$，所以根据“趋于定点型的函数极限的保号性”可知：必存在一个 3 的去心邻域，使得当 x 在此邻域内取值时，有 $f(x) > 0$。

例. 已知 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$，请根据保号性推出一个结论。

解： 所谓保号性，指的是通过两个极限值的大小来推两个函数值的大小，可本题只有一个极限，而且还没有大于号、小于号，那怎么办？做法如下。

题中说 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$，由于 $0 > -1$，所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) > -1$。又由于 $\lim\limits_{x\to 1}(-1) = -1$，所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) > \lim\limits_{x\to 1}$（$-1$）。

把“等于一个常数”改写为“大于一个常数”，然后又把常数转换为极限的形式，这样就有了两个极限，且有了大于号、小于号，就可以用保号性了。

由于 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) > \lim\limits_{x\to 1} -1$，所以根据“趋于定点型的函数极限的保号性”可知：必存在一个 1 的去心邻域，使得当 x 在此邻域内取值时，有 $f(x) > -1$。

1.11.4 趋于定点型的函数极限的保号性的推论

趋于定点型的函数极限的保号性的推论：

如果存在一个 x_0 的左去心邻域，使得当 x 在此邻域内取值时，有 $\underline{f(x) \geqslant g(x)}$，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)$ 均存在，那么必有 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)$。

如果存在一个 x_0 的右去心邻域，使得当 x 在此邻域内取值时，有 $\underline{f(x) \geqslant g(x)}$，且 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)$ 均存在，那么必有 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)$。

如果存在一个 x_0 的去心邻域，使得当 x 在此邻域内取值时，有 $f(x) \geqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 均存在，那么必有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$。

例. 已知存在一个 3 的去心邻域，当 x 在此去心邻域内取值时，$f(x) \geqslant g(x)$。则有 $\lim\limits_{x\to3} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to3} g(x)$。请判断上述结论是否正确。

解： 有的同学一看就说正确，是根据保号性的推论。可是实际上，本题的结论是完全错误的，那么到底错在哪里了呢？大家对比一下“保号性的推论”和“本题给出的结论”，就会发现，本题根本没有说 $\lim\limits_{x\to3} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to3} g(x)$ 存在。如果 $\lim\limits_{x\to3} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to3} g(x)$ 这两者中有一个不存在或者都不存在，则不能比较大小，所以本题所给的结论是错误的。

例. 已知存在一个 2 的去心邻域，当 x 在此去心邻域内取值时，$f(x) \geqslant g(x)$，则有 $\lim\limits_{x\to2} f(x) > \lim\limits_{x\to2} g(x)$。请判断上述结论是否正确。

解： 有的同学一看就说正确，是根据保号性的推论。可是实际上，本题的结论是完全错误的，那么到底错在哪里了呢？大家对比一下“保号性的推论”和“本题给出的结论”，就会发现，保号性的推论是 $\lim\limits_{x\to2} g(x)$ 、$\lim\limits_{x\to2} f(x)$，而本题的结论是 $\lim\limits_{x\to2} g(x)$ 、$\lim\limits_{x\to2} f(x)$。也就是说，本题所给的结论比保号性的推论少了一个“等于号”，所以本题所给的结论是错误的。

在“趋于定点型的函数极限的保号性的推论”中三条结论的每条结论中的“$f(x) \geqslant g(x)$”下面都加了下划线。要告诉大家的是：**如果其他条件不变，把加下划线的“$f(x) \geqslant g(x)$”改为“$f(x) > g(x)$”，那么最后的结论依然成立，也就是说，最后的结论依然是“$\geqslant$”。**

例. 下列命题中正确的是

（A）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \Rightarrow \exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x) \geqslant g(x)$

（B）若 $\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A_0, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B_0$ 均 $\exists$，则 $A_0>B_0$

（C）若 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

（D）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \Rightarrow \exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>g(x)$

解： 本题有个特点，就是比较抽象，好多数学符号。

先来看（A）选项。

（A）选项可解释为：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$，那么能推出存在一个 x_0 的去心邻域，当 x 在此去心邻域内取值时，有 $f(x) \geqslant g(x)$。

（A）选项说的是利用极限值的大小推函数值的大小，所以很容易就能想到趋于定点型的保号性。即

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$，那么必存在一个 x_0 的去心邻域，使得当 x 在此邻域内取值时，有 $f(x)>g(x)$。

一对比就会发现，（A）选项是错误的，因为（A）选项多了等于号。

再来看（B）选项。

（B）选项可解释为：若存在一个 x_0 的去心邻域，当 x 在此去心邻域内取值时，有 $f(x)>g(x)$，并且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 这两者均存在，那么能推出 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$。

（B）选项说的是利用函数值的大小推极限值的大小，所以很容易就能想到趋于定点型的保号性的推论。即

如果存在一个 x_0 的去心邻域，使得当 x 在此邻域内取值时，有 $\underline{f(x) \geqslant g(x)}$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 均存在，那么必有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$。

一对比就会发现，（B）选项是错误的，因为（B）选项最终的结论少了等于号。

再来看（C）选项。

（C）选项可解释为：若存在一个 x_0 的去心邻域，当 x 在此去心邻域内取值时，有 $f(x)>g(x)$，那么能推出 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$。

（C）选项说的是利用函数值的大小推极限值的大小，所以很容易就能想到趋于定点型的保号性的推论。即

如果存在一个 x_0 的去心邻域，使得当 x 在此邻域内取值时，有 $\underline{f(x) \geqslant g(x)}$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 均存在，那么必有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$。

一对比就会发现，（C）选项是错误的，因为（C）选项没有说“$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 均存在”。

最后来看（D）选项。

（D）选项要解释为：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$，那么能推出存在一个 x_0 的去心邻域，当 x 在此去心邻域内取值

时，有 $f(x)>g(x)$。

（D）选项说的是利用极限值的大小推函数值的大小，所以很容易就能想到趋于定点型的保号性。即如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$，那么必存在一个 x_0 的去心邻域，使得当 x 在此邻域内取值时，有 $f(x)>g(x)$。

一对比就会发现，（D）选项是正确的。

综上所述，本题应该选择（D）选项。

1.12　函数极限与数列极限的相互转化

1.12.1 函数极限转化为数列极限

在考研数学中，当遇到以下两种情况时，就需要将函数极限转化为数列极限来做。

第一种情况：让证明某个函数的极限不存在。

例. 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在。

解： 本题让证明某个函数的极限不存在，所以需要将函数极限转化为数列极限来做。那么，究竟怎样“转化”呢？需要造**两个**（注意是两个）数列：x_n、y_n。

这两个数列必须满足：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=$ 题中 x 趋于的值，$\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=$ 题中 x 趋于的值。

针对本题来说，由于是“$x\to 0$”，所以造的数列 x_n、y_n 必须要满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0,\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$。但是即便如此，仍然是有无数种造法，如 $x_n=\dfrac{1}{n}$、$x_n=\dfrac{1}{n^2}$、$x_n=\dfrac{1}{n^3}$ 等，那么到底应该将这两个数列造成什么样呢？

由于本题是 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$，所以当造完这两个数列后，需要计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\dfrac{1}{x_n}$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\dfrac{1}{y_n}$ 这两个极限，若这两个极限值不相等，就说明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在。因此造的那两个数列既要满足“$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=$ 题中 x 趋于的值，$\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=$ 题中 x 趋于的值”，还要满足“好算”。

设造的两个数列分别是 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi},y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$。

先计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\dfrac{1}{x_n}$。

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\sin 2n\pi$$

$\sin 2n\pi$ 恒等于一个常数，即 0，所以

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\sin 2n\pi=\lim_{n\to+\infty}0=0$$

再计算一下 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\dfrac{1}{y_n}$。

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{y_n}=\lim_{n\to+\infty}\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})$$

$\sin(2n\pi+\dfrac{\pi}{2})$ 恒等于一个常数，即 1，所以

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{y_n}=\lim_{n\to+\infty}\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=\lim_{n\to+\infty}1=1$$

由于这两个极限不相等，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ **不存在。**

第二种情况：证明某个函数在某个区间内无界。

先复习一下“有界”。

所谓“函数 $f(x)$ 在某个区间内有上界”，指的是：设函数 $f(x)$ 在某个区间上有定义，如果能找出一个数 M，使得当函数 $f(x)$ 在该区间内的所有函数值都小于等于 M，则称函数 $f(x)$ 在该区间有上界 M。

如果某函数在某区间有上界，那么该函数在该区间肯定是有无数个上界，而不可能只有一个上界。例如，函数 $f(x)$ 在某区间有上界 1，那么所有大于 1 的数必然都是函数 $f(x)$ 在该区间的上界。

大家还要注意一点，若某函数在某区间的上界是 1，并不能证明该函数在该区间的函数值中一定有 1。1 完全可以取不到，只要该函数在该区间中的所有函数值都小于等于 1，那么 1 就是上界。这也是“上界”和“最大值”的区别，若一个函数在某区间的最大值是 1，则意味着该函数在该区间的函数值中一定有 1，而“上界”并非如此。

所谓“函数 $f(x)$ 在某个区间内有下界”，指的是：设函数 $f(x)$ 在某个区间上有定义，如果能找出一个数 m，使得当函数 $f(x)$ 在该区间内的所有函数值都大于等于 m，则称函数 $f(x)$ 在该区间有下界 m。

如果某函数在某区间有下界，那么该函数在该区间肯定是有无数个下界，而不可能只有一个下界。例如，函数 $f(x)$ 在某区间有下界 1，那么所有小于 1 的数必然都是函数 $f(x)$ 在该区间的下界。

大家还要注意一点，若某函数在某区间的下界是 1，并不能证明该函数在该区间的函数值中一定有 1。1 完全可以取不到，只要该函数在该区间中的所有函数值都大于等于 1，那么 1 就是下界。这也是“下界”和“最小值”的区别，若一个函数在某区间的最小值是 1，则意味着该函数在该区间的函数值中一定有 1，而“下界”并非如此。

如果一个函数在某区间既有上界又有下界，那么称这个函数在该区间有界。

下面介绍“无界”。

所谓“函数 $f(x)$ 在某个区间内无上界”，指的是：设函数 $f(x)$ 在某个区间上有定义，现在找一个数 M，如果不管找的这个 M 多大，在该区间上总有函数值使得 $f(x)>M$，则称函数 $f(x)$ 在该区间无上界。

所谓“函数 $f(x)$ 在某个区间内无下界”，指的是：设函数 $f(x)$ 在某个区间上有定义，现在找一个数 m，如果不管找的这个 m 多小，在该区间上总有函数值使得 $f(x)<m$，则称函数 $f(x)$ 在该区间无下界。

如果一个函数在某区间有下界但无上界，或者有上界但无下界，或者既无上界又无下界，那么称这个函数在该区间无界。

结论 1. 大区间有界可以推出小区间有界。

结论 2. 小区间无界可以推出大区间无界。

结论 1 的解释：如果某函数在区间 I 上有界，而区间 II 完完全全在区间 I 之内，那么该函数肯定在区间 II 上也有界。

结论 2 的解释：如果某函数在区间 I 上无界，而区间 II 完完全全把区间 I 包在里面，而且该函数在区间 II 上还有定义，那么该函数肯定在区间 II 上也是无界的。

“结论 2 的解释”中出现了“有定义”，**这是因为：某函数在某区间上无论有界还是无界，大前提都应是该函数在该区间有定义。如果该函数在该区间没定义，则该函数在该区间既不是有界的也不是无界的。**例如，函数 $f(x)=\ln x$ 在区间 $(-4,-2)$ 上就既不是有界的也不是无界的，因为该函数在区间 $(-4,-2)$ 上根本没有定义。

有的同学可能会问为何“结论 1 的解释”中没有强调“有定义”，那是因为结论 1 说大区间有界，这就意味着函数在大区间是有定义的，既然大区间有定义，小区间必然有定义，所以不用再强调了。

例. 已知函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有界，$c>a,d<b$，请问函数 $f(x)$ 在区间 (c,d) 上是否有界？

解： 由于 $c>a,d<b$，这就说明区间 (a,b) 把区间 (c,d) 完完全全包在了里面。又由于函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有界，所以根据刚刚讲完的结论 1 可知，函数 $f(x)$ 在区间 (c,d) 上有界。

例. 已知函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上无界，$c<a,d>b$，请问函数 $f(x)$ 在区间 (c,d) 上是否无界？

解： 由于 $c<a,d>b$，这就说明区间 (a,b) 完完全全被区间 (c,d) 包在了里面。又由于函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上无界，所以如果有“函数 $f(x)$ 在区间 (c,d) 上有定义”这一条件，那么根据刚刚讲完的结论 2 可知，函数 $f(x)$ 在区间 (c,d) 上无界。可是本题并没有说“函数 $f(x)$ 在区间 (c,d) 上有定义”，所以对于本题而言，并不知道函数 $f(x)$ 在区间 (c,d) 上是否无界。

接下来我要告诉大家 6 个结论，这 6 个结论的作用在于让大家可以通过计算极限来判断无界，一定要把它们背下来。

结论 1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$(或$+\infty$、$-\infty$)，则说明存在 x_0 的一个左去心邻域，在该邻域内函数 $f(x)$ 无界。

结论 2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$(或$+\infty$、$-\infty$)，则说明存在 x_0 的一个右去心邻域，在该邻域内函数 $f(x)$ 无界。

结论 3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$(或$+\infty$、$-\infty$)，则说明存在 x_0 的一个去心邻域，在该邻域内函数 $f(x)$ 无界。

结论 4. 若 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\infty$(或$+\infty$、$-\infty$)，则说明存在一个正数 X，当 $x<-X$ 时，函数 $f(x)$ 无界。

结论 5. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$(或$+\infty$、$-\infty$)，则说明存在一个正数 X，当 $x>X$ 时，函数 $f(x)$ 无界。

结论 6. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$(或$+\infty$、$-\infty$)，则说明存在一个正数 X，当 $x>X$ 或 $x<-X$ 时，函数 $f(x)$ 无界。

例. 由于 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x-2}=\infty$，所以说明存在 2 的一个去心邻域，在该邻域内函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ 无界。

例. 由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$，所以说明存在 0 的一个右去心邻域，在该邻域内函数 $f(x)=\ln x$ 无界。

例. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$，所以说明存在正数 X，当 $x>X$ 时，函数 $f(x)=\ln x$ 无界。

例. 设函数 $f(x)=(\ln x)(\tan x)\mathrm{e}^{\sin^2 x}$，问函数 $f(x)$ 是否无界。

解： 本题问函数 $f(x)$ 是否无界，但并没有指明“在哪个区间”，大家记住，以后凡是没有说在哪个区间的，指的就是整个定义域。

对于本题而言，定义域是“ $x>0$ 且 $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in$ 正整数 ”，所以本题的问题是函数 $f(x)$ 是否在区间“ $x>0$ 且 $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in$ 正整数 ” 上无界。

现在计算极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)$。

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[(\ln x(\tan x)\mathrm{e}^{\sin^2 x}]$

由代入法可知 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[(\ln x)\mathrm{e}^{\sin^2 x}]=\ln\dfrac{\pi}{2}\times\mathrm{e}^{\sin^2\frac{\pi}{2}}=\ln\dfrac{\pi}{2}\times\mathrm{e}$，而 $\ln\dfrac{\pi}{2}\times\mathrm{e}$ 很明显是一个非零常数，所以 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[(\ln x(\tan x)\mathrm{e}^{\sin^2 x}]$ 能拆为

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[(\ln x(\tan x)\mathrm{e}^{\sin^2 x}]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[(\ln x(\tan x)\mathrm{e}^{\sin^2 x}]\times\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=(\ln\dfrac{\pi}{2}\times\mathrm{e})\times\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$

由画图法可知 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=+\infty$，所以

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[(\ln x(\tan x)\mathrm{e}^{\sin^2 x}]=(\ln\dfrac{\pi}{2}\times\mathrm{e})\times\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=+\infty$

由于 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=+\infty$，所以说明存在 $\dfrac{\pi}{2}$ 的一个去心邻域，在这个邻域内函数 $f(x)$ 无界。

而此邻域完全在区间“ $x>0$ 且 $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in$ 正整数 ”之内，所以函数在区间“ $x>0$ 且 $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in$ 正整数 ” 上无界。

之前这几道证无界的题都是直接算的函数极限，并没转化成数列极限，这是怎么回事？

这是因为出的题都太简单，考研中根本不考这么简单的题。下面举个例子。

例. 请证明函数 $f(x)=x\sin x$ 在区间（ $-\infty,+\infty$ ）内无界。

解： 大家看了这道题以后，肯定让 x 趋于一个值，算 $f(x)$ 的极限，然后算出极限是 ∞，这就说明函数 $f(x)$ 在某区间无界。然后再根据“小区间无界 $\Rightarrow$ 大区间无界”，从而推出函数 $f(x)=x\sin x$ 在区间（ $-\infty,+\infty$ ）内无界。

思路是没有问题的，可问题的关键在于：让 x 趋于什么？如果让 x 趋于一个常数，可看出用代入法算出的极限值必是常数，因此只能让 x 趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$。如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 算出的值是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$(或$+\infty$、$-\infty$)，则说明存在一个正数 X，当 $x>X$ 时，函数 $f(x)$ 无界。然后再根据“小区间无界 $\Rightarrow$ 大区间无界”，推得函数 $f(x)=x\sin x$ 在区间（ $-\infty,+\infty$ ）内无界。

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x$

可这里函数极限计算的四种方法都没法用。**解决的方法是：此时应把函数极限转化成数列的极限，也就是说，要自己造数列，不过只造一个数列即可。造法一样，即造的这个数列 x_n 必须满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=$ 题中 x 趋于的值。造完数列以后，要计算数列的极限。如果算出的数列极限是 ∞(或者$+\infty$、$-\infty$)，则说明无界。**

针对本题来说，由于需要算的函数极限是 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\sin x$，所以当造完数列 x_n 之后，要算的数列的极限就是 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\sin x_n$。由于本题是 $x\to+\infty$，所以数列 x_n 必须满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$。

设造的数列是 $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$。

$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\sin x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(2n\pi+\frac{\pi}{2})\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})$

由于 $\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=1$，所以

$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\sin x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(2n\pi+\frac{\pi}{2})\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=\lim\limits_{n\to+\infty}(2n\pi+\frac{\pi}{2})\overset{\text{转化为函数极限来算}}{=}\lim\limits_{n\to+\infty}(2x\pi+\frac{\pi}{2})=+\infty$

已经算出了 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\sin x_n=+\infty$，这和算出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x=+\infty$ 的作用是一样的（注意：这里并没说 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x=+\infty$，只是说作用一样）。什么叫"作用一样"？也就是说，如果算出了 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x=+\infty$，则意味着存在一个正数 X，当 $x>X$ 时，函数 $f(x)$ 无界。"作用一样"指的是：现在算出了 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\sin x_n=+\infty$，也可说明存在一个正数 X，当 $x>X$ 时，函数 $f(x)$ 无界。

由于已经算出在区间 $(X,+\infty)$ 内 $f(x)$ 无界，根据"小区间无界 $\Rightarrow$ 大区间无界"，推得函数 $f(x)=x\sin x$ 在区间（$-\infty,+\infty$）内无界。

有的同学或许会问为何造数列的时候不造 $x_n=2n\pi$ 而是造 $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$？造 $x_n=2n\pi$ 也满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$，但是不能算出 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\sin x_n=+\infty$。

例. 请证明存在 0 的一个去心邻域，当 x 在该邻域内取值时，函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 无界。

解： 计算 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$，看结果是否为 ∞。

可是函数极限计算的四种方法都没法用，因此要转化成数列极限。由于此题是 $x\to0$，所以造的数列 x_n 必须要满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$。

设造的数列是 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，现在来算一下 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n^2}\sin\frac{1}{x_n}$。

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n^2}\sin\frac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}(2n\pi+\frac{\pi}{2})^2\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})$

由于 $\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=1$，所以

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n^2}\sin\frac{1}{x_n}&=\lim_{n\to+\infty}(2n\pi+\frac{\pi}{2})^2\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})\\
&=\lim_{n\to+\infty}(2n\pi+\frac{\pi}{2})^2\overset{\text{转化成函数极限来计算}}{=}\lim_{n\to+\infty}\sin(2x\pi+\frac{\pi}{2})\\
&=\lim_{n\to+\infty}(2x\pi+\frac{\pi}{2})\times\lim_{n\to+\infty}(2x\pi+\frac{\pi}{2})\\
&=(+\infty)\times(+\infty)\\
&=+\infty
\end{aligned}
$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n^2}\sin\frac{1}{x_n}=+\infty$，所以这和 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}=+\infty$ 的作用是一样的。也就是说，可以当成是 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}=+\infty$，那么就有这样的结论成立：存在 0 的一个去心邻域，当 x 在该邻域内取值时，函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 无界。

1.12.2 数列极限转化为函数极限

在考研数学中，当遇到以下两种情况时，就需要将函数极限转化为数列极限来做。

第一种情况：当给定的那道数列极限的计算题不满足三种数列极限计算方法（单调有界法、积分和式法、夹逼定理法）的适用条件时。

其实这根本不是新知识点，之前讲过，当给定的那道数列极限的计算题不满足三种数列极限计算方法（单调有界法、积分和式法、夹逼定理法）的适用条件时，就要把数列极限转化为函数极限来做（当然，如果该题是以数列极限形式给出的 $f(x)$ 然后让求 $f(x)$ 的表达式，则按照之前讲过的特定的方法求解）。

例. 已知数列 $x_n=\dfrac{2n+3}{2n-3}$，请计算 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解： 本题既没有给数列的递推公式，也不含 Σ、Π 符号，本题不满足三种数列极限计算方法（单调有界法、积分和式法、夹逼定理法）的适用条件，而且本题也不是以数列极限形式给出的 $f(x)$ 然后让求 $f(x)$ 的表达式的题，所以本题应该将数列极限转换为函数极限来做。即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{2x-3}\overset{?}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2}=1$$

由于最后的计算结果是 1，1 是常数，属于“常数或 ∞”，所以将上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“=”，有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1$$

第二种情况：当题中没有给出数列 x_n 的通项公式（也就是说，题中并没有给出 $x_n=f(n)$），让求 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 时。

例. 设 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$，$x_1>0$。

（1）求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_nx_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}$。

解：先来做第一问，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

由于本题给出了数列 x_n 的递推公式，所以应该用单调有界法来做。

先证明有界。

对于本题来说，采用“用眼睛把界直接看出来”的方法证有界最合适，即由于 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$，且 $x_1>0$，所以可看出这个数列的每一项都是大于 0 的（因为 $\ln 1=0$，而 $y=\ln x$ 是增函数）。因此，本题所给的数列有下界 0。也就是说，虽然这个数列有无穷多项（凡是让求极限的数列都是有无穷多项），但是这无穷多项中的每一项都不可能小于等于 0。

现在我们证明单调。

按照之前给大家总结的方法，由于 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$，所以取函数 $y=\ln(1+x)$，现在要证明此函数在刚刚证完的界 $(0,+\infty)$ 内是单调递增的。因为，只有函数 $y=\ln(1+x)$ 在界 $(0,+\infty)$ 内是单调递增的，才能说明数列单调。至于数列是单调递增还是单调递减的，需要再比较 x_2 和 x_1。

不用求导证明函数 $y=\ln(1+x)$ 的单调递增，一眼就能看出来函数 $y=\ln(1+x)$ 是单调递增的（也就是函数值随着自变量的增大而增大）。

由于 $y=\ln(1+x)$ 在界 $(0,+\infty)$ 是单调递增的，所以说明该数列具有单调性。

再来看看该数列是单调递增的还是单调递减的。由于 $x_1>0$，所以可设 $x_1=1$。根据递推公式 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$ 可知

$$x_2=\ln(1+1)=\ln 2$$

因为 $\ln 2$ 是小于1的，所以 $x_2<x_1$。

由于刚刚已经证明了数列具有单调性，并且 $x_2<x_1$，所以该数列是单调递减的。

综上所述，由于本题所给的数列单调递减并且有下界（下界是 0），所以该数列的极限存在。

计算数列的极限只需在题中所给的递推公式两侧同时取极限“$\lim\limits_{n\to\infty}$”即可。所以有

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\ln(1+x_n)$$

对于任何一个数列来说，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\ln(1+x_n)$$

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则有

$$A=\lim_{n\to\infty}\ln(1+x_n) \qquad （1）式$$

像这种复合的就直接深入，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\ln(1+x_n)=\ln[\lim_{n\to\infty}(1+x_n)]=\ln[\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}x_n]=\ln(1+A) \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$A=\ln(1+A)$ （3）式

求解（3）式得 $A=0$。

所以本题的答案为 0。

现在来做第二问，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n x_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}$。

由于 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n x_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n\ln(1+x_n)}{x_n-\ln(1+x_n)}$。由此可看出“**题中并没有给出数列 x_n 的通项公式（也就是说，题中并没有给出 $x_n=f(n)$），让求 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$**”，所以应该将这个要计算的数列极限转化成函数极限来做。

先跟大家强调一点：接下来讲的并非是针对本题的，而是通用的。

用 x 替换 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 中的 x_n，那么 x 趋于什么？x 趋于“当 n 趋于 ∞ 时 x_n 所趋于的值”。

针对本题来说，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n\ln(1+x_n)}{x_n-\ln(1+x_n)}$ 就变成了 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}$。然后由于第一问已经算出了 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，说明“$n$ 趋于 ∞ 时 x_n 趋于 0”，所以将 $n\to\infty$ 改为 $x\to0$。因此，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n\ln(1+x_n)}{x_n-\ln(1+x_n)}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x-\ln(1+x)}\overset{?}{=}\lim_{x\to0}\frac{2x}{1-\frac{1}{1+x}}\overset{?}{=}\lim_{x\to0}\frac{2}{-\frac{-1}{(1+x)^2}}=\lim_{x\to0}\frac{2}{\frac{1}{(1+x)^2}}=\frac{2}{\frac{1}{(1+0)^2}}=2$$

由于最终的计算结果是 2，2 是常数，属于“常数或 ∞”，所以把上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“$=$”，有

$$\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}=2$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n\ln(1+x_n)}{x_n-\ln(1+x_n)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n\ln(1+x_n)}{x_n-\ln(1+x_n)}=2$$

第 2 章

导数与微分

2.1 可导的定义

一提到导数，大家可能会觉得特别熟悉，因为在上高中时就背过很多导数公式，比如 $(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$ 等。但是本节要给大家讲的并不是这些公式，而是最基本的东西，即可导的定义。

2.1.1 函数在某一点处可导的定义

函数在某一点处可导的定义如下：

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ 常数 A，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，并且函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数为 A，记作 $f'(x_0)=A$，或 $y'(x_0)=A$，或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=A$，或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=A$。

以上就是函数在某一点处可导的定义。从可导的定义可以很明显地看出，可导是通过极限来定义的。也就是说，如果某道题中让我们利用可导的定义来计算导数，那么只需要计算极限就可以了。

下面来看几道例题。

例. 已知函数 $y=2x^2$，请**用可导的定义**证明该函数在 $x=4$ 处可导，并计算出 $y'(4)$。

解： 如果本题改为“已知函数 $y=2x^2$，请证明该函数在 $x=4$ 处可导，并计算出 $y'(4)$”，那么其实最快的方法就是用公式法，即：由于 $y=2x^2$，$y'=4x$，所以 $y'(4)=4\times 4=16$。

但是很可惜，本题指定了方法，本题让大家利用可导的定义来证明该函数在 $x=4$ 处可导并计算出 $y'(4)$，所以必须用定义法而不能用公式法。

本题虽然有两问（第一问让证明可导，第二问让求出具体的数），但是实际上，这两问可以看成是一问。为什么呢？

大家想想可导的定义是什么？

若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ 常数 A，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，并且函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数为 A。

因此针对本题而言，就是要计算极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}$，如果计算出这个极限为一个常数，那么就意味着既证明了可导又求出了导数值，即两问可以看成是一问。

本题所给的函数 $f(x)$ 是 $f(x)=2x^2$，所以 $f(4+\Delta x)=2(4+\Delta x)^2$，$f(4)=2\times 4^2=32$，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(4+\Delta x)^2-32}{\Delta x} \qquad \text{（1）式}$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2(4+\Delta x)^2-32}{\Delta x}$ 可以化简为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(4+\Delta x)^2-32}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(16+8\Delta x+\Delta x^2)-32}{\Delta x} \qquad \text{（2）式}$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(16+8\Delta x+\Delta x^2)-32}{\Delta x} \qquad \text{（3）式}$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2(16+8\Delta x+\Delta x^2)-32}{\Delta x}$ 可以化简为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(16+8\Delta x+\Delta x^2)-32}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{32+16\Delta x+2\Delta x^2-32}{\Delta x}\qquad（4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{32+16\Delta x+2\Delta x^2-32}{\Delta x}\qquad（5）式$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{32+16\Delta x+2\Delta x^2-32}{\Delta x}$ 可以化简为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{32+16\Delta x+2\Delta x^2-32}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{16\Delta x+2\Delta x^2}{\Delta x}\qquad（6）式$$

（5）式、（6）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{16\Delta x+2\Delta x^2}{\Delta x}\qquad（7）式$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{16\Delta x+2\Delta x^2}{\Delta x}$ 可以化简为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{16\Delta x+2\Delta x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(16+2\Delta x)\qquad（8）式$$

（7）式、（8）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(16+2\Delta x)\qquad（9）式$$

根据极限的可拆性，可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}(16+2\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}16+\lim_{\Delta x\to 0}2\Delta x\qquad（10）式$$

（9）式、（10）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}16+\lim_{\Delta x\to 0}2\Delta x\qquad（11）式$$

由于常数极限永远等于它本身，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}16=16$，由代入法可知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}2\Delta x=2\times 0=0$，代入到（11）式中，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=16+0=16\qquad（12）式$$

由于最终算出的极限值是常数 16，所以说明函数 $y=2x^2$ 在 $x=4$ 处可导，并且 $y'(4)=16$。

例. 已知函数 $y=9\sin x$，请**用可导的定义**证明该函数在 $x=3$ 处可导，并计算出 $y'(3)$。

解： 如果本题改为"已知函数 $y=9\sin x$，请证明该函数在 $x=3$ 处可导，并计算出 $y'(3)$"，那么其实最快的方法就是用公式法，即由于 $y=9\sin x$，$y'=9\cos x$，所以 $y'(3)=9\cos 3$。

但是很可惜，本题指定了方法，本题让大家利用可导的定义来证明该函数在 $x=3$ 处可导并计算出 $y'(3)$，所以必须用定义法而不能用公式法。

同上一例题一样，本题虽然有两问，但是实际上，这两问可以看成是一问。

本题所给的函数 $f(x)$ 是 $f(x)=9\sin x$，所以 $f(3+\Delta x)=9\sin(3+\Delta x)$，$f(3)=9\sin 3$，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{9\sin(3+\Delta x)-9\sin 3}{\Delta x}\qquad（1）式$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{9\sin(3+\Delta x)-9\sin 3}{\Delta x}$ 可以化简为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{9\sin(3+\Delta x)-9\sin 3}{\Delta x}=9\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(3+\Delta x)-\sin 3}{\Delta x}\qquad（2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=9\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(3+\Delta x)-\sin 3}{\Delta x}\qquad（3）式$$

由代入法可知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\sin(3+\Delta x)-\sin 3]=\sin(3+0)-\sin 3=0$，所以可以对 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(3+\Delta x)-\sin 3}{\Delta x}$ 使用第一类洛必达法则。即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(3+\Delta x)-\sin 3}{\Delta x}\overset{?}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(3+\Delta x)}{1}\overset{代入法}{=}\frac{\cos(3+0)}{1}=\cos 3$$

由于计算结果是 $\cos 3$，$\cos 3$ 是常数，属于"常数或∞"，所以将上式中的"$\overset{?}{=}$"改为"="，所以有

$\dfrac{\sin(3+\Delta x)-\sin 3}{\Delta x}=\cos 3$

将 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(3+\Delta x)-\sin 3}{\Delta x}=\cos 3$ 代入（3）式，得

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=9\cos 3$　　（4）式

由于最终算出的极限值是常数 $9\cos 3$，说明函数 $y=9\sin x$ 在 $x=3$ 处可导，并且 $y'(3)=9\cos 3$。

例. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，请证明该函数在 $x=0$ 处可导，并求出 $f'(0)$。

解： 本题与前两道题的区别在于：前两道题如果没有指定用定义法，则完全可以用公式法来做。但本题不可以，本题研究的是一个分段函数在分段点处的可导性，请记住，研究分段函数在分段点处的可导性时没有公式，只能用定义法。

所以虽然本题没有指定用定义法，但是却只能用定义法。

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$　　（1）式

由于 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，所以 $f(0)=0$。把 $f(0)=0$ 代入（1）式，可得

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$　　（2）式

把 Δx 换成 x（当然也可以不换），有

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$　　（3）式

现在将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 中的 $f(x)$ 显化，因为 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，那么应该将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 中的 $f(x)$ 显化成哪段呢？

由于是 $x\to 0$，这说明 x 无限接近 0 但是不能等于 0，所以应该将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 中的 $f(x)$ 显化成 $\sin x$，有

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$　　（4）式

根据等价无穷小替换可得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}1=1$　　（5）式

（4）式、（5）式相结合，得

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=1$　　（6）式

由于最终算出的极限值是常数 1，所以说明函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，并且 $f'(0)=1$。

例. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，请问该函数在 $x=0$ 处可导吗？

解： 本题研究的是一个分段函数在分段点处的可导性，研究分段函数在分段点处的可导性时根本没有公式，只能用定义法。

所以虽然本题没有指定用定义法，但是却只能用定义法。

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$　　（1）式

由于 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，所以 $f(0)=0$。把 $f(0)=0$ 代入（1）式，可得

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$　　（2）式

把 Δx 换成 x（当然也可以不换），有

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$　　（3）式

现在将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 中的 $f(x)$ 显化，因为 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，那么应该将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 中的 $f(x)$ 显化成哪段呢？

由于是 $x \to 0$，这说明 x 无限接近 0 但是不能等于 0，所以应该将 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ 中的 $f(x)$ 显化成 $\cos x$，有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x} \qquad \text{（4）式}$$

由代入法可知 $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$， $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$，所以 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{x} = \infty$，所以有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \infty \qquad \text{（5）式}$$

由于最终算出的极限值是 ∞ 而不是常数，所以说明函数 $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处不可导。

相信大家已经掌握了“函数在某一点处可导的定义”，下面给大家讲一下“函数在某一点处可导的等价定义”。

函数在某一点处可导的等价定义如下：

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ = 常数 A，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，并且函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数为 A，记作 $f'(x_0)=A$，或 $y'(x_0)=A$，或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = A$，或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = A$。

以上就是“函数在某一点处可导的等价定义”。下面来看几道例题。

例. 已知函数 $y=2x^2$，请**用可导的等价定义**证明该函数在 $x=4$ 处可导，并计算出 $y'(4)$。

解： 本题之前做过，但用的是“可导的定义”做的，现在用“可导的等价定义”来做一下。

本题虽然有两问（第一问让证明可导，第二问让求出具体的数），但是实际上，这两问可以看成是一问。为什么呢？

大家想想可导的等价定义是什么？

若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ = 常数 A，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，并且函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数为 A。

因此针对本题而言，就是要计算极限 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$，如果计算出这个极限为一个常数，那么就意味着既证明了可导又求出了导数值，即两问可以看成是一问。

本题所给的函数 $f(x)$ 是 $f(x)=2x^2$，所以 $f(4)=2\times 4^2=32$，

$$\lim_{x \to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{2x^2-32}{x-4} \qquad \text{（1）式}$$

由第一类洛必达法则可得

$$\lim_{x \to 4} \frac{2x^2-32}{x-4} \overset{?}{=} \lim_{x \to 4} \frac{4x}{1} = \lim_{x \to 4} 4x = 4\times 4 = 16$$

由于计算结果为 16，16 是常数，属于“常数或 ∞”，所以将上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“=”，即

$$\lim_{x \to 4} \frac{2x^2-32}{x-4} = 16 \qquad \text{（2）式}$$

由于最终算出的极限值是常数 16，所以说明函数 $y=2x^2$ 在 $x=4$ 处可导，并且 $y'(4)=16$。

“函数在某一点处可导”不止有一个等价定义，它还有另一个等价定义。现在就来看一下“函数在某一点处可导的第二个等价定义”。

函数在某一点处可导的第二个等价定义如下：

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}$ = 常数 A，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，并且函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数为 A，记作 $f'(x_0)=A$，或 $y'(x_0)=A$，或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = A$，或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = A$。

注意：当 $\Delta x \to 0$ 时，从两侧都能趋于 0 的那个参数才能被当成上式中的“$\square$”。

以上就是“函数在某一点处可导的第二个等价定义”。

现在来对比一下“函数在某一点处可导的定义”与“函数在某一点处可导的第二个等价定义”。

函数在某一点处可导的定义：若极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ = 常数 A，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，并且函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数为 A。

函数在某一点处可导的第二个等价定义：若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}=$ 常数 A，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，并且函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数为 A 。

注意：当 $\Delta x\to 0$ 时，从两侧都能趋于 0 的那个参数才能被当成上式中的“$\square$”。

对比就会发现，“函数在某一点处可导的第二个等价定义”其实就是将“函数在某一点处可导的定义”中的“Δx”改为了“$\square$”而已。那么究竟什么才可以当成“$\square$”呢？上面已经说了，当 $\Delta x\to 0$ 时，从两侧都能趋于 0 的参数才能当成“$\square$”，可是这句话又是什么意思呢？难道仅仅是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\square=0$ 吗？并不是。那到底怎么理解呢？下面来看几道例题。

例. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的函数值为 $f(0)=0$，又已知 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}=$ 一个常数，请问函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导吗（也就是说 $f'(0)$ 存在吗）？

解： 由于 $f(0)=0$，所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h} \qquad （1）式$$

（1）式可以变为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h} \qquad （2）式$$

因为题中说

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}=\text{一个常数} \qquad （3）式$$

所以（2）式、（3）式相结合，得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}=\text{一个常数} \qquad （4）式$$

根据“函数在某一点处可导的第二个等价定义”可知，如果 $1-\cos h$ 在（4）式中可以被当成“$\square$”，那么就说明函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)$ 等于那个常数 。

那么现在就看看 $1-\cos h$ 在（4）式中是否可以被当成“$\square$”。即当 $h\to 0$ 时，$1-\cos h$ 是否能从两侧都趋于 0。这个知识点以前从没讲过，大家要看仔细了。

当 $h\to 0^+$ 时，如 h 取 0.1，0.01，0.001 这些数，$1-\cos h$ 肯定是越来越接近 0 的（因为 $\lim\limits_{h\to 0^+}(1-\cos h)=0$）。而且当 $h>0$ 时，$\cos h$ 肯定小于 1，所以当 $h>0$ 时，$1-\cos h$ 肯定大于 0，也就是说：当 $h\to 0^+$ 时，$1-\cos h$ 是从右侧趋于 0 的。

当 $h\to 0^-$ 时，如 h 取 -0.1，-0.01，-0.001 这些数，$1-\cos h$ 肯定是越来越接近 0 的（因为 $\lim\limits_{h\to 0^-}(1-\cos h)=0$）。而且当 $h<0$ 时，$\cos h$ 肯定小于 1，所以当 $h<0$ 时，$1-\cos h$ 肯定大于 0，也就是说：当 $h\to 0^-$ 时，$1-\cos h$ 也是从右侧趋于 0 的。

综上所述，无论“当 $h\to 0^+$ 时”还是“当 $h\to 0^-$ 时”，$1-\cos h$ 都只能从右侧趋于 0，而不能从左侧趋于 0，所以（4）式中的 $1-\cos h$ 不能被当成$\square$，因此并不能知道函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导。

例. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的函数值为 $f(0)=0$，又已知 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=$ 一个常数，请问函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导吗（也就是说 $f'(0)$ 存在吗）？

解： 由于 $f(0)=0$，所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h^2)-f(0)}{h^2} \qquad （1）式$$

（1）式可以变为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h^2)-f(0)}{h^2} \qquad （2）式$$

因为题中说

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=\text{一个常数} \qquad （3）式$$

所以（2）式、（3）式相结合，得

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0+h^2)-f(0)}{h^2}=$一个常数 （4）式

根据“函数在某一点处可导的第二个等价定义”可知，如果h^2在（4）式中可以被当成“□”，那么就说明函数$f(x)$在$x=0$处可导且$f'(0)$等于那个常数。

那么现在就看看h^2在（4）式中是否可以被当成“□”。即当$h\to0$时，h^2是否能从两侧都趋于0。

当$h\to0^+$时，h^2肯定是越来越接近0的（因为$\lim\limits_{h\to0^+}h^2=0$）。而且当$h>0$时，$h^2$肯定大于0，也就是说，当$h\to0^+$时，$h^2$是从右侧趋于0的。

当$h\to0^-$时，h^2肯定是越来越接近0的（因为$\lim\limits_{h\to0^+}h^2=0$）。而且当$h<0$时，$h^2$肯定大于0，也就是说，当$h\to0^-$时，$h^2$也是从右侧趋于0的。

综上所述，无论“当$h\to0^+$时”还是“当$h\to0^-$时”，h^2都只能从右侧趋于0，而不能从左侧趋于0，所以（4）式中的h^2不能被当成□，因此并不能知道函数$f(x)$在$x=0$处是否可导。

例. 已知函数$f(x)$在$x=0$处的函数值为$f(0)=0$，又已知$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\mathrm{e}^h)}{1-\mathrm{e}^h}=$一个常数，请问函数$f(x)$在$x=0$处可导吗（也就是说$f'(0)$存在吗）？

解： 由于$f(0)=0$，所以

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\mathrm{e}^h)}{1-\mathrm{e}^h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\mathrm{e}^h)-f(0)}{1-\mathrm{e}^h}$ （1）式

（1）式可以变为

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\mathrm{e}^h)}{1-\mathrm{e}^h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0+1-\mathrm{e}^h)-f(0)}{1-\mathrm{e}^h}$ （2）式

因为题中说

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\mathrm{e}^h)}{1-\mathrm{e}^h}=$一个常数 （3）式

所以（2）式、（3）式相结合，得

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0+1-e^h)-f(0)}{1-e^h}=$一个常数 （4）式

根据“函数在某一点处可导的第二个等价定义”可知，如果$1-\mathrm{e}^h$在（4）式中可以被当成“□”，那么就说明函数$f(x)$在$x=0$处可导且$f'(0)$等于那个常数。

那么现在就看看$1-\mathrm{e}^h$在（4）式中是否可以被当成“□”。即当$h\to0$时，$1-\mathrm{e}^h$是否能从两侧都趋于0。

当$h\to0^+$时，$1-\mathrm{e}^h$肯定是越来越接近0的（因为$\lim\limits_{h\to0^+}(1-\mathrm{e}^h)=0$）。而且当$h>0$时，$\mathrm{e}^h$大于1，$1-\mathrm{e}^h$小于0，也就是说，当$h\to0^+$时，$1-\mathrm{e}^h$是从左侧趋于0的。

当$h\to0^-$时，$1-\mathrm{e}^h$肯定是越来越接近0的（因为$\lim\limits_{h\to0^-}(1-\mathrm{e}^h)=0$）。而且当$h<0$时，$\mathrm{e}^h$小于1，$1-\mathrm{e}^h$大于0，也就是说：当$h\to0^-$时，$1-\mathrm{e}^h$是从右侧趋于0的。

综上所述，当$h\to0^+$时，$1-\mathrm{e}^h$是从左侧趋于0的；当$h\to0^-$时$1-\mathrm{e}^h$是从右侧趋于0的，所以（4）式中的$1-\mathrm{e}^h$可以被当成□，因此函数$f(x)$在$x=0$处是可导的并$f'(0)$等于那个常数。

2.1.2 函数在某一点处左/右可导的定义

如同极限有左极限与右极限之分、连续有左连续和右连续之分一样，可导也有左可导和右可导之分。那么左可导和右可导的定义又是什么呢？

函数在某一点处左/右可导的定义如下：

设函数$y=f(x)$在x_0的某左邻域内有定义，若极限$\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$常数$A$，则称函数$f(x)$在$x_0$处左可导，并且函数$f(x)$在$x_0$处的左导数为$A$，记作$f'_-(x_0)=A$或$y'_-(x_0)=A$。

设函数$y=f(x)$在x_0的某右邻域内有定义，若极限$\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$常数$A$，则称函数$f(x)$在$x_0$处右可导，并且函数$f(x)$在$x_0$处的右导数为$A$，记作$f'_+(x_0)=A$或$y'_+(x_0)=A$。

以上就是函数在某一点处左/右可导的定义。对比“函数在某一点处可导的定义”与“函数在某一点处的左/右可导

的定义”，可以明显看出：**如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，一定能推出函数 $f(x)$ 在 x_0 处左可导及函数 $f(x)$ 在 x_0 处右可导**（这是因为由 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ 常数A 一定可以推出 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ 常数A 、$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ 常数A ）。

下面来看几道例题。

例. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$，请问该函数在 $x=0$ 处左可导吗？在 $x=0$ 处右可导吗？在 $x=0$ 处可导吗？

解： 研究分段函数在分段点处的可导性时根本没有公式，只能用定义法，所以虽然本题没有指定用定义法，但是也只能利用定义法来做。

先来判断一下该函数在 $x=0$ 处是否左可导。

左可导的定义是什么？

若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ 常数 A，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处左可导，并且函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数为 A 。

那么对于本题而言，由于问的是该函数在 $x=0$ 处是否左可导，所以需要计算极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ 。

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} \qquad （1）式$$

由于 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$，$f(0)=1$，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x} \qquad （2）式$$

把 Δx 换成 x（当然也可以不换），有

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-1}{x} \qquad （3）式$$

现在需要将 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-1}{x}$ 中的 $f(x)$ 显化，而 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$，那么应该将 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-1}{x}$ 中的 $f(x)$ 显化成这三段中的哪段呢？

显然应该显化成 $\dfrac{\sin x}{x}$（因为是 $x\to 0^-$），所以有

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x} \qquad （4）式$$

现在来算一下极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}$。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}&=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\sin x}{x}-\frac{x}{x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\sin x-x}{x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x-x}{x^2}\\&\overset{?}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x-1}{2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0^-}x\\&=0\end{aligned}$$

由于最后的计算结果是 0，0 是常数，属于“常数或∞”，所以把上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“=”，所以有

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=0 \qquad （5）式$$

（4）式、（5）式相结合，得

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=0$　　　　（6）式

由于最终算出的极限值是常数 0，所以说明函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处左可导，并且 $y'_-(0)=0$ 。

再来判断一下该函数在 $x=0$ 处是否右可导。

右可导的定义是什么？

若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ 常数 A，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处右可导，并且函数 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数为 A 。

那么对于本题而言，由于问的是该函数在 $x=0$ 处是否右可导，所以需要计算极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ 。

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$　　　　（7）式

由于 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$，$f(0)=1$，所以

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}$　　　　（8）式

把 Δx 换成 x（当然也可以不换），有

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}$　　　　（9）式

现在需要将 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}$ 中的 $f(x)$ 显化，而 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$，那么应该将 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}$ 中的 $f(x)$ 显化成这三段中的哪段呢？

显然应该显化成 $\sin x$（因为是 $x\to 0^+$），所以有

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x-1}{x}$　　　　（10）式

现在来算一下极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x-1}{x}$ 。

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x-1}{x}=\infty$　　　　（11）式

（10）式、（11）式相结合，得

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\infty$　　　　（12）式

由于最终算出的极限值是 ∞ 而不是常数，所以说明函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处右不可导。

最后来判断一下该函数在 $x=0$ 处是否可导。

由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=0$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\infty$，这两者不相等，说明 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ 不存在，但不为 ∞，所以函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处不可导。

其实可以不用这么麻烦，大家记住：只有某函数在某个点处的左、右导数均存在且相等，才能推出该函数在该点处可导。而本题，右导数不存在，所以必然不可导。

例. 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导的充要条件为（　　）。

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在

解： 要想做出这道题，需要先给大家讲解一个很重要的知识点，然后再来看这道题。

这个很重要的知识点如下。

若某道题中已经明确告诉了函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\square=0$、$\lim\limits_{x\to 0}\Delta=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+\square)-f(a+\Delta)}{\square-\Delta}=f'(a)$。

针对这个知识点来练习几道题。

例. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导（意味着 $f'(0)$ 存在），请计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}$。

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0+1-\cos x)-f(0+0)}{(1-\cos x)-0}$　　（1）式

由于题中说函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并且 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=1-\cos 0=1-1=0$、$\lim\limits_{x\to 0}0=0$，则说明 $1-\cos x$ 可以当成 $\square$，0 可以当成 Δ，所以可知

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0+1-\cos x)-f(0+0)}{(1-\cos x)-0}=f'(0)$　　（2）式

（1）式、（2）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}=f'(0)$　　（3）式

例. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导（意味着 $f'(0)$ 存在），$f(0)=0$，请计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{1-\cos x}$。

解： 由于 $f(0)=0$，所以

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}$　　（1）式

下面就和之前那道题一模一样了，即

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0+1-\cos x)-f(0+0)}{(1-\cos x)-0}$　　（2）式

由于题中说函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并且 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=1-\cos 0=1-1=0$、$\lim\limits_{x\to 0}0=0$，则说明 $1-\cos x$ 可以当成 $\square$，0 可以当成 Δ，所以可知

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0+1-\cos x)-f(0+0)}{(1-\cos x)-0}=f'(0)$　　（3）式

（1）式、（3）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}=f'(0)$　　（4）式

（1）式、（4）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{1-\cos x}=f'(0)$　　（5）式

例. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导（意味着 $f'(0)$ 存在），$f(0)=0$，请计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{x^2}$。

解： 由于 $f(0)=0$，所以

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)-f(0)}{x^2}$　　（1）式

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)-f(0)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\times\dfrac{1-\cos x}{x^2}]$　　（2）式

（1）式、（2）式相结合，有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}[\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\times\frac{1-\cos x}{x^2}] \qquad （3）式$$

因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$，说明 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}$ 与 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ 这两者不可能是一个 0、一个 ∞，所以 $\lim\limits_{x\to0}[\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\times\frac{1-\cos x}{x^2}]$ 可以拆为

$$\lim_{x\to0}[\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\times\frac{1-\cos x}{x^2}]=\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\times\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} \qquad （4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\times\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} \qquad （5）式$$

而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x} \qquad （6）式$$

将（6）式变一下形，得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f(0+1-\cos x)-f(0+0)}{(1-\cos x)-0} \qquad （7）式$$

由于函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并且 $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)=1-\cos0=1-1=0$ 、$\lim\limits_{x\to0}0=0$，说明 $1-\cos x$ 可以当成$\square$，0 可以当成 Δ，所以根据刚刚讲完的那个很重要的知识点可知

$$\lim_{x\to0}\frac{f(0+1-\cos x)-f(0+0)}{(1-\cos x)-0}=f'(0) \qquad （8）式$$

（7）式、（8）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)}{x^2}=\frac{1}{2}f'(0) \qquad （9）式$$

下面来看刚才没有做的那道题。

例. 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导的充要条件为（　　）。

（A）$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在

（B）$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

（C）$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在

（D）$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在

解： 本题问的是“充要条件”。也就是说，既要判断“充分性”又要判断“必要性”。

先来判断一下这四个选项的“必要性”，也就是说，已知可导，看能不能推出极限存在。

先来看（A）选项满不满足“必要性”。

现在已知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导（也就是已知 $f'(0)$ 存在），看能不能推出 $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在。

由于 $f(0)=0$，所以

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{h^2} \qquad （1）式$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{h^2}=\lim_{h\to0}[\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\times\frac{1-\cos h}{h^2}] \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，有

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)}{h^2}=\lim_{h\to0}[\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\times\frac{1-\cos h}{h^2}] \qquad （3）式$$

由于 $\lim\limits_{h\to0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\frac{1}{2}$，说明 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}$ 、$\lim\limits_{h\to0}\frac{1-\cos h}{h^2}$ 这两者不可能一个是 0、一个是 ∞，所以说 $\lim\limits_{h\to0}[\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\times\frac{1-\cos h}{h^2}]$ 可以拆为

$$\lim_{h\to0}[\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\times\frac{1-\cos h}{h^2}]=\lim_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\times\lim_{h\to0}\frac{1-\cos h}{h^2}\qquad（4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\times\lim_{x\to0}\frac{1-\cos h}{h^2}\qquad（5）式$$

而 $\lim\limits_{h\to0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\frac{1}{2}$，所以

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)}{h^2}=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\qquad（6）式$$

将（6）式变一下形，得

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)}{h^2}=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(0+1-\cos h)-f(0+0)}{(1-\cos h)-0}\qquad（7）式$$

由于函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并且 $\lim\limits_{h\to0}(1-\cos h)=1-\cos0=1-1=0$ 、$\lim\limits_{h\to0}0=0$，说明 $1-\cos h$ 可以当成 $\square$ ，0 可以当成 Δ，所以根据刚刚讲完的那个很重要的知识点可知

$$\lim_{h\to0}\frac{f(0+1-\cos h)-f(0+0)}{(1-\cos h)-0}=f'(0)\qquad（8）式$$

（7）式、（8）式相结合，得

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)}{h^2}=\frac{1}{2}f'(0)\qquad（9）式$$

$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)}{h^2}$ 存在，所以说明（A）选项所说的这个极限存在是 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导的必要条件。

再来看（B）选项满不满足“必要性”。

现在已知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导（也就是已知 $f'(0)$ 存在），看能不能推出 $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在。

由于 $f(0)=0$，所以

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-e^h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1-e^h)-f(0)}{h}\qquad（10）式$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-e^h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}[\frac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\times\frac{1-e^h}{h}]\qquad（11）式$$

（10）式、（11）式相结合，有

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-e^h)}{h}=\lim_{h\to0}[\frac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\times\frac{1-e^h}{h}]\qquad（12）式$$

由于 $\lim\limits_{h\to0}\frac{1-e^h}{h}=-1$，说明 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}$ 、$\lim\limits_{h\to0}\frac{1-e^h}{h}$ 这两者不可能一个是 0、一个是 ∞，所以说明 $\lim\limits_{h\to0}[\frac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\times\frac{1-e^h}{h}]$ 可以拆为

$$\lim_{h\to0}[\frac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\times\frac{1-e^h}{h}]=\lim_{h\to0}\frac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\times\lim_{h\to0}\frac{1-e^h}{h}\qquad（13）式$$

（12）式、（13）式相结合，得

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-e^h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\times\lim_{h\to0}\frac{1-e^h}{h}\qquad（14）式$$

而 $\lim\limits_{h\to0}\frac{1-e^h}{h}=-1$，所以

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-e^h)}{h}=-\lim_{h\to0}\frac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\qquad（15）式$$

将（15）式变一下形，得

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-e^h)}{h}=-\lim_{h\to0}\frac{f(0+1-e^h)-f(0+0)}{(1-e^h)-0}\qquad（16）式$$

由于函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并且 $\lim\limits_{h\to0}(1-e^h)=1-e^0=1-1=0$ 、$\lim\limits_{h\to0}0=0$，说明 $1-e^h$ 可以当成 $\square$ ，0 可以当成 Δ，所以根据刚刚讲完的那个很重要的知识点可知

$$\lim_{h\to0}\frac{f(0+1-e^h)-f(0+0)}{(1-e^h)-0}=f'(0)\qquad（17）式$$

（16）式、（17）式相结合，得

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}=-f'(0)$ （18）式

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}$ 存在，所以说明（B）选项所说的这个极限存在是 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导的必要条件。

再来看（C）选项满不满足“必要性”。

现在已知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导（也就是已知 $f'(0)$ 存在），看能不能推出 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在。

由于 $f(0)=0$，所以

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)-f(0)}{h^2}$ （19）式

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)-f(0)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}[\dfrac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}\times\dfrac{h-\sin h}{h^2}]$ （20）式

（19）式、（20）式相结合，有

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}[\dfrac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}\times\dfrac{h-\sin h}{h^2}]$ （21）式

通过洛必达法则可以算出 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h-\sin h}{h^2}=0$ 。

将（21）式变一下形，得

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}[\dfrac{f(0+h-\sin h)-f(0+0)}{(h-\sin h)-0}\times\dfrac{h-\sin h}{h^2}]$ （22）式

由于函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并且 $\lim\limits_{h\to 0}(h-\sin h)=0-\sin 0=0-0=0$ 、$\lim\limits_{h\to 0}0=0$，说明 $h-\text{sinh}$ 可以当成□，0可以当成Δ，所以根据刚刚讲完的那个很重要的知识点可知

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h-\sin h)-f(0+0)}{(h-\sin h)-0}=f'(0)$ （23）式

由于 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h-\sin h}{h^2}=0$ 、$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h-\sin h)-f(0+0)}{(h-\sin h)-0}=f'(0)$，所以根据函数极限计算的第一种方法（基本计算方法）中的9个小技巧中的小技巧1可知

$\lim\limits_{h\to 0}[\dfrac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}\times\dfrac{h-\sin h}{h^2}]=f'(0)\times 0=0$ （24）式

（21）式、（24）式相结合，得

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=0$ （25）式

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}$ 存在，所以说明（C）选项所说的这个极限存在是 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导的必要条件。

再来看（D）选项满不满足“必要性”。

现在已知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导（也就是已知 $f'(0)$ 存在），看能不能推出 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在。

将 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[f(2h)-f(h)]}{h}$ 变一下形，得到

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[f(2h)-f(h)]}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[f(0+2h)-f(0+h)]}{2h-h}$ （26）式

由于函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并且 $\lim\limits_{h\to 0}2h=0$ 、$\lim\limits_{h\to 0}h=0$，说明 $2h$ 可以当成□，h 可以当成Δ，所以根据刚刚讲完的那个很重要的知识点可知

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[f(0+2h)-f(0+h)]}{2h-h}=f'(0)$ （27）式

（26）式、（27）式相结合，得

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[f(2h)-f(h)]}{h}=f'(0)$ （28）式

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[f(2h)-f(h)]}{h}$ 存在，所以说明（D）选项所说的这个极限存在是 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导的必要条件。

综上所述，（A）、（B）、（C）、（D）这四个选项中所说的极限存在均为“$f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导”的必要条件。

由于都满足“必要性”，所以只好再挨个考察“充分性”。

我们现在来判断一下这四个选项的“充分性”，也就是说，已知极限存在，看能不能推出可导。

注意：会用到“函数在某一点处可导的第二个等价定义”。

先来看（A）选项满不满足“充分性”。

已知极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在，看能不能推出 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导。

设 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)=A$ 。

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h+0)-f(0)}{1-\cos h} &\overset{\text{由于题中说}f(0)=0}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h+0)}{1-\cos h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}\\ &=\lim_{h\to 0}[\frac{f(1-\cos h)}{h^2}\times\frac{h^2}{1-\cos h}]\\ &=A\times 2\\ &=2A\end{aligned}$$

虽然由“$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在”推出了“$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h+0)-f(0)}{1-\cos h}$ 存在”，可是“$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h+0)-f(0)}{1-\cos h}$ 存在”能说明 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导吗？有的同学说能，理由是“函数在某一点处可导的第二个等价定义”。可实际上不能，因为“函数在某一点处可导的第二个等价定义”说的是：

若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}=$ 常数A，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，并且函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数为 A。注意，当 $\Delta x\to 0$ 时，从两侧都能趋于 0 的那个参数或代数式才能被当成上式中的“$\square$”。

那么，在 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h+0)-f(0)}{1-\cos h}$ 中 $1-\cos h$ 能当成 $\square$ 吗？不能，因为 $h\to 0$ 时，$1-\cos h$ 只是从右侧趋于 0，而不是从两侧趋于 0。可知“$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h+0)-f(0)}{1-\cos h}$ 存在”并不能说明 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，所以“$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在”并不能说明 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导。

由于（A）选项只满足“必要性”而不满足“充分性”，所以（A）选项不是充分必要条件，所以（A）选项不能选。

再来看（B）选项满不满足“充分性”。

已知极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在，看能不能推出 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导。

设 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)=A$ 。

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(1-e^h+0)-f(0)}{1-e^h} &\overset{\text{由于题中说}f(0)=0}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(1-e^h+0)}{1-e^h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-e^h)}{1-e^h}\\ &=\lim_{h\to 0}[\frac{f(1-e^h)}{h}\times\frac{h}{1-e^h}]\\ &=A\times(-1)\\ &=-A\end{aligned}$$

由“$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在”推出了“$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h+0)-f(0)}{1-e^h}$ 存在”。那么现在看看“$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h+0)-f(0)}{1-e^h}$ 存在”能说明 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导吗？根据“函数在某一点处可导的第二个等价定义”：**若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}=$ 常数 A，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，并且函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数为 A。注意，当 $\Delta x\to 0$ 时，从两侧都能趋于 0 的那个参数或代数式才能被当成上式中的“$\square$”。**

可知“$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h+0)-f(0)}{1-e^h}$ 存在”能说明 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，所以“$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在”能说明 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导。

由于（B）选项既满足“必要性”又满足“充分性”，所以（B）选项是充分必要条件，所以本题应该选择（B）选项。

如果是考试的话，那么现在就不用再往下继续做了，不过现在是学知识，而不是正式考试，所以还是考察一下（C）、（D）两个选项的“充分性”。

再来看（C）选项满不满足“充分性”。

已知极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在，看能不能推出 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导。

设 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)=A$。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h+0)-f(0)}{h-\sin h}\overset{\text{由于题中说}f(0)=0}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h+0)}{h-\sin h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(h-\sin h)}{h^2}\times\frac{h^2}{h-\sin h}\right]$$

通过计算可知 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2}{h-\sin h}=\infty$，而 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=A$，不过并不知道 A 是不是 0。如果 A 不是 0，那么 $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}\times\dfrac{h^2}{h-\sin h}\right]$ 就是 ∞，也就是说 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h+0)-f(0)}{h-\sin h}=\infty$；如果 A 是 0，那么 $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}\times\dfrac{h^2}{h-\sin h}\right]$ 是多少就不确定了，也就是说 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h+0)-f(0)}{h-\sin h}$ 是多少不确定。

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h+0)-f(0)}{h-\sin h}$ 不一定等于常数，也就是说，尽管对于这个选项来说的确是 $h\to 0$ 时 $h-\sin h$ 从两侧都趋于 0，但是“函数在某一点处可导的第二个等价定义”说的是“计算出的极限＝常数”，本题并不满足，所以，本选项所给的极限存在推不出 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导。

由于（C）选项虽然满足“必要性”但不满足“充分性”，所以（C）选项不是充分必要条件，所以（C）选项不能选。

最后来看（D）选项满不满足“充分性”。

已知极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在，看能不能推出 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导。

对于（D）选项而言，写出一个符合题意的 $f(x)$，看能不能推出 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导（注意：写的这个 $f(x)$ 应满足 $f(0)=0$，还应使极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在）。

举个例子，$f(x)=\begin{cases}1, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$。首先验证这个 $f(x)$ 符合不符合以上两个要求。

由于 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，所以 $f(0)=0$。

由于 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，所以 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[f(2h)-f(h)]}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-1}{h}=0$，说明 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[f(2h)-f(h)]}{h}$ 存在。

说明这个 $f(x)$ 符合以上两个要求。

现在看看这个 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，用导数定义就可以。

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x}=\infty$，不是常数，说明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，所以本选项所给的极限存在推不出 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导。

由于（D）选项虽然满足“必要性”但不满足“充分性”，所以（D）选项不是充分必要条件，所以（D）选项不能选。

综上所述，本题应该选择（B）选项。

例. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题**错误**的是（　　）。

（A）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在且等于 A，则 $f(0)=0$

（B）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在且等于 A，则 $f(0)=0$

（C）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在且等于 A，则 $f'(0)=A$

（D）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在且等于 A，则 $f'(0)=\dfrac{A}{2}$

解：注意，本题让选的是“错误的”而不是“正确的”。

首先来看（A）选项。

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在且等于 A，而通过代入法可知 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，所以根据第 1 章 1.7 节所讲的“两个常用的结论”可知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$。

注意：如果 A 不等于 0，则根据第 1 章 1.7 节所讲的“两个常用的结论”中的第一个结论知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$。如果 A 等于 0，则根据第 1 章 1.7 节所讲的“两个常用的结论”中的第二个结论知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$。

（A）选项的结论说的是 $f(0)=0$，且现在已经推出了 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，也就是说，只要能证出 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，则说明 $f(0)=0$。

那么 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$、$f(0)$ 这两者是否相等？如何判断？大家还记得第 1 章讲的函数极限的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 9 吗？

小技巧 9．当遇到抽象函数求极限时，首先要将 lim 深入进去，然后计算出结果，之后看看那个抽象函数在计算出的那个点处是否连续。若连续，则说明确实可以深入；若不连续，则说明不能深入。

现在就利用小技巧 9，将 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 中的 lim 深入进去，变成了 $f(\lim\limits_{x\to 0}x)$，算出

$f(\lim\limits_{x\to 0}x)=f(0)$　　　　（1）式

现在看看函数 $f(x)$ 在算出的这个“0”处是否连续。题中已经明确告诉了“设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续”，所以说明确实可以深入，也就是说，有

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to 0}x)$　　　　（2）式

（1）式、（2）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$　　　　（3）式

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，所以 $f(0)=0$。由此可知（A）选项正确，因为本题让选错误的，所以本题不能选择（A）选项。

再来看（B）选项。

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在且等于 A，而通过代入法可知 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，所以根据第 1 章 1.7 节所讲的“两个常用的结论”可知

$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]=0$　　　　（4）式

现在看看 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]$ 能不能拆为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)+\lim\limits_{x\to 0}f(-x)$，只要 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$、$\lim\limits_{x\to 0}f(-x)$ 这两者不都是 ∞，就能拆。

利用第 1 章讲的函数极限的第一种计算方法中的 9 个小技巧中的小技巧 9 来算 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$。

将 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 中的 lim 深入进去，变成 $f(\lim\limits_{x\to 0}x)$，算出

$f(\lim\limits_{x\to 0}x)=f(0)$　　　　（5）式

现在看看函数 $f(x)$ 在算出的这个“0”处是否连续。题中已经明确告诉了“设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续”，所以说明确实可以深入，也就是说，有

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to 0}x)$　　　　（6）式

（5）式、（6）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$　　　　（7）式

由于 $f(0)$ 是一个函数值，而函数值必然是常数，这就说明 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$、$\lim\limits_{x\to 0}f(-x)$ 这两者不可能都是 ∞（因为已经有一个是常数了），所以 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]$ 能拆为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)+\lim\limits_{x\to 0}f(-x)$，即

$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]=\lim\limits_{x\to 0}f(x)+\lim\limits_{x\to 0}f(-x)$　　　　（8）式

（4）式、（8）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)+\lim\limits_{x\to 0}f(-x)=0$　　　　（9）式

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，所以将 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ 代入（9）式得

$f(0)+\lim\limits_{x\to 0}f(-x)=0$ （10）式

现在再次利用第 1 章讲的函数极限的第一种计算方法中的 9 个小技巧中的小技巧 9 来算一下 $\lim\limits_{x\to 0}f(-x)$。

将 $\lim\limits_{x\to 0}f(-x)$ 中的 lim 深入进去，变成 $f(\lim\limits_{x\to 0}-x)$，算出

$f(\lim\limits_{x\to 0}-x)=f(0)$ （11）式

现在看看函数 $f(x)$ 在我们算出的这个“0”处是否连续。题中已经明确告诉了“设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续”，所以说明确实可以深入，也就是说，有

$\lim\limits_{x\to 0}f(-x)=f(\lim\limits_{x\to 0}-x)$ （12）式

（11）式、（12）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to 0}(f-x)=f(0)$ （13）式

（10）式、（13）式相结合，得

$f(0)+f(0)=0$ （14）式

由（14）式可解得

$f(0)=0$ （15）式

由于 $f(0)=0$，所以（B）选项正确，本题让选错误的，所以本题不能选择（B）选项。

再来看（C）选项。

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在且等于 A，由（A）选项可知 $f(0)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$。$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ 相结合得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=A$，可以变形为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0+x)-f(0)}{x}=A$。

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0+x)-f(0)}{x}=A$ 这个式子就是函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的定义式，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=A$。

由于 $f'(0)=A$，所以（C）选项正确，本题让选错误的，所以本题不能选择（C）选项。

最后看（D）选项。

随便举个例子。请注意：举的例子必须要满足 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，还要满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在。

举的例子是 $f(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$

先来验证一下举的这个例子满不满足 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，若不满足，则说明不能这么举例。

由于 $f(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$，所以 $f(0)=0$，而 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0,\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$。由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，所以说明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

再来算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$。$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-[-(-x)]}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x-(-x)}{x}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=0$。0 是常数，说明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在。

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，所以可以这么举例。

现在看看 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导（利用可导的定义），也就是说，计算 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$。

由于 $f(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

$$\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

由于 $\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\neq\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ 不存在，$f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，所以（D）选项错误。而本题就让选错误的，所以本题选择（D）选项。

正如函数在某一点处可导有等价定义和第二个等价定义一样，函数在某一点处左/右可导也有等价定义和第二个等价定义。

函数在某一点处左/右可导的等价定义如下：

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某左邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=$ 常数A，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处左可导，并且函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数为 A，记作 $f'_-(x_0)=A$ 或 $y'_-(x_0)=A$。

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某右邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=$ 常数A，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处右可导，并且函数 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数为 A，记作 $f'_+(x_0)=A$ 或 $y'_+(x_0)=A$。

函数在某一点处左/右可导的第二个等价定义如下：

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某左邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}=$ 常数 A，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处左可导，并且函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数为 A，记作 $f'_-(x_0)=A$ 或 $y'_-(x_0)=A$。

注意：当 $\Delta x\to0$ 时，从左侧能趋于 0 的那个参数或代数式才能被当成上式中的"$\square$"。

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某右邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}=$ 常数 A，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处右可导，并且函数 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数为 A，记作 $f'_+(x_0)=A$ 或 $y'_+(x_0)=A$。

注意：当 $\Delta x\to0$ 时，从右侧能趋于 0 的那个参数或代数式才能被当成上式中的"$\square$"。

例. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则（　　）。

（A）$f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在

（B）$f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在

（C）$f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在

（D）$f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

解： 由于 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}$ 等于非零常数1，又由代入法可知 $\lim\limits_{h\to0}h^2=0$，所以根据第 1 章 1.7 节（两个常用的结论）可知

$\lim\limits_{h\to0}f(h^2)=0$

利用第 1 章函数极限的第一种计算方法（基本计算方法）中的 9 个小技巧中的小技巧 9，将 $\lim\limits_{h\to0}f(h^2)$ 中的 lim 深入进去，变成 $f(\lim\limits_{h\to0}h^2)$，算出

$f(\lim\limits_{h\to0}h^2)=f(0)$　　　　（1）式

现在看看函数 $f(x)$ 在"0"处是否连续，因为题中已经明确告诉了"设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续"，所以说明可以深入，也就是说，有

$\lim\limits_{h\to0}f(h^2)=f(\lim\limits_{h\to0}h^2)$　　　　（2）式

（1）式、（2）式相结合，得

$\lim\limits_{h\to0}f(h^2)=f(0)$　　　　（3）式

由于 $\lim\limits_{h\to0}f(h^2)=0$，而 $\lim\limits_{h\to0}f(h^2)=f(0)$，$f(0)=0$，所以应该从（A）选项和（C）选项中选择答案。

由于题中说 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，而 $f(0)=0$，所以 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)-f(0)}{h^2}=1$，$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2+0)-f(0)}{h^2}=1$。将 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2+0)-f(0)}{h^2}=1$ 与函数在某一点处左/右可导的第二个等价定义对比一下，可以知道 $f'_+(0)=1$。所以，本题选择（C）选项。

2.1.3 函数在某区间可导的定义

函数在某区间可导的定义如下：

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都可导，则称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导。

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都可导，且在 $x=a$ 处右可导，在 $x=b$ 处左可导，就称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内可导。

下面给大家介绍一下 “导函数”。

通过刚才的讲解可以知道，如果函数 $y=f(x)$ 在某区间内可导，那就意味着对于该区间内的任意一个自变量 x，都对应着一个确定的导数值。那么，这一个个确定的导数值就构成了一个新的函数，称这个新的函数为函数 $y=f(x)$ 的导函数，简称为导数，记作 y' 或 $f'(x)$ 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$，即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

以上这个式子其实一点儿也不难记，大家和“函数在某一点处可导的定义式 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$”一起记就可以了。

例. 已知函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 的导函数为 $y'=g(x)$，请问这说明了什么？

解： 根据刚刚讲完的知识点可知，这说明对于任意满足 $a<x_0<b$ 的点 x_0 来说，函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数值为 $g(x_0)$。

例如，$\sin x$ 的导函数是 $\cos x$，那么函数 $y=\sin x$ 在 $x=1$ 处的导数值就肯定是 $\cos 1$。

例. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义，且 $f'(1)=a\ (a\neq 0)$，对任意的 x，$y\in(0,+\infty)$，有 $f(xy)=f(x)+f(y)$，求 $f'(x)$。

解： 取 $x=1$，$y=1$ 代入 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 中，得 $f(1)=f(1)+f(1)$，解得 $f(1)=0$。

本题让求的是 $f'(x)$，也就是说，计算 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$。

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[x(1+\frac{\Delta x}{x})]-f(x)}{\Delta x}\qquad（1）式$$

由于 $f(xy)=f(x)+f(y)$，所以 $f[x(1+\frac{\Delta x}{x})]=f(x)+f(1+\frac{\Delta x}{x})$，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[x(1+\frac{\Delta x}{x})]-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)+f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x}\qquad（2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x}\qquad（3）式$$

由于 $f(1)=0$，所以（3）式可以变为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\Delta x}\qquad（4）式$$

由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}\times\frac{1}{x}]$ （5）式

（4）式、（5）式相结合，可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}\times\frac{1}{x}]\qquad（6）式$$

现在来看看 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}\times\frac{1}{x}]$ 能不能拆为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}\times\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}$，必然能，因为是“$\Delta x\to$”而不是

“$x\to$”，也就是说 $\frac{1}{x}$ 在 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}\times\frac{1}{x}]$ 相当于是常数，而且肯定是非零常数（因为分子是 1），说明 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}$、$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}$ 这两者不可能一个是 0、一个是∞，所以能拆，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}[\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}\times\frac{1}{x}]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x} \qquad \text{（7）式}$$

（6）式、（7）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x} \qquad \text{（8）式}$$

而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$（常数的极限永远等于它本身），所以有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}} \qquad \text{（9）式}$$

对比一下 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}$ 和函数在某一点处可导的第二个等价定义可知，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}=f'(1)$，而题中说 $f'(1)=a$，所以有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}=a$。将 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}=a$ 代入（9）式得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{a}{x} \qquad \text{（10）式}$$

所以 $f'(x)=\frac{a}{x}$。

2.2　常用的导数公式

虽然已经给大家讲了可导的定义，可是如果总用可导的定义来计算导数值，则太慢了。举个例子。

例. 已知函数 $y=2x^2$，请计算 $y'(4)$。

方法 1. 用定义。

计算极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}$。

本题所给的函数是 $f(x)=2x^2$，所以 $f(4+\Delta x)=2(4+\Delta x)^2$，$f(4)=2\times 4^2=32$，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(4+\Delta x)^2-32}{\Delta x} \qquad \text{（1）式}$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2(4+\Delta x)^2-32}{\Delta x}$ 可以化简为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(4+\Delta x)^2-32}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(16+8\Delta x+\Delta x^2)-32}{\Delta x} \qquad \text{（2）式}$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(16+8\Delta x+\Delta x^2)-32}{\Delta x} \qquad \text{（3）式}$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2(16+8\Delta x+\Delta x^2)-32}{\Delta x}$ 可以化简为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(16+8\Delta x+\Delta x^2)-32}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{32+16\Delta x+2\Delta x^2-32}{\Delta x} \qquad （4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{32+16\Delta x+2\Delta x^2-32}{\Delta x} \qquad （5）式$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{32+16\Delta x+2\Delta x^2-32}{\Delta x}$ 可以化简为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{32+16\Delta x+2\Delta x^2-32}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{16\Delta x+2\Delta x^2}{\Delta x} \qquad （6）式$$

（5）式、（6）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{16\Delta x+2\Delta x^2}{\Delta x} \qquad （7）式$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{16\Delta x+2\Delta x^2}{\Delta x}$ 可以化简为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{16\Delta x+2\Delta x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(16+2\Delta x) \qquad （8）式$$

（7）式、（8）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(16+2\Delta x) \qquad （9）式$$

根据极限的可拆性，可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}(16+2\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}16+\lim_{\Delta x\to 0}2\Delta x \qquad （10）式$$

（9）式、（10）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}16+\lim_{\Delta x\to 0}2\Delta x \qquad （11）式$$

由于常数极限永远等于它本身，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}16=16$ 。由代入法可知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}2\Delta x=2\times 0=0$ 。现在把 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}16=16$ 、$\lim\limits_{\Delta x\to 0}2\Delta x=0$ 代入到（11）式中，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=16+0=16 \qquad （12）式$$

综上所述，函数 $y=2x^2$ 在 $x=4$ 处的导数值是 $y'(4)=16$ 。

方法 2. 用公式。

由于 $y=2x^2$ ，所以 $y'=4x$ ，所以 $y'(4)=4\times 4=16$ 。

由此可见，用公式计算导数比用定义计算导数方便多了，本节讲的就是常用的导数公式。

2.2.1　基本初等函数的导数公式

（1）$(c)'=0$

（2）$(x^a)'=ax^{a-1}$

（3）$(\sin x)'=\cos x$

（4）$(\cos x)'=-\sin x$

（5）$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

（6）$(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

（7）$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

（8）$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$　　（ $a>0$ 且 $a\neq 1$ ）

（9）$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$

（10）$(a^x)'=a^x\ln a$　　（ $a>0$ 且 $a\neq 1$ ）

（11）$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

（12）$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

（13）$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

（14）$(\text{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

2.2.2　导数的四则运算法则

设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都可导，则

（1）$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

（2）$(cf(x))' = cf'(x)$

（3）$(f(x) \times g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

（4）$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$　　　$g(x) \neq 0$

下面来看几道例题。注意，考虑到这些知识点大家应该都会，因此这些例题只给出最后答案。

例. $f(x) = \frac{1}{x}$, 求 $f'(x)$ 。

解： $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

例. $f(x) = \sin x + \mathrm{e}^x + x\log_3 x$, 求 $f'(x)$ 。

解： $f'(x) = \cos x + \mathrm{e}^x + \log_3 x + \frac{1}{\ln 3}$

例. $f(x) = 16x + \sin x \cos x - \tan x$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 。

解： $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $f'(x)$ 的意思是一样的。

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 16 + \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{1}{\cos^2 x}$

例. 设 $y = 3x^2$ ，求 $\mathrm{d}y$ 。

解： 由于 $y = 3x^2$ ，所以

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6x$　　　　（1）式

在（1）式的等式两侧同时乘以 $\mathrm{d}x$ ，得

$\mathrm{d}y = 6x\mathrm{d}x$　　　　（2）式

本题就做完了。通过本题想要告诉大家的是：以后求 $\mathrm{d}y$ 的解题方法就是先算出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，然后在等式两侧同时乘以 $\mathrm{d}x$ 即可。

2.2.3　复合函数的导数公式

大家要记住一点：做复合函数求导的题的原则就是把内层的函数设成一个字母（当然，要是做熟了可以不设）。

例. $f(x) = \mathrm{e}^{(5x+8)}$ ，求 $f'(x)$ 。

解： $f(x) = \mathrm{e}^{(5x+8)}$ 是一个复合函数，分内外两层，所以把“内层”函数（ $5x+8$ ）设成 u ，则 $\mathrm{e}^{(5x+8)}$ 变为了 e^u 。

先来算“外层的导数”，即 e^u 对 u 求导。

$(\mathrm{e}^u)' = \mathrm{e}^u$

再来算“内层的导数”，即（ $5x+8$ ）对 x 求导。

$(5x+8)' = 5$

综上所述，“外层的导数”×“内层的导数”就是答案，所以本题的答案为 $\mathrm{e}^u \times 5 = 5\mathrm{e}^u$ 。当然，u 是自己设的一个字母，不是题中给的，要将 u 恢复成 $5x+8$ ，所以本题的最终答案为 $5\mathrm{e}^{5x+8}$ 。

例. $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(5x+8)}$ ，求 $f'(x)$ 。

解：$f(x)=\mathrm{e}^{\sin(5x+8)}$ 是一个复合函数，分内外两层，所以把“内层”的函数 $\sin(5x+8)$ 设成 u，则 $\mathrm{e}^{\sin(5x+8)}$ 变为了 e^u。

先来算“外层的导数”，即 e^u 对 u 求导。

$(\mathrm{e}^u)'=\mathrm{e}^u$

再来算“内层的导数”，即 $\sin(5x+8)$ 对 x 求导。

这个“内层”又是一个复合函数，也就是说，“内层”本身又分内外两层，所以把“内层的内层”的函数 $5x+8$ 设成 v，则 $\sin(5x+8)$ 变为了 $\sin v$。

（1）先来算“内层的外层的导数”，即 $\sin v$ 对 v 求导。

$(\sin v)'=\cos v$

（2）再来算“内层的内层的导数”，即 $(5x+8)$ 对 x 求导。

$(5x+8)'=5$

“内层的导数”=“内层的外层的导数”×“内层的内层的导数”，所以“内层的导数”为 $5\times\cos v$。

综上所述，“外层的导数”×“内层的导数”就是答案，所以本题的答案为 $\mathrm{e}^u\times5\times\cos v=5\mathrm{e}^u\cos v$。由于 u 和 v 都是设的字母，不是题中给的，要将 u 恢复成 $\sin(5x+8)$，要将 v 恢复成 $(5x+8)$，所以本题的最终答案为 $5\mathrm{e}^{\sin(5x+8)}\cos(5x+8)$。

例. 设 $y=f(\ln x)\mathrm{e}^{f(x)}$，其中 $f(x)$ 可微，求 $\mathrm{d}y$。

解：本题中出现了“可微”一词，虽然没有给大家讲，不过这完全不影响做本题。本题让求 $\mathrm{d}y$，只需求出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，然后等式两侧同时乘以 $\mathrm{d}x$ 就可以了。

本题所给的函数可以看成是两个函数相乘的形式，第一个函数是 $f(\ln x)$，第二个函数是 $\mathrm{e}^{f(x)}$。

根据公式 $(f(x)\times g(x))'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ 来做就可以了。不过大家一定要注意，函数 $f(\ln x)$ 和函数 $\mathrm{e}^{f(x)}$ 都是复合函数（只不过是抽象的复合函数，不像前两道题那样把表达式给出来）。

先来算一下函数 $f(\ln x)$ 对 x 求导的结果。

由于 $f(\ln x)$ 是复合函数，所以设“内层”函数 $\ln x=u$，则 $f(\ln x)$ 变为了 $f(u)$。

先算“外层的导数”，也就是 $f(u)$ 对 u 求导。

$f'(u)=f'(u)$

再算“内层的导数”，也就是 $\ln x$ 对 x 求导。

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

所以函数 $f(\ln x)$ 对 x 求导的结果为 $f'(u)\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{f'(u)}{x}=\dfrac{f'(\ln x)}{x}$。

再来算一下函数 $\mathrm{e}^{f(x)}$ 对 x 求导的结果。

由于 $\mathrm{e}^{f(x)}$ 是复合函数，所以设“内层”函数 $f(x)=u$，则 $\mathrm{e}^{f(x)}$ 变为了 e^u。

先算“外层的导数”，也就是 e^u 对 u 求导。

$(\mathrm{e}^u)'=\mathrm{e}^u$

再算“内层的导数”，也就是 $f(x)$ 对 x 求导。

$f'(x)=f'(x)$

所以函数 $\mathrm{e}^{f(x)}$ 对 x 求导的结果为 $\mathrm{e}^u\times f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}\times f'(x)$。

综上所述，有

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=f(\ln x)\text{对}x\text{的导数}\times\mathrm{e}^{f(x)}+\mathrm{e}^{f(x)}\text{对}x\text{的导数}\times f(\ln x)\\
&=\frac{f'(\ln x)}{x}\times\mathrm{e}^{f(x)}+\mathrm{e}^{f(x)}\times f'(x)\times f(\ln x)
\end{aligned}
$$

在上式的等式两侧同时乘以 $\mathrm{d}x$，得

$$\mathrm{d}y=\left[\frac{f'(\ln x)}{x}\times\mathrm{e}^{f(x)}+\mathrm{e}^{f(x)}\times f'(x)\times f(\ln x)\right]\mathrm{d}x$$

2.2.4 幂指函数求导

本节要告诉大家幂指函数应该如何求导，首先来看一下什么样的函数叫幂指函数。

所谓幂指函数，其实就是函数 $f(x)^{g(x)}$。那么幂指函数该怎么求导呢？幂指函数是有求导公式的，不过强烈建议大家不要背公式，因为公式比较长不好记。有的同学可能会问，那不记公式，又该怎么做呢？方法如下。

将幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 换一种写法，写为 $e^{\ln f(x)^{g(x)}}$，进而写为 $e^{g(x)\ln f(x)}$，变成了复合函数，用复合函数求导的方法去求就可以了。

例. 设 $y = x^{\arctan x}$，求 y'。

解：由于本题属于幂指函数求导，所以应该按照刚刚讲完的方法求解。即

$y = x^{\arctan x} = e^{\ln x^{\arctan x}} = e^{\arctan x \times \ln x}$

所以 $y' = (e^{\arctan x \times \ln x})'$，现在计算 $(e^{\arctan x \times \ln x})'$ 就可以了。

$e^{\arctan x \times \ln x}$ 是复合函数，分内外两层，所以把“内层”的函数（$\arctan x \times \ln x$）设成 u，则 $e^{\arctan x \times \ln x}$ 变为了 e^u。

先来算“外层的导数”，即 e^u 对 u 求导。

$(e^u)' = e^u$

再来算“内层的导数”，即（$\arctan x \times \ln x$）对 x 求导。

$(\arctan x \times \ln x)' = \dfrac{\ln x}{1+x^2} + \dfrac{\arctan x}{x}$

综上所述，“外层的导数”×“内层的导数”就是答案，所以本题的答案为 $e^u \times (\dfrac{\ln x}{1+x^2} + \dfrac{\arctan x}{x})$。$u$ 是自己设的一个字母，不是题中给的，所以要将 u 恢复成 $\arctan x \times \ln x$，所以本题的最终答案为 $e^{\arctan x \times \ln x} \times (\dfrac{\ln x}{1+x^2} + \dfrac{\arctan x}{x})$。当然由于 $e^{\arctan x \times \ln x} = e^{\ln x^{\arctan x}} = x^{\arctan x}$，所以本题的答案又可写为 $x^{\arctan x} \times (\dfrac{\ln x}{1+x^2} + \dfrac{\arctan x}{x})$。

例. 设 $y = x^{a^x}$，求 y'。

解：由于本题属于幂指函数求导，所以应该按照刚刚讲完的方法求解。即

$$y = x^{a^x} = e^{\ln x^{a^x}} = e^{a^x \ln x}$$

所以 $y' = (e^{a^x \ln x})'$ 现在计算 $(e^{a^x \ln x})'$ 就可以了。

$e^{a^x \ln x}$ 是复合函数，分内外两层，所以把“内层”的函数（$a^x \ln x$）设成 u，则 $e^{a^x \ln x}$ 变为了 e^u。

先来算“外层的导数”，即 e^u 对 u 求导。

$(e^u)' = e^u$

再来算“内层的导数”，即（$a^x \ln x$）对 x 求导。

$(a^x \ln x)' = a^x \ln a \ln x + \dfrac{a^x}{x}$

综上所述，“外层的导数”×“内层的导数”就是答案，所以本题的答案为 $e^u \times (a^x \ln a \ln x + \dfrac{a^x}{x})$。$u$ 是自己设的一个字母，不是题中给的，所以要将 u 恢复成 $a^x \ln x$，所以本题的最终答案为 $e^{a^x \ln x} \times (a^x \ln a \ln x + \dfrac{a^x}{x})$。当然，由于 $e^{a^x \ln x} = e^{\ln x^{a^x}} = x^{a^x}$，所以本题的答案又可写为 $x^{a^x} \times (a^x \ln a \ln x + \dfrac{a^x}{x})$。

2.3　可微的定义

在讲本节的知识点之前，先给大家提个醒：本节所讲的知识点比较抽象，其实大家不需要理解，只要背下来然后会做题就可以了。

可微的定义如下：

设 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内有定义，并设 $x_0 + \Delta x$ 在该邻域内。如果

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \overset{\text{可写为}}{=} A\Delta x + o(\Delta x)$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数，则称 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可微。

首先解释一下“$o(\Delta x)$”是什么。“$o(\Delta x)$”指的是“Δx 的高阶无穷小”。那么是 Δx 趋于多少时的高阶无穷小呢？“$o(\Delta x)$”指的是“$\Delta x \to 0$ 时，Δx 的高阶无穷小”，因为，既然是“Δx 的高阶无穷小”，那首先 Δx 得是无穷小，而显然 $\Delta x \to 0$ 时 Δx 是无穷小。**所以，综上所述，定义中的“$o(\Delta x)$”指的是“$\Delta x \to 0$ 时，Δx 的高阶无穷小”，也就是说，有 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$。**

其次解释一下“Δy”是什么。“Δy”指的是“函数值的增量”，也就是两个函数值之差。所以，永远都有 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。

那么，是不是对于任意一个函数 $y=f(x)$ 的任意一个点 x_0 来说，全有 $\Delta y = A\Delta x+o(\Delta x)$ 呢（或者说全有 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$ 呢）？当然不全有。既然不全有，那么对于函数 $y=f(x)$ 的点 x_0 来说，如果有 $\Delta y = A\Delta x+o(\Delta x)$（或如果有 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$），则称 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可微。

在做例题前，先给大家讲三个知识点。

知识点 1：若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可微，则记 $\mathrm{d}y=A\Delta x$，可微的定义式可写为 $\Delta y=\mathrm{d}y+o(\Delta x)$。

知识点 2：若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可微，那么 A 一定等于函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数值，也就是说 $A=f'(x_0)$。

知识点 3：若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可微，那么 $\Delta y-\mathrm{d}y=\frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2$（其中 ξ 介于 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 之间）。

例. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，对任意 $x,y,f(x)$ 满足关系式：

$$f(x+y)-f(x)=[f(x)-1]y+a(y)$$

其中，$a(y)$ 满足 $\lim\limits_{y\to 0}\frac{a(y)}{y}=0$，请写出 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的关系式。

解： 现在来看一下题中所给的这个式子：

$$f(x+y)-f(x)=[f(x)-1]y+a(y) \qquad \text{（1）式}$$

因为 $\lim\limits_{y\to 0}\frac{a(y)}{y}=0$，意味着 $a(y)$ 是 y 的一个高阶无穷小，$a(y)=o(y)$，所以（1）式可以改写为

$$f(x+y)-f(x)=[f(x)-1]y+o(y) \qquad \text{（2）式}$$

将（2）式中的 x 换一个字母，换成 x_0。再将（2）式中的 y 也换一个字母，换成 Δx。（2）式变为了

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=[f(x_0)-1]\Delta x+o(\Delta x) \qquad \text{（3）式}$$

（3）式中的“$[f(x_0)-1]$”显然与 Δx 无关，只与 x_0 有关。再来看看可微的定义式：

如果 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\overset{可写为}{=}A\Delta x+o(\Delta x)$，其中 A 是与 Δx 无关的常数，则称 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可微。

经过对比发现，本题所给的函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微。

因此，根据上面给大家讲的三个知识点中的“知识点 2”立刻可知：

$$f'(x_0)=f(x_0)-1 \qquad \text{（4）式}$$

将（4）式中的 x_0 换为 x，可得到

$$f'(x)=f(x)-1 \qquad \text{（5）式}$$

例. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则（　　）。

（A）$0<\mathrm{d}y<\Delta y$

（B）$0<\Delta y<\mathrm{d}y$

（C）$\Delta y<\mathrm{d}y<0$

（D）$\mathrm{d}y<\Delta y<0$

解： 根据之前给大家讲的三个知识点中的“知识点 1”立刻可知 $\mathrm{d}y=A\Delta x$，根据三个知识点中的“知识点 2”立刻可知 $A=f'(x_0)$。而题中 $f'(x)>0$，说明对于定义域内的任意一点来说，都有 $f'(x)>0$，$f'(x_0)>0$，所以 $A>0$。

又由于 $\Delta x>0$，所以有 $\mathrm{d}y=A\Delta x$，并且 $A>0$，$\Delta x>0$，所以有 $\mathrm{d}y>0$。

因此，从（A）选项和（B）选项中选就可以了。

根据三个知识点中的“知识点 3”立刻可知：$\Delta y-\mathrm{d}y=\frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2$。而题中 $f''(x)>0$，说明对于定义域内的任意一点来说，都有 $f''(x)>0$，所以 $f''(\xi)>0$。

由于 $\frac{1}{2}>0$，$f''(\xi)>0$，$(\Delta x)^2>0$，所以 $\frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2>0$，$\Delta y-\mathrm{d}y>0$，$\Delta y>\mathrm{d}y$。

所以，本题应该选择（A）选项。

2.4 可微、可导、连续三者的关系

这三者之间的关系如下：

函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微 $\Rightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续。

简单解释一下：可微和可导是可以互推的，而无论是可微还是可导都能推出连续（也就是说“连续”是“可导”和“可微”的大前提。例如，若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续，那么函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处就绝对不可能可微和可导）。

例. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ a\mathrm{e}^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$，已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，求 a。

解： 题中说函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，由刚刚讲完的知识点可知，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以根据连续的定义，有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$。

由于 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ a\mathrm{e}^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$，所以 $f(0)=a\mathrm{e}^{2\times 0}=a$， $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=a$。

由于 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。（注：其中 A 为任意常数或 ∞。）所以有 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=a$、$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=a$

而

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{\tan x}-1}{\arcsin\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{x}{2}}=-2\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=-2$$

所以 $a=-2$。

例. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ a\mathrm{e}^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$，已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微，求 a。

解： 题中说函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微，由刚刚讲完的知识点可知，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以根据连续的定义，有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$。

由于 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ a\mathrm{e}^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$，所以 $f(0)=a\mathrm{e}^{2\times 0}=a$， $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=a$。

由于 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。（注：其中 A 为任意常数或 ∞。）所以有 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=a$、$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=a$

而

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{\tan x}-1}{\arcsin\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{x}{2}}=-2\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=-2$$

所以 $a=-2$。

例. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导， $f'(x_0)=-1$，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}$。

解： 题中说函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，根据本节刚刚讲完的知识点，可知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微。

既然函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微，那么根据可微的定义，有

$\Delta y=\mathrm{d}y+o(\Delta x)$

$o(\Delta x)$ 指的是 Δx 的高阶无穷小，再具体就是 $\Delta x\to 0$ 时 Δx 的高阶无穷小，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0$。

根据 $\Delta y=\mathrm{d}y+o(\Delta x)$，可知 $\Delta y-\mathrm{d}y=o(\Delta x)$。

所以有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\mathrm{d}y}\qquad（1）式$$

根据上一节给大家讲的三个知识点中的“知识点 1”可知， $\mathrm{d}y=A\Delta x$。又根据三个知识点中的“知识点 2”可知， $A=f'(x_0)$。而本题中 $f'(x_0)=-1$，所以有 $\mathrm{d}y=-\Delta x$。

所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\mathrm{d}y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{-\Delta x}\qquad（2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{-\Delta x}\qquad（3）式$$

而

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{-\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\qquad（4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\qquad（5）式$$

而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0$，将 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$ 代入（5）式，可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}=0\qquad（6）式$$

例. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，请问函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导吗？

解：要想做出本题，有两种方法。

方法 1. 利用定义法。

也就是说利用“函数在某一点处可导的定义”来计算，如果算出的极限是常数，则说明可导，否则就不可导。现在来算一下 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$。

由于 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，所以 $f(0)=0$，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)}{\Delta x}\qquad（1）式$$

将（1）式化简一下，可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\qquad（2）式$$

现在将 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$ 中的 Δx 换成 x，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\qquad（3）式$$

（2）式、（3）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\qquad（4）式$$

现在要将 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 中的 $f(x)$ 显化。由于是“$x\to 0$”，所以应该将 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 中的 $f(x)$ 显化为 $\cos x$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}\qquad（5）式$$

（4）式、（5）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}\qquad（6）式$$

通过计算可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}=\infty\qquad（7）式$$

（6）式、（7）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\infty\qquad（8）式$$

由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ 不等于常数，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。

方法 2. 利用本节所讲的知识点。

本节所讲的知识点是：

函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微 $\Rightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续。

既然“函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导”能推出“函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续”，也就是说“函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导”的前提是“函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续”。要是不连续，就不可能可导。

那么判断一下本题所给的函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处是否连续。

用连续的定义判断即可。

由于 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，所以 $f(0)=0$。

由于 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$。

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$，所以函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处不连续，因此函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处不可导。

由此可见，方法 2 明显比方法 1 简单。

2.5　很重要的四个知识点

2.5.1　第一个知识点

第一个知识点：$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 的意思是 $\dfrac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x}$，也就是 y''。

例. 已知 $y=8x^2+4x+\mathrm{e}^x$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

解： 由“第一个知识点”可知，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 其实就是 y''。

由于 $y=8x^2+4x+\mathrm{e}^x$，所以 $y'=16x+4+\mathrm{e}^x$，所以 $y''=16+\mathrm{e}^x$，即 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=16+\mathrm{e}^x$。

2.5.2　第二个知识点

在给大家讲这第二个知识点之前，先讲一下“自变量”和“因变量”。大家只要记住以下三点就可以了：

① 方程个数 = 因变量个数。

② 自变量个数 + 因变量个数 = 变量个数。

③ 一道题中，究竟谁是自变量谁是因变量要看问题是怎么问的。

以上就是有关“自变量”和“因变量”的知识点。

例. “已知 $y=8x+4$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$”，请问题中有几个因变量，有几个自变量，谁是因变量，谁是自变量。

解： 先来看一下本题给了几个方程？很明显本题给了一个方程，也就是说，方程个数为 1。根据“方程个数 = 因变量个数”可知，本题中一共有 1 个因变量。

再来看看本题中有几个变量，本题中一共有两个变量（分别是 x 和 y）。根据“自变量个数 + 因变量个数 = 变量个数”可知，自变量个数 = 变量个数 − 因变量个数 = $2-1=1$，所以本题中一共有 1 个自变量。

那么在 $y=8x+4$ 中到底谁是自变量，谁是因变量呢？如果只看“$y=8x+4$”这个式子，那么既可以把 y 当成因变量，x 当成自变量；也可以把 x 当成因变量，y 当成自变量。但是，如果把“$y=8x+4$”连同问题“求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$”一起看，那么必然 x 是自变量，y 是因变量（大家记住，出现在问题的分母上的变量必定是被当成自变量的，所以 x 是自变量，y 就是因变量）。这就是刚才讲的“一道题中，究竟谁是自变量，谁是因变量要看问题是怎么问的。”

例. “已知 $y=\mathrm{e}^x$，求 $\dfrac{\mathrm{d}(x+y)}{\mathrm{d}y}$”，请问题中有几个因变量，有几个自变量，谁是因变量，谁是自变量。

解：先来看一下本题给了几个方程？很明显本题给了一个方程，也就是说，方程个数为 1。根据“方程个数 = 因变量个数”可知，本题中一共有 1 个因变量。

再来看看本题中有几个变量，本题中一共有两个变量（分别是 x 和 y）。根据“自变量个数 + 因变量个数 = 变量个数”可知，自变量个数 = 变量个数 − 因变量个数 = $2-1=1$，所以本题中一共有 1 个自变量。

那么在 $y=e^x$ 中到底谁是自变量，谁是因变量呢？如果只看“$y=e^x$”这个式子，那么既可以把 y 当成因变量 x 当成自变量；也可以把 x 当成因变量，y 当成自变量。但是，如果把“$y=e^x$”连同问题“求 $\dfrac{d(x+y)}{dy}$”一起看，那么必然 y 是自变量，x 是因变量（大家记住，出现在问题的分母上的变量必定是被当成自变量的，所以 y 是自变量，x 就是因变量）。

例. “已知 $e^y+y-3xy=0$，求 $\dfrac{d(x^2)}{dy}$”，请问题中有几个因变量，有几个自变量，谁是因变量，谁是自变量。

解：先来看一下本题给了几个方程？很明显本题给了一个方程，也就是说，方程个数为 1。根据“方程个数 = 因变量个数”可知，本题中一共有 1 个因变量。

再来看看本题中有几个变量，本题中一共有两个变量（分别是 x 和 y）。根据“自变量个数 + 因变量个数 = 变量个数”可知，自变量个数 = 变量个数 − 因变量个数 = $2-1=1$，所以本题中一共有 1 个自变量。

那么在 $e^x+y-3xy=0$ 中到底谁是自变量，谁是因变量呢？如果只看“$e^y+y-3xy=0$”这个式子，那么既可以把 y 当成因变量，x 当成自变量；也可以把 x 当成因变量，y 当成自变量。但是，如果把“$e^y+y-3xy=0$”连同问题“求 $\dfrac{d(x^2)}{dy}$”一起看，那么必然 y 是自变量，x 是因变量。

例. “已知方程组 $\begin{cases} y^2+yz-zt^2=0 \\ te^z+z\sin t=0 \end{cases}$，求 $\dfrac{dz}{dy}$、$\dfrac{dt}{dy}$”，请问题中有几个因变量，有几个自变量，谁是因变量，谁是自变量。

解：先来看一下本题给了几个方程？很明显本题给了两个方程，也就是说，方程个数为 2。根据“方程个数 = 因变量个数”可知，本题中一共有 2 个因变量。

再来看看本题中有几个变量，本题中一共有 3 个变量（分别是 y、z、t）。根据我刚才讲的“自变量个数 + 因变量个数 = 变量个数”可知，自变量个数 = 变量个数 − 因变量个数 = $3-2=1$，所以本题中一共有 1 个自变量。

那么在 $\begin{cases} y^2+yz-zt^2=0 \\ te^z+z\sin t=0 \end{cases}$ 中到底谁是自变量，谁是因变量呢？如果只看“$\begin{cases} y^2+yz-zt^2=0 \\ te^z+z\sin t=0 \end{cases}$”这个式子，那么可以把 y、z、t 这三个变量中的任意两个变量当成因变量，把剩下的那个变量当成自变量。但是，如果把“$\begin{cases} y^2+yz-zt^2=0 \\ te^z+z\sin t=0 \end{cases}$”连同问题“求 $\dfrac{dz}{dy}$、$\dfrac{dt}{dy}$”一起看，那么必然 y 是自变量，z,t 是因变量。

接下来给大家讲“第二个知识点”。

第二个知识点：

经常会碰到“已知变量 x,y 之间的关系式，求 $\dfrac{dy}{dx}$”的题，现在给大家总结一下这种题的做法。大家或许会觉得不用总结，认为这太简单了，有一次讲课讲到这里时，有个同学就说：“这不用讲，这不是早就讲过了吗，$\dfrac{dy}{dx}$ 就是 y'，如已知 $y=8x+5+\sin x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$，直接套公式就行了，答案是 $8+\cos x$。这还有什么总结的？”

我的回答是：上面举的这个是最简单的一种题型，而实际上，“已知变量 x,y 之间的关系式，求 $\dfrac{dy}{dx}$”的题依据关系式的给法不同，解法也各不相同，所以很有必要给大家总结一下。

情况 1. 如果题中给的变量 x,y 之间的关系式是：$y=f(x)$，让求 $\dfrac{dy}{dx}$，那就直接套导数公式求 $\dfrac{dy}{dx}$ 即可，这最简单。

情况 2. 如果题中给的变量 x,y 之间的关系式是 $f(x,y)=0$，让求 $\dfrac{dy}{dx}$，则在等式两侧同时对 x 求导（当然，0 的那一侧求完导肯定还是 0）。但是要记住，对因变量求导时后面必须要乘以 $\dfrac{d因变量}{d自变量}$。

情况 3. 以上两种情况说的都是题中给的变量 x,y 之间的关系式是一个方程，但如果给的关系式是含两个方程

的方程组 $\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$，让求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 呢？那就让这两个等式的两侧同时对 x 求导（当然，0 的那一侧求完导肯定还是 0）。但是要记住，对因变量求导时后面必须要乘以 $\dfrac{\mathrm{d}因变量}{\mathrm{d}自变量}$。

例. 已知 $y=8x+5$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解： 本题非常简单，就算不讲“第二个知识点”，也应该能轻易做出来。不过这里还是按“第二个知识点”来做。

首先，由于题中给了变量 x,y 之间的关系式，让求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以说明本题会用到刚讲的“第二个知识点”。那么到底是“情况 1”、“情况 2”还是“情况 3”呢？很明显是情况 1，因为题中给的变量 x,y 之间的关系式是以 $y=f(x)$ 的形式给的。

情况 1：如果题中给的变量 x,y 之间的关系式是 $y=f(x)$，让求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，那就直接套导数公式求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 即可，这最简单。

情况 1 的解题方法就是直接套公式，所以本题的做法如下。

由于 $y=8x+5$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=(8x+5)'=8$。

例. 已知 $xy+\sin y-2x=0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解： 首先，由于题中给了变量 x,y 之间的关系式，让求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以说明本题会用到刚讲的“第二个知识点”。那么到底是“情况 1”、“情况 2”还是“情况 3”呢？很明显是情况 2，因为题中给的变量 x,y 之间的关系式是以 $f(x,y)=0$ 的形式给的。

情况 2：如果题中给的变量 x,y 之间的关系式是 $f(x,y)=0$，让求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则在等式两侧同时对 x 求导（当然，0 的那一侧求完导肯定还是 0）。但是要记住，对因变量求导时后面必须要乘以 $\dfrac{\mathrm{d}因变量}{\mathrm{d}自变量}$。

情况 2 的解题方法就是让等式两侧同时对 x 求导，所以本题的做法如下。

由于 $xy+\sin y-2x=0$，所以让等式两侧同时对 x 求导，在两侧都求完导之后，等于号“=”依然成立。

等式右侧是 0，对 x 求完导肯定还是 0。

等式左侧是 $xy+\sin y-2x$，让它对 x 求导，得

$$y+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\times x+\cos y\times\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2$$

有些同学可能不明白为何 $xy+\sin y-2x$ 对 x 求完导得到的是 $y+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\times x+\cos y\times\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2$，现在解释一下。

情况 2 的解题方法中说得很明白，等式两侧同时对 x 求导，但是对因变量求导时后面必须要乘以 $\dfrac{\mathrm{d}因变量}{\mathrm{d}自变量}$。针对本题而言，本题中由于有一个方程，说明有一个因变量，又因为本题中一共有两个变量，所以本题中有一个自变量。那么到底谁是因变量，谁是自变量呢？由于本题的问题是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则说明 x 是自变量，y 是因变量。所以，当对因变量 y 使用求导公式时，之后必须要乘以一个 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

综上所述，等式右侧的 0 对 x 求完导是 0，等式左侧的 $xy+\sin y-2x$ 对 x 求完导是

$y+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\times x+\cos y\times\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2$，所以有

$$y+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\times x+\cos y\times\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2=0$$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2-y}{x+\cos y}$。

例. 已知 $x+y=0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解： 首先，由于题中给了变量 x,y 之间的关系式，让求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以说明本题会用到刚讲的“第二个知识点”。那么到底是“情况 1”、“情况 2”还是“情况 3”呢？很明显是情况 2，因为题中给的变量 x,y 之间的关系式是以 $f(x,y)=0$

的形式给的。

情况 2 的解题方法就是让等式两侧同时对 x 求导，所以本题的做法如下。

由于 $x+y=0$，所以让等式两侧同时对 x 求导，在两侧都求完导之后，等于号“=”依然成立。

等式右侧是 0，对 x 求完导肯定还是 0。

等式左侧是 $x+y=0$，让它对 x 求导得

$$1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\times 1$$

有些同学可能不明白为何 $x+y$ 对 x 求完导得到的是 $1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\times 1$，现在解释一下。

对本题而言，本题中由于只有一个方程 $x+y=0$，说明有一个因变量，又因为本题中一共有两个变量，所以本题中有一个自变量。那么到底谁是因变量，谁是自变量呢？由于本题的问题是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则说明 x 是自变量，y 是因变量。所以，当对因变量 y 使用求导公式时，之后必须要乘以一个 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

综上所述，等式右侧的 0 对 x 求完导是 0，等式左侧的 $x+y$ 对 x 求完导是 $1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\times 1$，所以有

$$1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\times 1=0$$

解得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-1$。

针对本题而言，由于给的方程是 $x+y=1$，所以可以将此方程改写为 $y=1-x$，这样就属于“情况 1”了，就可以用“情况 1”的解题方法做。当然，做完的答案同样是 -1。但是大家一定要注意，并非所有的 $f(x,y)=0$ 都能转化为 $x=g(y)$ 或 $y=g(x)$。如已知 $xy+\sin(xy)=0$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，就转化不了，只能用“情况 2”的解题方法来做。

例. 已知 $xy+\sin y-2x=0$，求 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$。

解： 首先，由于题中给了变量 x,y 之间的关系式，让求 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，所以说明本题会用到刚讲的“第二个知识点”。那么到底是“情况 1”、“情况 2”还是“情况 3”呢？很明显是情况 2，因为题中给的变量 x,y 之间的关系式是以 $f(x,y)=0$ 的形式给的。

情况 2 的解题方法就是让等式两侧同时对 x 求导，所以本题的做法如下。

由于 $xy+\sin y-2x=0$，所以让等式两侧同时对 y 求导，在两侧都求完导之后，等于号“=”依然成立。

等式右侧是 0，对 y 求完导肯定还是 0。

等式左侧是 $xy+\sin y-2x$，让它对 y 求导得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\times y+x+\cos y-2\times\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

有些同学可能不明白为何 $xy+\sin y-2x$ 对 y 求完导得到的是 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\times y+x+\cos y-2\times\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，现在解释一下。

对本题而言，本题中由于有一个方程，说明有一个因变量，又因为本题中一共有两个变量，所以本题中有一个自变量。那么到底谁是因变量，谁是自变量呢？由于本题的问题是 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，则说明 y 是自变量，x 是因变量。所以，当对因变量 x 使用求导公式时，之后必须要乘以一个 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$。

综上所述，等式右侧的 0 对 y 求完导是 0，等式左侧的 $xy+\sin y-2x$ 对 y 求完导是 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\times y+x+\cos y-2\times\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，所以有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\times y+x+\cos y-2\times\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=0$$

解得：$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x+\cos y}{2-y}$。

例. 设 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$ 确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解：首先，由于题中给了变量 x,y 之间的关系式，让求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以说明本题会用到刚讲的"第二个知识点"。那么到底是"情况 1"、"情况 2"还是"情况 3"呢？很明显是情况 3，因为题中给的变量 x,y 之间的关系式是含两个方程的方程组。

情况 3：以上两种情况说的都是题中给的变量 x,y 之间的关系式是一个方程，但如果给的关系式是含两个方程的方程组 $\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$，让求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 呢？那就让这两个等式的等式两侧同时对 x 求导（当然，0 的那一侧求完导肯定还是 0）。但是要记住，对因变量求导时后面必须要乘以 $\frac{\mathrm{d}因变量}{\mathrm{d}自变量}$。

有的同学问，"情况 3"说的不是 $\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$ 吗，这意思是这两个等式中的每一个等式的等式右侧都得是 0，可本题的第一个等式的等式右侧是 $3t^2+2t+3$ 而不是 0，矛盾了。实际上，这根本不矛盾，可以把 $x=3t^2+2t+3$ 变成 $x-3t^2-2t-3=0$。

情况 3 的解题方法就是让两个等式的两侧同时对 x 求导，所以本题的做法如下：

先来看第一个方程。

第一个方程是 $x-3t^2-2t-3=0$。等式右侧是 0，对 x 求完导肯定还是 0，这没什么说的。

等式左侧是 $x-3t^2-2t-3$，让它对 x 求导得

$$1-6t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}-2\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

有些同学可能不明白为何 $x-3t^2-2t-3$ 对 x 求完导得到的是 $1-6t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}-2\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$，现在解释一下。

情况 3 的解题方法中说得很明白，等式两侧同时对 x 求导，但是对因变量求导时后面必须要乘以 $\frac{\mathrm{d}因变量}{\mathrm{d}自变量}$。针对本题而言，本题中由于有两个方程，说明有两个因变量，又因为本题中一共有三个变量，所以本题中有一个自变量。那么到底谁是因变量，谁是自变量呢？由于本题的问题是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则说明 x 是自变量，那么必然 y 和 t 是因变量。所以，当对因变量 t 使用求导公式时，之后必须要乘以一个 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

综上所述，等式右侧的 0 对 x 求完导是 0，等式左侧的 $x-3t^2-2t-3$ 对 x 求完导是

$1-6t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}-2\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$，所以有

$$1-6t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}-2\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \qquad （1）式$$

再来看第二个方程。

第二个方程是 $\mathrm{e}^y\sin t-y+1=0$。等式右侧是 0，对 x 求完导肯定还是 0。

等式左侧是 $\mathrm{e}^y\sin t-y+1$，让它对 x 求导得

$$\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\sin t+\cos t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^y-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

有些同学可能不明白为何 $\mathrm{e}^y\sin t-y+1$ 对 x 求完导得到的是 $\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\sin t+\cos t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^y-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，现在解释一下。

情况 3 的解题方法中说得很明白，等式两侧同时对 x 求导，但是对因变量求导时后面必须要乘以 $\frac{\mathrm{d}因变量}{\mathrm{d}自变量}$。针对本题而言，本题中由于有两个方程，说明有两个因变量，又因为本题中一共有三个变量，所以本题中有一个自变量。那么到底谁是因变量，谁是自变量呢？由于本题的问题是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则说明 x 是自变量，那么必然 y 和 t 是因变量。所以，当对因变量 t 使用求导公式时，之后必须要乘以一个 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$；当对因变量 y 使用求导公式时，之后必须要乘以一个 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

综上所述，等式右侧的 0 对 x 求完导是 0，等式左侧的 $\mathrm{e}^y\sin t-y+1$ 对 x 求完导是

$\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\sin t+\cos t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^y-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以有

$$\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\sin t+\cos t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^y-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\begin{cases} 1-6t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}-2\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=0 \\ \mathrm{e}^{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\sin t+\cos t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{y}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \end{cases}$$

解此方程组得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{6t+2} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^{y}\cos t}{(6t+2)(1-\mathrm{e}^{y}\sin t)} \end{cases}$$

本题答案是$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^{y}\cos t}{(6t+2)(1-\mathrm{e}^{y}\sin t)}$。本题虽然只让求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$而没让求$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$，但实际上，求出$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$的同时也求出了$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$。

例. 已知$\begin{cases} y^{2}+yz-zt^{2}=0 \\ t\mathrm{e}^{z}+z\sin t=0 \end{cases}$，求$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$。

解： 首先，由于题中给了变量y,z之间的关系式，让求$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$，所以说明本题会用到刚讲的“第二个知识点”。那么到底是“情况 1”、“情况 2”还是“情况 3”呢？很明显是情况 3，因为题中给的变量y,z之间的关系式是含两个方程的方程组。

情况 3 的解题方法就是让两个等式的两侧同时对x求导，所以本题的做法如下。

先来看第一个方程。

第一个方程是$y^{2}+yz-zt^{2}=0$。等式右侧是 0，对x求完导肯定还是 0。

等式左侧是$y^{2}+yz-zt^{2}$，让它对y求导得

$$2y+z+y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-t^{2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-2zt\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$$

有些同学可能不明白为何$y^{2}+yz-zt^{2}$对y求完导得到的是$2y+z+y\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-t^{2}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-2zt\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$，现在解释一下。

情况 3 的解题方法中说得很明白，等式两侧同时对y求导，但是对因变量求导时后面必须要乘以$\dfrac{\mathrm{d}因变量}{\mathrm{d}自变量}$。针对本题而言，本题中由于有两个方程，说明有两个因变量，又因为本题中一共有三个变量，所以本题中有一个自变量。那么到底谁是因变量，谁是自变量呢？由于本题的问题是$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$，则说明$y$是自变量，那么必然$z$和$t$是因变量。所以，当对因变量$z$使用求导公式时，之后必须要乘以一个$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$；当对因变量$t$使用求导公式时，之后必须要乘以一个$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$。

综上所述，等式右侧的 0 对y求完导是 0，等式左侧的$y^{2}+yz-zt^{2}$对y求完导是

$2y+z+y\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-t^{2}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-2zt\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$，所以有

$$2y+z+y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-t^{2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-2zt\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=0 \qquad （1）式$$

再来看第二个方程。

第二个方程是$t\mathrm{e}^{z}+z\sin t=0$。等式右侧是 0，对$y$求完导肯定还是 0。

等式左侧是$t\mathrm{e}^{z}+z\sin t$，让它对y求导得

$$t\mathrm{e}^{z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\mathrm{e}^{z}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}+\sin t\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+z\cos t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$$

有些同学可能不明白为何$t\mathrm{e}^{z}+z\sin t$对y求完导得到的是$t\mathrm{e}^{z}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\mathrm{e}^{z}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}+\sin t\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+z\cos t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$，现在解释一下。

情况 3 的解题方法中说得很明白，等式两侧同时对y求导，但是对因变量求导时后面必须要乘以$\dfrac{\mathrm{d}因变量}{\mathrm{d}自变量}$。针对本题而言，本题中由于有两个方程，说明有两个因变量，又因为本题中一共有三个变量，所以本题中有一个自变量。那么到底谁是因变量，谁是自变量呢？由于本题的问题是$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$，则说明$y$是自变量，那么必然$z$和$t$是因变量。

所以，当对因变量 z 使用求导公式时，之后必须要乘以一个 $\frac{dz}{dy}$；当对因变量 t 使用求导公式时，之后必须要乘以一个 $\frac{dt}{dy}$。

综上所述，等式右侧的 0 对 y 求完导是 0，等式左侧的 $te^z+z\sin t$ 对 y 求完导是

$te^z\frac{dz}{dy}+e^z\frac{dt}{dy}+\sin t\frac{dz}{dy}+z\cos t\frac{dt}{dy}$，所以有

$$te^z\frac{dz}{dy}+e^z\frac{dt}{dy}+\sin t\frac{dz}{dy}+z\cos t\frac{dt}{dy}=0 \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\begin{cases}2y+z+y\frac{dz}{dy}-t^2\frac{dz}{dy}-2zt\frac{dt}{dy}=0\\ te^z\frac{dz}{dy}+e^z\frac{dt}{dy}+\sin t\frac{dz}{dy}+z\cos t\frac{dt}{dy}=0\end{cases}$$

解此方程组得

$$\begin{cases}\frac{dz}{dy}=\frac{(2y+z)(te^z+\sin t)}{(y-t^2)(e^z+z\cos t)+2zt(te^z+\sin t)}\\ \frac{dt}{dy}=\frac{-(2y+z)(e^z+z\cos t)}{(y-t^2)(e^z+z\cos t)+2zt(te^z+\sin t)}\end{cases}$$

本题答案是 $\frac{dt}{dy}=\frac{-(2y+z)(e^z+z\cos t)}{(y-t^2)(e^z+z\cos t)+2zt(te^z+\sin t)}$。本题虽然只让求 $\frac{dz}{dy}$ 而没让求 $\frac{dt}{dy}$，但实际上，求出 $\frac{dz}{dy}$ 的同时也求出了 $\frac{dt}{dy}$。

例. 设 $\begin{cases}x=e^t\cos t\\ y=e^t\sin t\end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解： 首先，由于题中给了变量 x,y 之间的关系式，让求 $\frac{dy}{dx}$，所以说明本题会用到刚讲的“第二个知识点”。那么到底是“情况 1”、“情况 2”还是“情况 3”呢？很明显是情况 3，因为题中给的变量 x,y 之间的关系式是含两个方程的方程组。

有的同学问，“情况 3”说的不是 $\begin{cases}f(x,y,z)=0\\ g(x,y,z)=0\end{cases}$ 吗，那这两个等式中的每一个等式的右侧都应是 0，可本题的两个等式的等式右侧都不是 0，矛盾了。实际上，这根本不矛盾，把 $x=e^t\cos t$ 变成 $x-e^t\cos t=0$，把 $y=e^t\sin t$ 变成 $y-e^t\sin t=0$ 即可。

情况 3 的解题方法就是让两个等式的两侧同时对 x 求导，所以本题的做法如下。

先来看第一个方程。

第一个方程是 $x-e^t\cos t=0$。等式右侧是 0，对 x 求完导肯定还是 0。

等式左侧是 $x=e^t\cos t$，让它对 x 求导得

$1-e^t\frac{dt}{dx}\cos t+\sin t\frac{dt}{dx}e^t$

有些同学可能不明白为何 $x=e^t\cos t$ 对 x 求完导得到的是 $1-e^t\frac{dt}{dx}\cos t+\sin t\frac{dt}{dx}e^t$，现在解释一下。

针对本题而言，本题中由于有两个方程，说明有两个因变量，又因为本题中一共有三个变量，所以本题中有一个自变量。那么到底谁是因变量，谁是自变量呢？由于本题的问题是 $\frac{dy}{dx}$，说明 x 是自变量，那么必然 y 和 t 是因变量。所以，当对因变量 y 使用求导公式时，之后必须要乘以一个 $\frac{dy}{dx}$；当对因变量 t 使用求导公式时，之后必须要乘以一个 $\frac{dt}{dx}$。

综上所述，等式右侧的 0 对 x 求完导是 0，等式左侧的 $x-e^t\cos t$ 对 x 求完导是

$1-e^t\frac{dt}{dx}\cos t+\sin t\frac{dt}{dx}e^t$，所以有

$1-\mathrm{e}^t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\cos t+\sin t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^t=0$　　　　（1）式

再来看第二个方程。

第二个方程是 $y-\mathrm{e}^t\sin t=0$。等式右侧是 0，对 x 求完导肯定还是 0。

等式左侧是 $y-\mathrm{e}^t\sin t$，让它对 x 求导得

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\sin t+\cos t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^t)$

有些同学可能不明白为何 $y-\mathrm{e}^t\cos t$ 对 x 求完导得到的是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(\mathrm{e}^t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\sin t+\cos t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^t)$，现在解释一下。

针对本题而言，本题中由于有两个方程，说明有两个因变量，又因为本题中一共有三个变量，所以本题中有一个自变量。那么到底谁是因变量，谁是自变量呢？由于本题的问题是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，说明 x 是自变量，那么必然 y 和 t 是因变量。所以，当对因变量 y 使用求导公式时，之后必须要乘以一个 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；当对因变量 t 使用求导公式时，之后必须要乘以一个 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$。

综上所述，等式右侧的 0 对 y 求完导是 0，等式左侧的 $y-\mathrm{e}^t\sin t$ 对 x 求完导是

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(\mathrm{e}^t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\sin t+\cos t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^t)$，所以有

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(\mathrm{e}^t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\sin t+\cos t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^t)=0$　　　　（2）式

（1）式、（2）式相结合，得

$$\begin{cases}1-\mathrm{e}^t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\cos t+\sin t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^t=0\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(\mathrm{e}^t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\sin t+\cos t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^t)=0\end{cases}$$

解此方程组得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t)}\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}\end{cases}$$

本题答案是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$。本题虽然只让求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 而没让求 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$，但实际上，求出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的同时也求出了 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$。

像本题的这种题，属于“情况 3 的特例”，以后对于像这种情况 3 的特例的题，有更简单的方法。

先来说一下什么样的题属于“情况 3 的特例”。若一道题是“已知 $\begin{cases}y=f(x)\\ z=g(x)\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$”，则该题属于“情况 3 的特例”。由此可知，本题明显属于“情况 3 的特例”。

那么对于“情况 3 的特例”的题，该怎么做呢？第一种方法就是把它当成普通的情况 3 的题那么做（本题就是这么做的），第二种方法是利用公式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}\times\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}$ 和公式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$ 来做。

接下来，利用第二种方法来做一下本题。

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\times\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$

先来算 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$。

由于题中说 $y=\mathrm{e}^t\sin t$，所以求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 属于“情况 1”，直接套公式得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)$。

再来算 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$。

由于 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$，也就是说，只需算出 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 然后取倒数就行了。由于题中说 $x=\mathrm{e}^t\cos t$，所以求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 属于“情况 1”，

直接套公式得 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^t(\cos t+\sin t)$，所以 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{\mathrm{e}^t(\cos t+\sin t)}$。

综上所述，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)\times\frac{1}{\mathrm{e}^t(\cos t+\sin t)}=\frac{\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)}{\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t)}=\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$。

2.5.3　第三个知识点

第二个知识点分了三种情况，但无论是其中的哪种情况，问题中的分子 **d** 的后面肯定都只跟了一个字母，要是问题中的分子 **d** 的后面不是单纯的一个字母怎么办？例如，求 $\frac{\mathrm{d}(3x^2+2x+8)}{\mathrm{d}x}$、求 $\frac{\mathrm{d}(2y+x)}{\mathrm{d}x}$、求 $\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\sin y})}{\mathrm{d}x}$、求 $\frac{\mathrm{d}(2y)}{\mathrm{d}x}$ 等应该如何去求呢？这就是第三个知识点要给大家讲的。

具体来说，第三个知识点讲的是求解 $\frac{\mathrm{d}\square}{\mathrm{d}x}$ 的方法（其中 □ 不是单纯的一个字母）。

第三个知识点：

情况 1：若 □ 中只含字母 x 而不含其他字母，让求 $\frac{\mathrm{d}\square}{\mathrm{d}x}$，则直接套导数公式求 $\frac{\mathrm{d}\square}{\mathrm{d}x}$ 即可，这最简单。

情况 2：若 □ 中含有除 x 以外的其他字母（含不含 x 无所谓），让求 $\frac{\mathrm{d}\square}{\mathrm{d}x}$，其做法其实也是套导数公式来求 $\frac{\mathrm{d}\square}{\mathrm{d}x}$，但是要记住，对因变量求导时后面必须要乘以 $\frac{\mathrm{d}\text{因变量}}{\mathrm{d}\text{自变量}}$。

例. 求 $\frac{\mathrm{d}(3x^2+2x+8)}{\mathrm{d}x}$。

解： 由于问题中的分子 d 的后面不是单纯的一个字母，所以本题与“第三个知识点”有关。那么到底是“情况 1”还是“情况 2”呢？很显然是情况 1，因为 □ 中只含字母 x 而不含其他字母，所以应该按照情况 1 的解题方法来做本题。

情况 1：若 □ 中含字母 x 而不含其他字母，让求 $\frac{\mathrm{d}\square}{\mathrm{d}x}$，则直接套导数公式求 $\frac{\mathrm{d}\square}{\mathrm{d}x}$ 即可，这最简单。

直接套导数公式即可，所以 $\frac{\mathrm{d}(3x^2+2x+8)}{\mathrm{d}x}=6x+2$。

例. 求 $\frac{\mathrm{d}(5x+\sin x+\tan x)}{\mathrm{d}x}$。

解： 由于问题中的分子 d 的后面不是单纯的一个字母，所以本题与“第三个知识点”有关。那么到底是“情况 1”还是“情况 2”呢？很显然是情况 1，因为 □ 中只含字母 x 而不含其他字母，所以应该按照情况 1 的解题方法来做本题。

直接套导数公式即可，所以 $\frac{\mathrm{d}(5x+\sin x+\tan x)}{\mathrm{d}x}=5+\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}$。

例. 已知 $xy+\sin y-2x=0$，求 $\frac{\mathrm{d}(\sin y)}{\mathrm{d}x}$。

解： 由于问题中的分子 d 的后面不是单纯的一个字母，所以本题与“第三个知识点”有关。那么到底是“情况 1”还是“情况 2”呢？很显然是情况 2，因为 □ 中含有除了 x 以外的其他字母，所以应该按照情况 2 的解题方法来做本题。

情况 2：若 □ 中含有除 x 以外的其他字母（含不含 x 无所谓），让求 $\frac{\mathrm{d}\square}{\mathrm{d}x}$，其做法其实也是套导数公式来求 $\frac{\mathrm{d}\square}{\mathrm{d}x}$，但是要记住，对因变量求导时后面必须要乘以 $\frac{\mathrm{d}\text{因变量}}{\mathrm{d}\text{自变量}}$。

针对本题来说有

$$\frac{\mathrm{d}(\sin y)}{\mathrm{d}x}=\cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \qquad \text{（1）式}$$

有些同学可能不明白为何 $\sin y$ 对 x 求完导得到的是 $\cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，现在解释一下。

情况 2 的解题方法中说得很明白，也是套导数公式来求 $\frac{\mathrm{d}\square}{\mathrm{d}x}$，但是对因变量求导时后面必须要乘以 $\frac{\mathrm{d}\text{因变量}}{\mathrm{d}\text{自变量}}$。针对本题而言，本题中由于有一个方程，说明有一个因变量，又因为本题中一共有两个变量，所以本题中有一个自变量。那么到底谁是因变量，谁是自变量呢？由于本题的问题是 $\frac{\mathrm{d}(\sin y)}{\mathrm{d}x}$，说明 x 是自变量， y 是因变量。所以，当对因变量 y 使用求导公式时，之后必须要乘以一个 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

接下来只要把 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 求出来就可以了。

首先，由于题中给了变量 x,y 之间的关系式，让求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以说明本题会用到刚讲的“第二个知识点”。那么到底是“情况 1”、“情况 2”还是“情况 3”呢？很明显是情况 2，因为题中给的变量 x,y 之间的关系式是以 $f(x,y)=0$ 的形式给的。

情况 2 的解题方法就是让等式两侧同时对 x 求导，所以本题的做法如下。

由于 $xy+\sin y-2x=0$，所以让等式两侧同时对 x 求导，在两侧都求完导之后，等于号“ = ”依然成立。

等式右侧是 0，对 x 求完导肯定还是 0。

等式左侧是 $xy+\sin y-2x$，让它对 x 求导得

$$y+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\times x+\cos y\times\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2$$

有些同学可能不明白为何 $xy+\sin y-2x$ 对 x 求完导得到的是 $y+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\times x+\cos y\times\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2$，现在解释一下。

针对本题而言，本题中由于有一个方程，说明有一个因变量，又因为本题中一共有两个变量，所以本题中有一个自变量。那么到底谁是因变量，谁是自变量呢？由于本题的问题是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，说明 x 是自变量， y 是因变量。所以，当对因变量 y 使用求导公式时，之后必须要乘以一个 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

综上所述，等式右侧的 0 对 x 求完导是 0，等式左侧的 $xy+\sin y-2x$ 对 x 求完导是

$y+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\times x+\cos y\times\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2$，所以有

$$y+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\times x+\cos y\times\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2=0$$

解得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2-y}{x+\cos y}$。

将 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2-y}{x+\cos y}$ 代入（1）式，得

$$\frac{\mathrm{d}(\sin y)}{\mathrm{d}x}=\cos y\times\frac{2-y}{x+\cos y}=\frac{(2-y)\cos y}{x+\cos y}$$

例. 设 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^t\cos t \\ y=\mathrm{e}^t\sin t \end{cases}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

解： 由“第一个知识点”可知，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 的意思是 $\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x}$，所以要求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，必须先求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

（1）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的求解方法如下。

首先，由于题中给了变量 x,y 之间的关系式，让求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以说明本题会用到刚讲的“第二个知识点”。那么到底是“情况 1”、“情况 2”还是“情况 3”呢？很明显是情况 3，因为题中给的变量 x,y 之间的关系式是含两个方程的方程组。

把 $x=\mathrm{e}^t\cos t$ 变成 $x-\mathrm{e}^t\cos t=0$、把 $y=\mathrm{e}^t\sin t$ 变成 $y-\mathrm{e}^t\sin t=0$。

情况 3 的解题方法就是让两个等式的两侧同时对 x 求导，所以本题的做法如下。

先来看第一个方程。

第一个方程是 $x-\mathrm{e}^t\cos t=0$。等式右侧是 0，对 x 求完导肯定还是 0。

等式左侧是 $x-\mathrm{e}^t\cos t$，让它对 x 求导得

$$1-\mathrm{e}^t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\cos t+\sin t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^t$$

有些同学可能不明白为何 $x-\mathrm{e}^t\cos t$ 对 x 求完导得到的是 $1-\mathrm{e}^t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\cos t+\sin t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^t$，现在解释一下。

针对本题而言，本题中由于有两个方程，说明有两个因变量，又因为本题中一共有三个变量，所以本题中有一个自变量。那么到底谁是因变量，谁是自变量呢？由于本题的问题是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，说明 x 是自变量，那么必然 y 和 t 是因变量。所以，当对因变量 y 使用求导公式时，之后必须要乘以一个 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；当对因变量 t 使用求导公式时，之后必须要乘以一个 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$。

综上所述，等式右侧的 0 对 x 求完导是 0，等式左侧的 $x-\mathrm{e}^t\cos t$ 对 x 求完导是 $1-\mathrm{e}^t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\cos t+\sin t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^t$，所以有

$$1-\mathrm{e}^t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\cos t+\sin t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^t=0 \qquad （1）式$$

再来看第二个方程。

第二个方程是 $y-\mathrm{e}^t\sin t=0$。等式右侧是 0，对 x 求完导肯定还是 0。

等式左侧是 $y-\mathrm{e}^t\sin t$，让它对 x 求导得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(\mathrm{e}^t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\sin t+\cos t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^t)$$

有些同学可能不明白为何 $y-\mathrm{e}^t\sin t$ 对 x 求完导得到的是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(\mathrm{e}^t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\sin t+\cos t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^t)$，现在解释一下。

针对本题而言，本题中由于有两个方程，说明有两个因变量，又因为本题中一共有三个变量，所以本题中有一个自变量。那么到底谁是因变量，谁是自变量呢？由于本题的问题是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，说明 x 是自变量，那么必然 y 和 t 是因变量。所以，当对因变量 y 使用求导公式时，之后必须要乘以一个 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；当对因变量 t 使用求导公式时，之后必须要乘以一个 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$。

综上所述，等式右侧的 0 对 y 求完导是 0，等式左侧的 $y-\mathrm{e}^t\sin t$ 对 x 求完导是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(\mathrm{e}^t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\sin t+\cos t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^t)$，所以有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(\mathrm{e}^t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\sin t+\cos t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^t)=0 \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\begin{cases}1-\mathrm{e}^t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\cos t+\sin t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^t=0\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(\mathrm{e}^t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\sin t+\cos t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^t)=0\end{cases}$$

解此方程组得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\mathrm{e}^t(\cos t+\sin t)}\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}\end{cases}$$

因此，得到 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$。

（2）$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 的求解方法如下。

根据“第一个知识点可知”，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 指的是 $\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t})}{\mathrm{d}x}$$

也就是说，现在要计算出 $\dfrac{\mathrm{d}(\dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t})}{\mathrm{d}x}$。

由于 $\dfrac{\mathrm{d}(\dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t})}{\mathrm{d}x}$ 的分子 d 的后面不是单纯的一个字母，所以本题与“第三个知识点”有关。那么到底是“情况 1”还是“情况 2”呢？很显然是情况 2，因为$\square$中含有除了 x 以外的其他字母，所以应该按照情况 2 的解题方法来做本题。

针对本题来说有

$$\frac{\mathrm{d}(\dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t})}{\mathrm{d}x}=\frac{(\cos t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}-\sin t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x})(\cos t-\sin t)-(-\sin t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}-\cos t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x})(\sin t+\sin t)}{(\cos t-\sin t)^2}$$

有些同学可能不明白为何 $\dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$ 对 x 求完导得到的是

$\dfrac{(\cos t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}-\sin t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x})(\cos t-\sin t)-(-\sin t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}-\cos t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x})(\sin t+\sin t)}{(\cos t-\sin t)^2}$，现在解释一下。

针对本题而言，本题中由于有两个方程，说明有两个因变量，又因为本题中一共有三个变量，所以本题中有一个自变量。那么到底谁是因变量，谁是自变量呢？由于本题的问题是 $\dfrac{\mathrm{d}(\dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t})}{\mathrm{d}x}$，说明 x 是自变量，y 和 t 是因变量。所以，当对因变量 y 使用求导公式时，之后必须要乘以一个 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；当对因变量 t 使用求导公式时，之后必须要乘以一个 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$。

由于在做第（1）问的时候已经求出了 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t)}$，所以将 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t)}$ 代入 $\dfrac{(\cos t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}-\sin t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x})(\cos t-\sin t)-(-\sin t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}-\cos t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x})(\sin t+\sin t)}{(\cos t-\sin t)^2}$ 中就可以得到最终的答案，至于最终的答案是多少就不给出来了，因为太复杂，大家知道方法就可以了。

2.5.4 第四个知识点

第四个知识点：“变上限积分求导公式”。

大家可能会认为：连积分都没讲，怎么就讲变上限积分求导公式了？连积分都没讲，讲变上限积分公式能听懂吗？首先，之所以没讲积分就讲变上限积分求导公式，那是因为变上限积分求导公式与积分其实没多大关系。其次，不讲积分就讲变上限积分求导公式大家也完全能听懂。

变上限积分求导公式：$\int_a^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t$ 对 x 的求导结果为 $(\int_a^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t)'=g(f(x))\times f'(x)$

例． 求 $(\int_a^{\sin x}2t\mathrm{d}t)'$。

解： 由刚刚讲完的“第四个知识点”可知，变上限积分的求导公式是 $(\int_a^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t)'=g(f(x))\times f'(x)$。

在本题中，$g(t)=2t$，$f(x)=\sin x$，所以本题的答案为

$(\int_a^{\sin x}2t\mathrm{d}t)'=2\sin x\times(\sin x)'=2\sin x\cos x$

例． 求 $(\int_a^{4x}\sin t\mathrm{d}t)'$。

解： 由刚刚讲完的“第四个知识点”可知，变上限积分的求导公式是 $(\int_a^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t)'=g(f(x))\times f'(x)$。

在本题中，$g(t)=\sin t$，$f(x)=4x$，所以本题的答案为

$(\int_a^{5x+2}\sin t\mathrm{d}t)'=\sin 4x\times(4x)'=4\sin 4x$

例． 求 $(\int_a^{5x+2}(2t+\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t)'$。

解： 由刚刚讲完的“第四个知识点”可知，变上限积分的求导公式是 $(\int_a^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t)'=g(f(x))\times f'(x)$。

在本题中，$g(t)=2t+\mathrm{e}^t$，$f(x)=5x+2$，所以本题的答案为

$$(\int_a^{5x+2}(2t+\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t)'=[2(5x+2)+\mathrm{e}^{5x+2}]\times(5x+2)'=5[2(5x+2)+\mathrm{e}^{5x+2}]$$

2.6　高阶导推低阶导

“高阶导低阶导”指的是：**若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的 n 阶导存在（$n>1$），那么必存在 x_0 的一个邻域 $(x_0-\xi,x_0+\xi)$，在此邻域内 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导存在。**

例如，函数 $f(x)$ 在 $x=3$ 处的二阶导存在（也就是 $f''(3)$ 存在），那么必然存在一个 3 的邻域 $(3-\xi,3+\xi)$，在此邻域内 $f(x)$ 的一阶导存在。

现在通过举例来解释一下，函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的二阶导存在，为什么能推出必然存在一个 x_0 的邻域 $(x_0-\xi,x_0+\xi)$，在此邻域内 $f(x)$ 的一阶导存在呢？

由于函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的二阶导存在，根据定义可得 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}$ 存在。

大家看看，上式中出现了 $f'(x_0+\Delta x)$，既然能出现 $f'(x_0+\Delta x)$，就说明 $f'(x_0+\Delta x)$ 存在。

例. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=3$ 处的二阶导存在（也就是 $f''(3)$ 存在），请问能不能推出在区间 $(2.99,3.01)$ 内 $f'(x)$ 存在。

解： 由于题中说函数 $f(x)$ 在 $x=3$ 处的二阶导存在，根据本节所讲的知识点可知，必然存在一个 3 的邻域 $(3-\xi,3+\xi)$，在此邻域内 $f(x)$ 的一阶导 $f'(x)$ 存在。

那么，在区间 $(2.99,3.01)$ 内 $f'(x)$ 是否存在呢？这可不一定。因为，本节所讲的知识点只是说“存在邻域”，而不是“任意邻域”。所以针对本题来说，就是“存在 3 的邻域 $(3-\xi,3+\xi)$”，而不是“3 的任意邻域 $(3-\xi,3+\xi)$”。

所以函数 $f(x)$ 在 $x=3$ 处的二阶导存在（也就是 $f''(3)$ 存在），并不能推出在区间 $(2.99,3.01)$ 内 $f'(x)$ 存在。

2.7　求某函数的高阶导数的方法

如果某道让求导数的题所问的导数阶数大于 2，那么该题就属于“让求高阶导数的题”。

例如，某道题的问题是求 $f'(x)$，那么该题不属于“让求高阶导数的题”，因为问题所问的导数阶数是 1，没有大于 2。

再例如，某道题的问题是求 $f''(x)$，那么该题也不属于“让求高阶导数的题”，因为问题所问的导数阶数是 2，没有大于 2。

再例如，某道题的问题是求 $f'''(x)$，那么该题就属于“让求高阶导数的题”，因为问题所问的导数阶数是 3，大于 2。

接下来，要给大家讲求某函数的高阶导数的三种方法。

方法 1. 像求低阶导一样，利用导数公式一阶一阶去求。

方法 1 的适用题型：此方法用于求解让求的导数阶数不超过五阶（含五阶）的高阶导数的题。

例. 已知 $f(x)=\ln(1+x)$，求 $f^{(4)}(x)$。

解：“$f^{(n)}(x)$”的意思是“函数 $f(x)$ 的 n 阶导数”，所以本题中出现的“$f^{(4)}(x)$”是指“函数 $f(x)$ 的四阶导数”。

注意，大家千万别认为“$f^{(n)}(x)$”和“$f^n(x)$”是一个意思，这两者的意思完全不一样。“$f^{(n)}(x)$”的意思是“函数 $f(x)$ 的 n 阶导数”，而“$f^n(x)$”的意思是“函数 $f(x)$ 的 n 次方”。

首先看一下本题属于不属于“让求高阶导数的题”。凡是一道题让求的导数阶数大于 2，那该题就属于“让求高阶导数的题”。对于本题来说，本题让求的是四阶导，所以本题属于“让求高阶导数的题”。

再来看看本题应不应该用刚刚讲完的“方法 1”来做。由于本题所让求的导数的阶数是四阶，没有超过五阶，所以应该用“方法 1”来求，也就是一阶一阶去求。

$$f(x)=\ln(1+x)$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{6}{(1+x)^4}$$

本题答案是$-\dfrac{6}{(1+x)^4}$。

方法 2. 利用莱布尼兹公式

$$[f(x)\times g(x)]^{(n)}=\mathrm{C}_n^0f^{(0)}(x)g^{(n)}(x)+\mathrm{C}_n^1f^{(1)}(x)g^{(n-1)}(x)+\cdots+\mathrm{C}_n^nf^{(n)}(x)g^{(0)}(x)$$

方法 2 的适用题型：方法 2 适用于求解题中给出的函数是两项相乘的形式并且这两个函数中的一个函数最多求四次导再往后求导就全是 0 了，并且让求的导数阶数大于五阶的高阶导数的题。

例. 设$y=x^2\mathrm{e}^{2x}$，求$y^{(n)}$。

解：首先看一下本题属于不属于“让求高阶导数的题”。凡是一道题让求的导数阶数大于 2，那该题就属于“让求高阶导数的题”。对于本题来说，本题让求的是n阶导。有的同学问，不知道这个“n”到底是大于 2 还是小于等于 2。大家记住，以后凡是遇到求n阶导的题，那就意味着该题属于“让求高阶导数的题”。并且，在紧接着判断用哪种方法来求此高阶导时，就把n当成 100。

现在再来看看本题是应该用“方法 1”来做还是应该用“方法 2”来做。

本题肯定不能用“方法 1”来做，因为“方法 1”的适用题型是“用于求解导数阶数不超过五阶（含五阶）的高阶导数的题”，而明显$100>5$。

此时有的同学可能会说，既然本题不能用方法 1 来做，那肯定是用方法 2 来做。我的回答是：那可不一定，如果只有方法 1 和方法 2 这两种方法，那肯定是不用方法 1 就用方法 2，但问题的关键是一共是三种方法（还有“方法 3”没讲）而不是两种，所以，此时只是判断出本题不能用方法 1 来做，至于到底是用方法 2 还是方法 3，还需要进一步判断。

某道“让求高阶导数的题”能不能用方法 2 来做，共需要验证以下三点。

第一点：题中给出的函数是否是两项相乘的形式。

第二点：这两个函数中的一个函数是否最多求四次导再往后求导就全是 0 了。

第三点：问题让求的导数阶数是否大于五阶。

先来验证第一点，看看题中给出的函数是否是两项相乘的形式。本题所给的函数是$y=x^2\mathrm{e}^{2x}$，这明显是两项相乘的形式，一项是x^2，另一项是e^{2x}，所以第一点满足。

再来验证第二点，看看这两个函数中的一个函数是否最多求四次导再往后求导就全是 0 了。由于$(x^2)'=2x$，$(x^2)''=2$，$(x^2)'''=0$，$(x^2)^{(4)}=0$，所以第二点满足。

最后来验证第三点，看看问题让求的导数阶数是否大于五阶。之前讲过，n当成 100，而$100>5$，所以第三点满足。

综上所述，由于第一点、第二点、第三点均满足，所以本题可以用方法 2（莱布尼兹公式）来做。

莱布尼兹公式为

$$[f(x)\times g(x)]^{(n)}=\mathrm{C}_n^0f^{(0)}(x)g^{(n)}(x)+\mathrm{C}_n^1f^{(1)}(x)g^{(n-1)}(x)+\cdots+\mathrm{C}_n^nf^{(n)}(x)g^{(0)}(x)$$

大家一定要看仔细了，莱布尼兹公式的等式右侧的每一项可都不是“某某次方”，而是“某某阶导”。

那么在本题中，到底应该把x^2当成$f(x)$，把e^{2x}当成$g(x)$；还是把e^{2x}当成$f(x)$，把x^2当成$g(x)$呢？

大家记住，一定要把最多求四次导再往后求导就全是 0 的那个函数当成$f(x)$。

所以在本题中，应该把x^2当成$f(x)$，把e^{2x}当成$g(x)$。

由莱布尼兹公式可得

$$(x^2\mathrm{e}^{2x})^{(n)}=\mathrm{C}_n^0(x^2)^{(0)}(\mathrm{e}^{2x})^{(n)}+\mathrm{C}_n^1(x^2)^{(1)}(\mathrm{e}^{2x})^{(n-1)}+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}(x^2)^{(n-1)}(\mathrm{e}^{2x})^{(1)}+\mathrm{C}_n^n(x^2)^{(n)}(\mathrm{e}^{2x})^{(0)}$$

这时想必有的同学会问，这么多项，怎么算？实际上，根本没有那么多项，而是只有如下三项：

$$(x^2\mathrm{e}^{2x})^{(n)}=\mathrm{C}_n^0(x^2)^{(0)}(\mathrm{e}^{2x})^{(n)}+\mathrm{C}_n^1(x^2)^{(1)}(\mathrm{e}^{2x})^{(n-1)}+\mathrm{C}_n^2(x^2)^{(2)}(\mathrm{e}^{2x})^{(n-2)}$$

由于x^2从三阶导开始再往后就全是 0 了，导致$(x^2\mathrm{e}^{2x})^{(n)}=\mathrm{C}_n^0(x^2)^{(0)}(\mathrm{e}^{2x})^{(n)}+\mathrm{C}_n^1(x^2)^{(1)}(\mathrm{e}^{2x})^{(n-1)}+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}(x^2)^{(n-1)}(\mathrm{e}^{2x})^{(1)}+\mathrm{C}_n^n(x^2)^{(n)}(\mathrm{e}^{2x})^{(0)}$的等式右侧变成了$\mathrm{C}_n^0(x^2)^{(0)}(\mathrm{e}^{2x})^{(n)}+\mathrm{C}_n^1(x^2)^{(1)}(\mathrm{e}^{2x})^{(n-1)}+\mathrm{C}_n^2(x^2)^{(2)}(\mathrm{e}^{2x})^{(n-2)}+0+0+\cdots+0$，所以$(x^2\mathrm{e}^{2x})^{(n)}=\mathrm{C}_n^0(x^2)^{(0)}(\mathrm{e}^{2x})^{(n)}+\mathrm{C}_n^1(x^2)^{(1)}(\mathrm{e}^{2x})^{(n-1)}+\mathrm{C}_n^2(x^2)^{(2)}(\mathrm{e}^{2x})^{(n-2)}$。

先来算$\mathrm{C}_n^0(x^2)^{(0)}(\mathrm{e}^{2x})^{(n)}$。

$\mathrm{C}_n^0=1$。$(x^2)^{(0)}$是 0 阶导，任何一个函数的 0 阶导都等于它本身，所以$(x^2)^{(0)}=x^2$。$(\mathrm{e}^{2x})^{(n)}$该怎么算呢？告诉大家一个公式：$(\mathrm{e}^{ax+b})^{(n)}=a^n\mathrm{e}^{ax+b}$，利用这个公式可知$(\mathrm{e}^{2x})^{(n-1)}=2^{n-1}\mathrm{e}^{2x}$。

综上所述，$\mathrm{C}_n^0(x^2)^{(0)}(\mathrm{e}^{2x})^{(n)}=x^2 2^n\mathrm{e}^{2x}$。

再来算$\mathrm{C}_n^1(x^2)^{(1)}(\mathrm{e}^{2x})^{(n-1)}$。

$\mathrm{C}_n^1=n$。$(x^2)^{(1)}=(x^2)'=2x$。利用公式$(\mathrm{e}^{ax+b})^{(n)}=a^n\mathrm{e}^{ax+b}$可知$(\mathrm{e}^{2x})^{(n-1)}=2^{n-1}\mathrm{e}^{2x}$。

综上所述，$C_n^1(x^2)^{(1)}(e^{2x})^{(n-1)}=n\times2x\times2^{n-1}e^{2x}=2^ne^{2x}nx$。

最后来算 $C_n^2(x^2)^{(2)}(e^{2x})^{(n-2)}$。

$C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$。$(x^2)^{(2)}=(x^2)''=2$。利用公式 $(e^{ax+b})^{(n)}=a^ne^{ax+b}$ 可知 $(e^{2x})^{(n-2)}=2^{n-1}e^{2x}$。

综上所述，$C_n^2(x^2)^{(2)}(e^{2x})^{(n-2)}=\frac{n(n-1)}{2}\times2\times2^{n-2}e^{2x}=n(n-1)e^{2x}2^{n-2}$。

由于 $C_n^0(x^2)^{(0)}(e^{2x})^{(n)}$、$C_n^1(x^2)^{(1)}(e^{2x})^{(n-1)}$、$C_n^2(x^2)^{(2)}(e^{2x})^{(n-2)}$ 已经都算出来了，所以

$$\begin{aligned}(x^2e^{2x})^{(n)}&=C_n^0(x^2)^{(0)}(e^{2x})^{(n)}+C_n^1(x^2)^{(1)}(e^{2x})^{(n-1)}+C_n^2(x^2)^{(2)}(e^{2x})^{(n-2)}\\&=x^22^ne^{2x}+2^ne^{2x}nx+n(n-1)e^{2x}2^{n-2}\end{aligned}$$

方法 3. 利用以下 7 个公式来求。

公式①：$(e^{ax+b})^{(n)}=a^ne^{ax+b}$。

公式②：$(\sin(ax+b))^{(n)}=a^n\sin(ax+b+\frac{\pi}{2}\times n)$。

公式③：$(\cos(ax+b))^{(n)}=a^n\sin(ax+b+\frac{\pi}{2}\times n)$。

公式④：$(\frac{1}{ax+b})^{(n)}=\frac{(-1)^na^nn!}{(ax+b)^{n+1}}$。

公式⑤：$[\ln(ax+b)]^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}$。

公式⑥：$[f(x)\pm g(x)]^{(n)}=f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x)$。

公式⑦：$[af(x)]^{(n)}=af^{(n)}(x)$。

方法 3 的适用题型：方法 3 适用于求解不满足“方法 1 的适用题型”也不满足“方法 2 的适用题型”的高阶导数的题。

例. 求 $[\ln(3x+2)]^{(100)}$。

解：首先看一下本题属于不属于“让求高阶导数的题”。凡是一道题让求的导数阶数大于 2，那该题就属于“让求高阶导数的题”。对于本题来说，本题让求的是一百阶导，所以本题属于“让求高阶导数的题”。

那么本题究竟是该用方法 1、方法 2、方法 3 中的哪种方法来做呢？应该是用方法 3 来做。下面解释一下。

首先，本题不能用方法 1 来做，因为方法 1 用于求解的是导数阶数不超过五阶（含五阶）的高阶导数的题。而本题让求一百阶导，明显 $100>5$，所以本题不能用方法 1 来做。

其次，本题也不能用方法 2 来做，因为方法 2 用于求解的是题中给出的函数是两项相乘的形式并且这两个函数中的一个函数最多求四次导再往后求导就全是 0 了，并且让求的导数阶数大于五阶的高阶导数的题。而本题给的函数并不是两项相乘的形式，所以本题不能用方法 2 来做。

因此，本题一定是用方法 3 来做。

根据方法 3 中的公式⑤直接可得

$$[\ln(3x+2)]^{(100)}=\frac{(-1)^{100-1}\times3^{100}\times(100-1)!}{(3x+2)^{100}}=\frac{-3^{100}\times99!}{(3x+2)^{100}}$$

例. 求 $(\frac{1}{5x+8})^{(100)}$。

解：首先看一下本题属于不属于“让求高阶导数的题”。凡是一道题让求的导数阶数大于 2，那该题就属于“让求高阶导数的题”。对于本题来说，本题让求的是一百阶导，所以本题属于“让求高阶导数的题”。

那么本题究竟是该用方法 1、方法 2、方法 3 中的哪种方法来做呢？应该是用方法 3 来做。

首先，本题不能用方法 1 来做，因为方法 1 用于求解的是导数阶数不超过五阶（含五阶）的高阶导数的题。而本题让求一百阶导，明显 $100>5$，所以本题不能用方法 1 来做。

其次，本题也不能用方法 2 来做，因为方法 2 用于求解的是题中给出的函数是两项相乘的形式并且这两个函数中的一个函数最多求四次导再往后求导就全是 0 了，并且让求的导数阶数大于五阶的高阶导数的题。而本题给的函数并不是两项相乘的形式，所以本题不能用方法 2 来做。

因此，本题一定是用方法 3 来做。

根据方法 3 中的公式④直接可得

$$(\frac{1}{5x+8})^{(100)}=\frac{(-1)^{100}\times5^{100}\times100!}{(5x+8)^{100+1}}=\frac{5^{100}\times100!}{(5x+8)^{101}}$$

例. 求$[\sin(5x+9)+\frac{1}{7x+8}+\ln(2x+3)]^{(50)}$。

解：首先看一下本题属于不属于“让求高阶导数的题”。凡是一道题让求的导数阶数大于 2，那该题就属于“让求高阶导数的题”。对于本题来说，本题让求的是一百阶导，所以本题属于“让求高阶导数的题”。

那么本题究竟是该用方法 1、方法 2、方法 3 中的哪种方法来做呢？应该是用方法 3 来做。

首先，本题不能用方法 1 来做，因为方法 1 用于求解的是导数阶数不超过五阶（含五阶）的高阶导数的题。而本题让求五十阶导，明显$50>5$，所以本题不能用方法 1 来做。

其次，本题也不能用方法 2 来做，因为方法 2 用于求解的是题中给出的函数是两项相乘的形式并且这两个函数中的一个函数最多求四次导再往后求导就全是 0 了，并且让求的导数阶数大于五阶的高阶导数的题。而本题给的函数并不是两项相乘的形式，所以本题不能用方法 2 来做。

因此，本题一定是用方法 3 来做。

根据方法 3 中的公式⑥可得

$$[\sin(5x+9)+\frac{1}{7x+8}+\ln(2x+3)]^{(50)}=(\sin(5x+9))^{(50)}+(\frac{1}{7x+8})^{(50)}+(\ln(2x+3))^{(50)} \quad （1）式$$

现在只需算出$(\sin(5x+9))^{(50)}$、$(\frac{1}{7x+8})^{(50)}$、$(\ln(2x+3))^{(50)}$就可以了。

先来算$(\sin(5x+9))^{(50)}$。

根据方法 3 中的公式②可得$(\sin(5x+9))^{(50)}=5^{50}\sin(5x+9+\frac{\pi}{2}\times 50)=-5^{50}\sin(5x+9)$

再来算$(\frac{1}{7x+8})^{(50)}$。

根据方法 3 中的公式④可得$(\frac{1}{7x+8})^{(50)}=\frac{(-1)^{50}\times 7^{50}\times 50!}{(7x+8)^{51}}=\frac{7^{50}\times 50!}{(7x+8)^{51}}$。

最后来算$(\ln(2x+3))^{(50)}$。

根据方法 3 中的公式⑤可得$(\ln(2x+3))^{(50)}=\frac{(-1)^{49}\times 2^{50}\times 49!}{(2x+3)^{50}}=\frac{-2^{50}\times 49!}{(2x+3)^{50}}$。

把$(\sin(5x+9))^{(50)}=-5^{50}\sin(5x+9)$、$(\frac{1}{7x+8})^{(50)}=\frac{7^{50}\times 50!}{(7x+8)^{51}}$、$(\ln(2x+3))^{(50)}=\frac{-2^{50}\times 49!}{(2x+3)^{50}}$代入（1）式中，得

$$[\sin(5x+9)+\frac{1}{7x+8}+\ln(2x+3)]^{(50)}=-5^{50}\sin(5x+9)+\frac{7^{50}\times 50!}{(7x+8)^{51}}+\frac{-2^{50}\times 49!}{(2x+3)^{50}} \quad （2）式$$

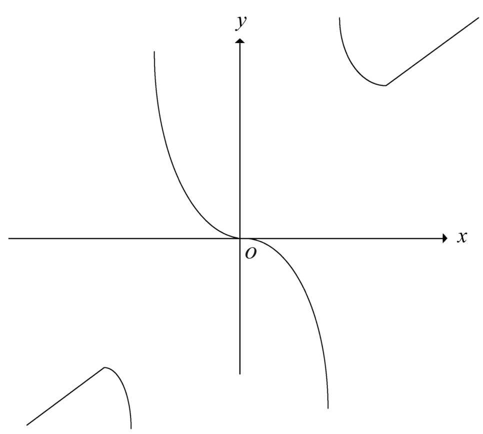
2.8 求曲线的渐近线

渐近线分为三种，分别是水平渐近线、铅直渐近线、斜渐近线。

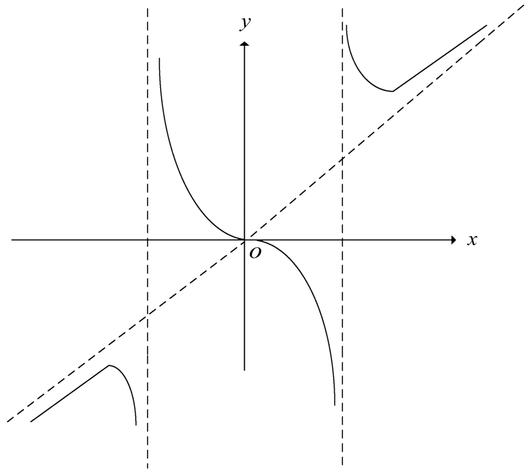
现在来看看究竟什么叫渐近线。

给大家举个例子。

假设函数$f(x)$的图像如下：



下面再画一个图，这个图比刚才的那个图多三条虚线，这三条虚线就是函数$f(x)$的三条渐近线。其中有两条是铅直渐近线，有一条是斜渐近线。



所谓渐近线，指的是可以无限接近却又永远到达不了的线。

由于渐近线分为三种（分别是水平渐近线、铅直渐近线、斜渐近线），所以渐近线的求法也要分“水平渐近线的求法”、“铅直渐近线的求法”、“斜渐近线的求法”三种。

先来看水平渐近线的求法。

当题中给出一个函数 $f(x)$，让求该函数的水平渐近线时，需要分 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 两种情况。

$x \to +\infty$ 的情况：

计算 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，若结果是“常数 a”，则 $y=a$ 就是函数 $f(x)$ 的一条水平渐近线。

$x \to -\infty$ 的情况：

计算 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$，若结果是“常数 b”，则 $y=b$ 就是函数 $f(x)$ 的一条水平渐近线（当然，如果“常数 a = 常数 b”，那么 $y=a$ 和 $y=b$ 就是同一条水平渐近线）。

由此求法可知，一个函数最多有两条水平渐近线。

再来看铅直渐近线的求法。

当题中给出一个函数 $f(x)$，让求该函数的铅直渐近线时，需要找一种点，就是：函数 $f(x)$ 在该点处没有定义，但是存在一个该点的左去心邻域（或者存在一个该点的右去心邻域，或者存在一个该点的去心邻域），函数 $f(x)$ 在该邻域内有定义。

把找到的点记为 x_0。

然后计算 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，如果这两者的计算结果中至少有一个是 ∞，那么就说明 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 的铅直渐近线。

一个函数可以有无穷多条铅直渐近线。

最后看斜渐近线的求法。

当题中给出一个函数 $f(x)$，让求该函数的斜渐近线时，需要分 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 两种情况。

$x \to +\infty$ 的情况：

计算 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$，若结果是“非零常数 a”，则再计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$，若结果是“常数 b”，则 $y=ax+b$ 就是函数 $f(x)$ 的一条斜渐近线。

$x \to -\infty$ 的情况：

计算 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$，若结果是“非零常数 c”，则再计算一下 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-cx]$，若结果是“常数 d”，则 $y=cx+d$ 就是函数 $f(x)$ 的一条斜渐近线（当然，如果“常数 a = 常数 b”、“常数 c = 常数 d”，那么 $y=ax+b$ 和 $y=cx+d$ 就是同一条斜渐近线）。

由此求法可知，一个函数最多有两条斜渐近线。

下面给大家讲一个小技巧，那就是：

水平渐近线和斜渐近线都是分 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 这两种情况的，现在要告诉大家的是，在 $x \to +\infty$ 的情况下，有水平渐近线就肯定没有斜渐近线，有斜渐近线就肯定没有水平渐近线。在 $x \to -\infty$ 的情况下，有水平渐近线就肯定没有斜渐近线，有斜渐近线就肯定没有水平渐近线。

例. 求函数 $y=\ln x$ 的铅直渐近线。

解： 本题问的是铅直渐近线，铅直渐近线的求法是，当题中给出一个函数 $f(x)$，让求该函数的铅直渐近线时，需要找一种点，就是函数 $f(x)$ 在该点处没有定义，但是存在一个该点的左去心邻域（或者存在一个该点的右去心

邻域，或者存在一个该点的去心邻域），函数 $f(x)$ 在该邻域内有定义。

把找到的点记为 x_0。

然后计算 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，如果这两者的计算结果中至少有一个是 ∞，那么就说明 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 的铅直渐近线。

针对本题而言，找到的 x_0 就是 0（因为函数 $y=\ln x$ 在 $x=0$ 处没定义，但肯定存在一个 0 的右去心邻域，在该邻域内函数 $y=\ln x$ 有定义，如在区间 $(0,0.1)$ 内 $y=\ln x$ 有定义，所以找的点是 0）。

有的同学可能会问，为什么只有 0 这一个点呢？怎么不找 -1，-2 等这些点？这其实很容易解释。拿 -1 举例，函数 $y=\ln x$ 在 $x=-1$ 处没定义，但是根本不存在任何一个 -1 的左去心邻域（右去心邻域或去心邻域）使得函数 $y=\ln x$ 在该邻域内有定义。

计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，如果这两者的计算结果中至少有一个是 ∞，那么就说明 $x=0$ 是函数 $y=\ln x$ 的铅直渐近线。

先来算 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$。

本题中说 $f(x)=\ln x$，可以将其改写为 $f(x)\begin{cases}\ln x, & x>0\\ \text{无定义}, & x\leqslant 0\end{cases}$。那么应该把 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化成什么呢？由于是 $x\to 0^-$，指的是 x 从 0 的左侧趋于 0，也就是 x 取 -0.2、-0.1 等。但是因为 $f(x)$ 在 $x=-0.2$、$x=-0.1$ 等处根本没有定义，也就是说 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化不了，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 根本不存在。

再来算 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$。

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$ （1）式

由画图法可知

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ （2）式

如果一道题的计算结果是 $+\infty$ 或 $-\infty$，那么都可以将此计算结果改写为 ∞，所以有

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=\infty$ （3）式

（1）式、（3）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\infty$ （4）式

综上所述，由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 这两者的计算结果中有一个是 ∞，满足“至少有一个是 ∞”，所以 $x=0$ 是函数 $y=\ln x$ 的铅直渐近线。

例. 求曲线 $y=x\ln(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x})(x>0)$ 的渐近线方程。

解：本题问的是渐近线，而没有像上一道题一样具体指明求哪种渐近线，这就意味着三种渐近线（水平渐近线、铅直渐近线、斜渐近线）都需要求。

（1）先来求一下水平渐近线。

$x\to+\infty$ 的情况，也就是求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$。

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[x\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})]$$

由第 1 章所讲的极限的计算方法可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x\ln(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x})]=\infty$ 而不是常数，所以在 $x\to+\infty$ 的情况下没有求出水平渐近线。

$x\to-\infty$ 的情况，也就是求 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$。

本题中说 $y=x\ln(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x})](x>0)$，可以将其改写为 $f(x)\begin{cases}x\ln(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}), & x>0\\ \text{无定义}, & x\leqslant 0\end{cases}$。那么应该把 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化成什么呢？由于是 $x\to-\infty$，这指的是 x 是一个很小很小的负数，而 $f(x)$ 在 $x\leqslant 0$ 时根本没有定义，也就是说 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化不了，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 根本不存在。所以在 $x\to-\infty$ 的情况下也没有求出水平渐近线。

综上所述，函数 $y=x\ln(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x})](x>0)$ 根本就没有水平渐近线。

（2）再来求铅直渐近线。

之前给大家讲过，铅直渐近线的求法是：

当题中给出一个函数 $f(x)$，让求该函数的铅直渐近线时，我们需要找一种点，什么点呢？就是：函数 $f(x)$ 在该点处没有定义，但是存在一个该点的左去心邻域（或者存在一个该点的右去心邻域，或者存在一个该点的去心邻域），函数 $f(x)$ 在该邻域内有定义。

我们把找到的点记为 x_0。

然后我们现在计算一下 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，如果这两者的计算结果中至少有一个是 ∞，那么就说明 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 的铅直渐近线。

针对本题而言，找到的 x_0 是 0（因为函数 $y=x\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})$ 在 $x=0$ 处没定义，但肯定存在一个 0 的右去心邻域，在该邻域内函数 $y=x\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})$ 有定义，如在区间 $(0,0.1)$ 内 $y=x\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})$ 有定义，所以找的点是 0）。

先来算 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$。

本题中说 $y=x\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})(x>0)$，可以将其改写为 $f(x)\begin{cases} x\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x}), & x>0 \\ \text{无定义}, & x\leqslant 0 \end{cases}$。那么应该把 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化成什么呢？由于是 $x\to 0^-$，指的是 x 从 0 的左侧趋于 0，而 $f(x)$ 在 $x\leqslant 0$ 时根本没有定义，也就是说 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 中的 $f(x)$ 显化不了，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 根本不存在。

再来算 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$。

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x}) \qquad \text{（1）式}$$

由第 1 章所讲的函数极限的计算方法可知

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})=0 \qquad \text{（2）式}$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0 \qquad \text{（3）式}$$

综上所述，由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 这两者的计算结果都不是 ∞，不满足“至少有一个是 ∞”，所以函数 $y=x\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})(x>0)$ 根本就没有铅直渐近线。

（3）最后求一下斜渐近线。

先来考虑 $x\to+\infty$ 的情况。

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x}) \qquad \text{（4）式}$$

以前给大家讲过，像 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})$ 这种复合函数求极限的题直接将 lim 深入即可，所以有

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})=\ln[\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{e}+\frac{1}{x})] \qquad \text{（5）式}$$

（4）式、（5）式相结合，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\ln[\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{e}+\frac{1}{x})] \qquad \text{（6）式}$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}=\mathrm{e}$，这说明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}$、$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$ 这两者肯定不可能都是 ∞（因为已经有一个是 e 了），所以根据极限的可拆性，有

$$\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{e}+\frac{1}{x})=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\mathrm{e}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} \qquad \text{（7）式}$$

由画图法可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$。将 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ 代入（7）式得

$$\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{e}+\frac{1}{x})=\mathrm{e} \qquad \text{（8）式}$$

将（8）式代入（6）式，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\ln\mathrm{e}=1 \qquad \text{（9）式}$$

目前已经算出了 $a=1$，1 是非零常数，所以接下来再算一下 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$。

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}[x\ln(e+\frac{1}{x})-x]$ （10）式

通过计算可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(e+\frac{1}{x})=+\infty$， $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x\ln(e+\frac{1}{x})-x]$ 属于同号无穷相减的题。根据第 1 章所讲的函数极限计算的固定套路法可知，接下来应该提因子，即

$\lim\limits_{x\to+\infty}[x\ln(e+\frac{1}{x})-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(e+\frac{1}{x})-1]$ （11）式

（10）式、（11）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(e+\frac{1}{x})-1]$ （12）式

将 $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(e+\frac{1}{x})-1]$ 变形为

$\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(e+\frac{1}{x})-1]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(e+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}}$ （13）式

（12）式、（13）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(e+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}}$ （14）式

通过计算可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(e+\frac{1}{x})-1]=0$、 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$，所以可以用第一类洛必达法则来计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(e+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}}$，即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}}\overset{?}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(-\frac{1}{x^2})\times\frac{1}{e+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e+\frac{1}{x}}=\frac{1}{e}$$

由于最后的计算结果是 $\frac{1}{e}$， $\frac{1}{e}$ 是常数，属于“常数或 ∞”，所以将上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“$=$”，即

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(e+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{e}$ （15）式

（14）式、（15）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\frac{1}{e}$ （16）式

目前 b 也算完了， $b=\frac{1}{e}$，所以 $y=ax+b=1x+\frac{1}{e}=x+\frac{1}{e}$ 是函数 $y=x\ln(e+\frac{1}{x})$ 的一条斜渐近线。

再来考虑 $x\to-\infty$ 的情况。

先来算一下 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$。本题中说 $y=x\ln(e+\frac{1}{x})(x>0)$，可以将其改写为 $f(x)\begin{cases}x\ln(e+\frac{1}{x}), & x>0\\ \text{无定义}, & x\leqslant 0\end{cases}$。那么应该把 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ 中的 $f(x)$ 显化成什么呢？由于是 $x\to-\infty$，指的是 x 是一个很小很小的负数，而 $f(x)$ 在 $x\leqslant 0$ 时根本没有定义，也就是说 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ 中的 $f(x)$ 显化不了，所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ 根本不存在。也就是说 c 求不出来，就无法再往下算 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-cx]$ 了。所以说在 $x\to-\infty$ 的情况下也没有求出斜渐近线。

综上所述，函数 $y=x\ln(e+\frac{1}{x})(x>0)$ 有一条斜渐近线 $y=x+\frac{1}{e}$。

按照水平渐近线的求法、铅直渐近线的求法、斜渐近线的求法分别求完了，最终得到本题答案：函数 $y=x\ln(e+\frac{1}{x})(x>0)$ 没有水平渐近线，也没有铅直渐近线，有一条斜渐近线 $y=x+\frac{1}{e}$。

2.9　分段函数求导

分段函数的求导方法如下：对于分段点来说，要用导数的定义式来求；对于其他点来说，直接用导数公式来求即可。

例. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，求 $f'(x)$？

解： 本题让求 $f'(x)$，而 $f(x)$ 是分段函数，所以本题很明显属于“分段函数求导”，应该按照刚刚讲的方法来做本题。

分段函数的求导方法如下：对于分段点来说，要用导数的定义式来求；对于其他点来说，直接用导数公式来求即可。

对于本题来说，分段点是 0。所以对于分段点 $x=0$ 来说，要用导数的定义式来求；对于 $x\neq 0$ 来说，直接用导数公式来求即可。

先用导数的定义式求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数。

在本章的 2.1 节给大家讲过，函数在某一点处可导的定义式是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。现在需要求的是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数，所以需要算出 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$。

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}-1}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}-\dfrac{\Delta x}{\Delta x}}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\sin\Delta x-\Delta x}{\Delta x}}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x-\Delta x}{(\Delta x)^2}\\&\overset{?}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x-1}{2\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}(\Delta x)^2}{2\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{1}{4}\Delta x\\&=0\end{aligned}$$

由于最终的计算结果是 0，0 是常数，属于“常数或 ∞”，所以把上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“$=$”，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=0$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数是 0。

再来用导数公式求 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 处的导数。

由于 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，所以当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=(\dfrac{\sin x}{x})'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$。

现在 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数和 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 处的导数都已经求完了，所以本题的答案是

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

例. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0\\ 0, & x=0\\ \mathrm{e}^x-1, & x<0\end{cases}$，求 $f'(x)$？

解：本题让求 $f'(x)$，而 $f(x)$ 是分段函数，所以本题很明显属于“分段函数求导”，应该按照刚刚讲的方法来做本题。

对于本题来说，分段点是 0。所以对于分段点 $x=0$ 来说，要用导数的定义式来求；对于 $x>0$ 和 $x<0$ 来说，直接用导数公式来求即可。

先用导数的定义式求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数。

在本章的 2.1 节给大家讲过，函数在某一点处可导的定义式是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。现在需要求的是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数，所以需要算出 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$。

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-0}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\end{aligned}$$

然后要分 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$ 和 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$ 来做。那么为何上一道题不用分而本题就要分呢？这是因为本题如果不分，就不知道要将 $f(\Delta x)$ 显化成什么。上一道题中说 $\Delta x\to 0$，由于上一道题中给的 $f(x)$ 是 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，所以无论 Δx 是从右侧趋于 0 还是从左侧趋于 0，$f(\Delta x)$ 都肯定被显化为 $\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}$。而本题虽然也是 $\Delta x\to 0$，但由于本题所给的是 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0\\ 0, & x=0\\ e^x-1, & x<0\end{cases}$，导致 Δx 从右侧趋于 0 和 Δx 从左侧趋于 0 时 $f(\Delta x)$ 被显化成的公式不一样。要分 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$ 和 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$ 来做。

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{e^{\Delta x-1}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=1$，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=1$。将 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=1$ 代入 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$ 中，得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=1$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数是 1。

再用导数公式求 $f(x)$ 在 $x>0$、$x<0$ 处的导数。

由于 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0\\ 0, & x=0\\ e^x-1, & x<0\end{cases}$，所以当 $x>0$ 时，$f'(x)=(\sin x)'=\cos x$；当 $x<0$ 时，$f'(x)=(e^x-1)'=e^x$。

现在 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数和 $f(x)$ 在 $x>0$、$x<0$ 处的导数都已经求完了，所以本题的答案是

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x>0\\ 1, & x=0\\ e^x, & x<0\end{cases}$$

例. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\geqslant 0\\ e^x-1, & x<0\end{cases}$，求 $f'(x)$？

解：本题让求 $f'(x)$，而 $f(x)$ 是分段函数，所以本题很明显属于“分段函数求导”，应该按照刚刚讲的方法来做本题。

对于本题来说，分段点是 0。所以对于分段点 $x=0$ 来说，要用导数的定义式来求；对于 $x>0$、$x<0$ 来说，直接用导数公式来求即可。

讲到这里，有些同学可能不太明白：前两道题中所给的 $f(x)$ 都是把 $x=0$ 单分出了一段，而本题所给的 $f(x)$ 并

没有把 $x=0$ 单分出来一段，所以他们不理解为何本题所给的函数 $f(x)$ 的分段点是 0。

这个问题其实很好回答，例如给大家写四个函数：$f_1(x)=\begin{cases} p(x), & x<b \\ q(x), & x=b \\ r(x), & b<x<a \\ s(x), & x=a \\ t(x), & x>a \end{cases}$、

$f_2(x)=\begin{cases} p(x) & x<\mathrm{b} \\ q(x) & b\leqslant x\leqslant a \\ r(x) & x=a \\ s(x) & x>a \end{cases}$、$f_2(x)=\begin{cases} p(x) & x<\mathrm{b} \\ q(x) & x=b \\ r(x) & x<x\leqslant a \\ s(x) & x>a \end{cases}$、$f_2(x)=\begin{cases} p(x) & x<\mathrm{b} \\ q(x) & b\leqslant x\leqslant a \\ r(x) & x>a \end{cases}$。这四个函数的分段点均为 $x=a$ 和 $x=b$。并不是只有单分出来的写为“ $x=$某某 ”的点才是分段点。

所以，对于本题所给的函数 $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\geqslant 0 \\ \mathrm{e}^x-1, & x<0 \end{cases}$ 来说，分段点是 $x=0$。

先用导数的定义式求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数。

在本章的 2.1 节给大家讲过，函数在某一点处可导的定义式是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。现在需要求的是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数，所以需要算出 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$。

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-\sin 0}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-0}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\end{aligned}$$

然后要分 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$ 和 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$ 来做。因为如果不分，就不知道要将 $f(\Delta x)$ 显化成什么。

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{\Delta x-1}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=1$，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=1$。将 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=1$ 代入 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$ 中，得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=1$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数是 1。

再用导数公式求 $f(x)$ 在 $x>0$、$x<0$ 处的导数。

由于 $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\geqslant 0 \\ \mathrm{e}^x-1, & x<0 \end{cases}$，可以化为 $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x>0 \\ \sin x, & x=0 \\ \mathrm{e}^x-1, & x<0 \end{cases}$，所以当 $x>0$ 时，$f'(x)=(\sin x)'=\cos x$；当 $x<0$ 时，$f'(x)=(\mathrm{e}^x-1)'=\mathrm{e}^x$。

现在 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数和 $f(x)$ 在 $x>0$、$x<0$ 处的导数都已经求完了，所以本题的答案是

$$f'(x)=\begin{cases} \cos x, & x>0 \\ 1, & x=0 \\ \mathrm{e}^x, & x<0 \end{cases}$$

例. 设 $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x>0 \\ 2, & x=0 \\ \mathrm{e}^x-1, & x<0 \end{cases}$，求 $f'(x)$？

解：本题看一眼就知道是一道出错了的题。因为本题的问题是 $f'(x)$，既然这么问，就是暗示函数 $f(x)$ 在定义

域内的每一点都可导。

可是实际上根本不是这样。

在本章 2.4 节中给大家讲过，如果函数 $f(x)$ 在某一点可导，那么函数 $f(x)$ 在该点必定连续。如果一个命题对，那么该命题的逆否命题一定也对。也就是说：如果函数 $f(x)$ 在某一点不连续，那么函数 $f(x)$ 在该点必定不可导。

那看看本题所给的函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续不连续。

先算极限值。

由于 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0 \\ 2, & x=0 \\ \mathrm{e}^x-1, & x<0\end{cases}$，所以

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sin x=\sin 0=0$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\mathrm{e}^x-1)=\mathrm{e}^0-1=1-1=0$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0$

所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ 。

再算函数值。

由于 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0 \\ 2, & x=0 \\ \mathrm{e}^x-1, & x<0\end{cases}$，所以

$f(0)=2$

现在极限值和函数值我们已经都算完了。由于 $\lim\limits_{x\to0}f(x)\neq f(0)$，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处必定不可导。而本题让求 $f'(x)$，暗示函数 $f(x)$ 在定义域内的每一点都可导，而事实情况是函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，所以本题出错了。

通过本题，想告诉大家的是：连续是可导的前提。

当然，有些同学看见这道题以后，可能根本没想连续不连续，而是对分段点 $x=0$，直接用了导数的定义式。因为如果直接用导数定义式，最终也会发现函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，计算 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$，就会发现 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ 根本不等于常数。

例. 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}\int_0^x \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t, & x\geqslant0 \\ ax^2+bx, & x<0\end{cases}$，已知 $f'(x)$ 连续，则（　　）。

（A）b 为任意常数，而 $a=0$

（B）b 为任意常数，而 $a=\mathrm{e}$

（C）a 为任意常数，而 $b=0$

（D）a 为任意常数，而 $b=\mathrm{e}$

解：大家一定要注意，本题说的是函数 $f'(x)$ 连续，不是 $f(x)$ 连续。

本题说函数 $f'(x)$ 连续，则暗示函数 $f'(x)$ 存在，所以现在首先应该求出函数 $f'(x)$。

由于本题所给的函数 $f(x)$ 是一个分段函数，所以求 $f'(x)$ 属于分段函数求导。

分段函数的求导方法如下：对于分段点来说，要用导数的定义式来求；对于其他点来说，直接用导数公式来求即可。

对于本题来说，分段点是 0。所以对于分段点 $x=0$ 来说，要用导数的定义式来求；对于 $x>0$、$x<0$ 来说，直接用导数公式来求即可。

先用导数的定义式求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数。

在本章的 2.1 节给大家讲过，函数在某一点处可导的定义式是 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。现在需要求的是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数，所以需要算出 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$。

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-\mathrm{e}\int_0^0 \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-0}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$$

对于上式中的 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-\mathrm{e}\int_0^0 \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-0}{\Delta x}$ 解释一下，之所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-\mathrm{e}\int_0^0 \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-0}{\Delta x}$，是因为 $\mathrm{e}\int_0^0 \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t=0$。$\mathrm{e}\int_0^0 \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$ 为什么等于 0 呢？这涉及积分的知识，那就是：当积分上限和积分下限相等时，积分的值就一定是 0。对于 $\mathrm{e}\int_0^0 \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$ 而言，积分上限和积分下限都是 0，属于“积分上限和积分下限相等”，所以 $\mathrm{e}\int_0^0 \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t=0$，$\mathrm{e}\int_0^0 \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}\times 0=0$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-\mathrm{e}\int_0^0 \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-0}{\Delta x}$。

然后要分 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$ 和 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$ 来做。因为如果不分，就不知道要将 $f(\Delta x)$ 显化成什么。

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{a(\Delta x)^2+b(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}(a\Delta x+b)=b$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}\int_0^{\Delta x}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{2\Delta x}\times\mathrm{e}}{1}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\mathrm{e}^{2\Delta x+1}=\mathrm{e}$$

注意：上式用到了“变上限积分求导”，这在本章 2.5 节给大家讲过。

由于最后的计算结果是 e，e 是常数，属于“常数或∞”，所以将上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“=”，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\mathrm{e}$。

本题说函数 $f'(x)$ 连续，则暗示函数 $f'(x)$ 存在，既然函数 $f'(x)$ 存在，所以 $f'(0)$ 存在。由于 $f'(0)$ 存在，所以肯定有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$（因为 $f'(0)$ 存在说明 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x+0)-f(0)}{\Delta x}$ 存在，而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x+0)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$，所以 $f'(0)$ 存在说明 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$ 存在。而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$ 存在又说明 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$），所以 b=e。本题选择（D）选项（即 a 为任意常数，而 b=e）。不过现在不是考试，而是学知识，所以看看为何 a 为任意常数。

由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$=e，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$=e。将 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$=e 代入 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$ 中，得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x+0)-f(0)}{\Delta x}$=e

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数是 e。

再用导数公式求 $f(x)$ 在 $x>0$、$x<0$ 处的导数。

由于 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}\int_0^x \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t, & x\geqslant 0\\ ax^2+bx, & x<0\end{cases}$，$f(x)$ 可以化为 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}\int_0^x \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t, & x>0\\ \mathrm{e}\int_0^x \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t, & x=0\\ ax^2+bx, & x<0\end{cases}$，所以当 $x>0$ 时，$f'(x)=(\mathrm{e}\int_0^x \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t)'=\mathrm{e}^{2x+1}$（注意，这里用到了本章 2.5 节所讲的变上限积分求导公式）；当 $x<0$ 时，$f'(x)=(ax^2+bx)'=2ax+b$。而刚才已经算出了 b=e，所以当 $x<0$ 时，$f'(x)=2ax+\mathrm{e}$。

现在 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数和 $f(x)$ 在 $x>0$、$x<0$ 处的导数都已经求完了，所以 $f'(x)$ 是

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2x+1}, & x>0\\ \mathrm{e}, & x=0\\ 2ax+\mathrm{e}, & x<0\end{cases}$$

由于题中说 $f'(x)$ 连续，说明函数 $f'(x)$ 在定义域上的每一点都连续。也就是说，函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 时、$x=0$ 时、$x<0$ 时都连续。所以无论 a 是多少，$f'(x)$ 在区间 $x>0$ 和 $x<0$ 上一定连续。所以只需求出当 a 等于多少时，$f'(x)$ 在点 $x=0$ 处连续就可以了。

由于 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，所以有 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$。现在看看 a 等于多少时，有

$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)$。

先求函数值。

由于 $f(x)=\begin{cases}e^{2x+1}, & x>0\\ e, & x=0\\ 2ax+e, & x<0\end{cases}$，所以 $f'(0)=e$。

再求极限值。

由于 $f(x)=\begin{cases}e^{2x+1}, & x>0\\ e, & x=0\\ 2ax+e, & x<0\end{cases}$，所以

$\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(2ax+e)=e$

$\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^{2x+1}=e$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=e$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=e$。

可见，无论 a 为多少，恒有 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)$，所以 a 为任意常数。

第 3 章

微分中值定理及其应用

3.1　求函数在给定区间的单调性

首先解释一下“单调性”这三个字的意思。

设函数 $f(x)$ 在某区间上有定义，若对于这个区间上的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在该区间上是单调增加的。

设函数 $f(x)$ 在某区间上有定义，若对于这个区间上的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在该区间上是单调减少的。

本节要讨论的题型是：题中给定了一个函数，又给定了一个区间，问该函数在该区间的单调性。

那么这种题型的解题方法是什么呢？

求函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$。如果求得的导函数 $f'(x)$ 在题中给定的那个区间恒大于 0，则说明函数 $f(x)$ 在该区间单调增加；如果求得的导函数 $f'(x)$ 在题中给定的那个区间恒小于 0，则说明函数 $f(x)$ 在该区间单调减少。

下面来看例题。

例. 请判定一下函数 $y = x - \sin x$ 在 $(0, 2\pi)$ 上的单调性。

解： 由于本题中给定了一个函数，又给定了一个区间，且问题是该函数在该区间的单调性，所以本题属于本节所讨论的题型，应该用刚刚讲完的解题方法来求解本题。

由于 $y = x - \sin x$，所以 $y' = 1 - \cos x$。

现在看一下导函数 $y' = 1 - \cos x$ 在题中给定的区间 $(0, 2\pi)$ 上到底是恒大于 0 的还是恒小于 0 的。

在区间 $(0, 2\pi)$ 上，$\cos x$ 的值肯定在区间 $(-1, 1)$ 内。所以，在区间 $(0, 2\pi)$ 上，$1 - \cos x$ 的值肯定是在区间 $(0, 2)$ 内。

也就是说，在区间 $(0, 2\pi)$ 上，$y' > 0$，所以函数 $y = x - \sin x$ 在 $(0, 2\pi)$ 上单调增加。

例. 请判定一下函数 $y = e^x - x - 1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的单调性。

解： 由于本题中给定了一个函数，又给定了一个区间，且问题是该函数在该区间的单调性，所以本题属于本节所讨论的题型，应该用刚刚讲完的解题方法来求解本题。

由于 $y = e^x - x - 1$，所以 $y' = e^x - 1$。

现在看一下导函数 $y' = e^x - 1$ 在题中给定的区间 $(-\infty, 0)$ 上到底是恒大于 0 的还是恒小于 0 的。

在区间 $(-\infty, 0)$ 上，e^x 的值肯定在区间 $(0, 1)$ 内。所以，在区间 $(-\infty, 0)$ 上，$e^x - 1$ 的值肯定是在区间 $(-1, 0)$ 内。

也就是说，在区间 $(-\infty, 0)$ 上，$y' < 0$，所以函数 $y = e^x - x - 1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调减少。

3.2　求函数的单调区间

本节要讨论的题型是：题中给定了一个函数，问该函数的单调区间。

那么这种题型的解题方法是什么呢？

第一步：写出该函数的定义域。

第二步：求两种点，第一种点是驻点（驻点指的是一阶导数为 0 的点），第二种点是不可导点（也就是一阶导数没有定义的点）。

第三步：用刚才求出的驻点和不可导点划分定义域。

第四步：每个区间内任取一个点（取点的原则是好计算），然后把取的那个点代入导函数中，依据导函数大于 0 还是小于 0 确定单调性。

下面来看例题。

例. 请判定一下函数 $y=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间。

解： 由于本题中给定了一个函数，且问题是该函数的单调区间，所以本题属于本节所讨论的题型，应该用刚刚讲完的解题方法来求解本题。

第一步：写出该函数的定义域。

对于本题而言，定义域是 $(-\infty,+\infty)$ 。

第二步：求两种点，第一种点是驻点（驻点指的是一阶导数为 0 的点），第二种点是不可导点（也就是一阶导数没有定义的点）。

先来求驻点。

驻点指的是一阶导数为 0 的点，所以要想求驻点，就要先求一阶导数。由于 $y=2x^3-9x^2+12x-3$ ，所以 $y'=6x^2-18x+12$ 。然后令一阶导数为 0，即

$$6x^2-18x+12=0$$

解得 $x=1$ 或 $x=2$ 。

求得的驻点一共有两个，一个是 1，一个是 2。

再来求不可导点（也就是一阶导数没有定义的点）。

一阶导数是 $y'=6x^2-18x+12$ ，而在第一步求得的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上 y' 不存在没有定义的点，所以没有不可导点。

第三步：用刚才求出的驻点和不可导点划分定义域。

对于本题而言，第二步求出的驻点和不可导点总共有两个（其中两个驻点，没有不可导点），所以用这两个点 $x=1$、$x=2$ 划分定义域 $(-\infty,+\infty)$ ，可以划分为三个区域： $(-\infty,1)$ 、 $(1,2)$ 、 $(2,+\infty)$ 。

第四步：每个区间内任取一个点（取点的原则是好计算），然后把取的那个点代入导函数中，依据导函数大于 0 还是小于 0 确定单调性。

对于本题而言，在区间 $(-\infty,1)$ 内任取一个点 -2 ，然后将 $x=-2$ 代入导函数 $y'=6x^2-18x+12$ 中，解得 $y'=24+36+12=72$ 。由于 $y'>0$ ，所以函数 $y=2x^3-9x^2+12x-3$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递增。

在区间 $(1,2)$ 内任取一个点 $\frac{3}{2}$ ，然后将 $x=\frac{3}{2}$ 代入导函数 $y'=6x^2-18x+12$ 中，解得 $y'=\frac{27}{2}-27+12=-\frac{3}{2}$ 。由于 $y'<0$ ，所以函数 $y=2x^3-9x^2+12x-3$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递减。

在区间 $(2,+\infty)$ 内任取一个点 3，然后将 $x=3$ 代入导函数 $y'=6x^2-18x+12$ 中，解得 $y'=54-54+12=12$ 。由于 $y'>0$ ，所以函数 $y=2x^3-9x^2+12x-3$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增。

例. 请判定一下函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间。

解： 由于本题中给定了一个函数，且问题是该函数的单调区间，所以本题属于本节所讨论的题型，应该用刚刚讲完的解题方法来求解本题。

第一步：写出该函数的定义域。

对于本题而言，定义域是 $(-\infty,+\infty)$ 。

第二步：求两种点，第一种点是驻点（驻点指的是一阶导数为 0 的点），第二种点是不可导点（也就是一阶导数没有定义的点）。

先来求驻点。

驻点指的是一阶导数为 0 的点，所以要想求驻点，就要先求一阶导数。由于 $y=\sqrt[3]{x^2}$ ，所以 $y'=\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 。然后令一阶导数为 0，即

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=0$$

发现无解。

也就是说，根本没有驻点。

再来求不可导点（也就是一阶导数没有定义的点）。

一阶导数是 $y'=\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ，在第一步求得的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上 y' 存在没有定义的点，即当 $x=0$ 时， y' 没有定义。

求出了不可导点，一共只有一个，就是 $x=0$ 。

第三步：用刚才求出的驻点和不可导点划分定义域。

对于本题而言，第二步求出的驻点和不可导点总共有一个（其中零个驻点，一个不可导点），所以用这一个点 $x=0$ 划分定义域 $(-\infty,+\infty)$，可以划分为两个区域：$(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$。

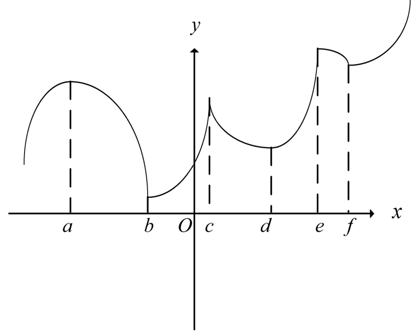
第四步：每个区间内任取一个点（取点的原则是好计算），然后把取的那个点代入导函数中，依据导函数大于 0 还是小于 0 确定单调性。

对于本题而言，在区间 $(-\infty,0)$ 内任取一个点 -8，然后将 $x=-8$ 代入导函数 $y'=\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 中，解得 $y'=-\frac{1}{3}$。由于 $y'<0$，所以函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减。

在区间 $(0,+\infty)$ 内任取一个点 8，然后将 $x=8$ 代入导函数 $y'=\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 中，解得 $y'=\frac{1}{3}$。由于 $y'>0$，所以函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

3.3　求函数的极值点与极值

先讲一下什么叫“极值点”，什么叫“极值”，这其实就是波峰、波谷。下面给大家举一个例子。



以上这个图像是函数 $y=f(x)$ 的图像。点 $x=a$、$x=b$、$x=c$、$x=d$、$x=e$、$x=f$ 都是函数 $y=f(x)$ 的极值点，其中 $x=a$、$x=c$、$x=e$ 是极大值点，$x=b$、$x=d$、$x=f$ 是极小值点。

通过以上这个例子，大家应该明白什么叫“极值点”了，可以把极值点理解为单调递增区间和单调递减区间的分界点。

再来看看什么叫“极值”。所谓“极值”，指的就是“极值点所对应的函数值”。比如在上例中，极值是 $f(a)$、$f(b)$、$f(c)$、$f(d)$、$f(e)$、$f(f)$，其中 $f(a)$、$f(c)$、$f(e)$ 是极大值，$f(b)$、$f(d)$、$f(f)$ 是极小值。

现在，问大家一个问题：极大值是一定大于极小值吗？当然不是，比如在上例中，$f(c)$ 是极大值，$f(f)$ 是极小值，从图中可以明显看出，$f(f)>f(c)$。所以，极大值并非一定大于极小值。

本节要讨论的题型是：题中给定了一个函数，问该函数的极值点（或问函数的极值）。

那么这种题型的解题方法是什么呢？

第一步：写出该函数的定义域。

第二步：求两种点，第一种点是驻点（驻点指的是一阶导数为 0 的点），第二种点是不可导点（也就是一阶导数没有定义的点）。

第三步：用刚才求出的驻点和不可导点划分定义域。

第四步：每个区间内任取一个点（取点的原则是好计算），然后把取的那个点代入导函数中，依据导函数大于 0 还是小于 0 确定单调性。

第五步：极值点肯定是取自驻点或不可导点。具体地说，就是看一下每个驻点和不可导点两侧区域的单调性。“左增右减”则是极大值点，“左减右增”则是极小值点，“同增同减”则不是极值点。

若题目问的是“极值点”，则到此就做完了，没有第六步；若题目问的是“极值”，就做接下来的第六步。

第六步：将上一步所求得的极值点代入函数中，算出函数值，即是极值。

本节所讲的题型的解题方法中的前四步其实就是上一节所讲的题型的解题方法。

下面来看例题。

例. 求函数 $y=(x-4)\times\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的极值。

解： 由于本题中给定了一个函数，且问题是求该函数的极值，所以本题属于本节所讨论的题型，应该用刚刚讲完的解题方法来求解本题。

第一步：写出该函数的定义域。

对于本题而言，定义域是$(-\infty,+\infty)$。

第二步：求两种点，第一种点是驻点（驻点指的是一阶导数为 0 的点），第二种点是不可导点（也就是一阶导数没有定义的点）。

先来求驻点。

驻点指的是一阶导数为 0 的点，所以要想求驻点，就要先求一阶导数。由于$y=(x-4)\times\sqrt[3]{(x+1)^2}$，所以$y'=\dfrac{5(x-1)}{3\times\sqrt[3]{x+1}}$。然后令一阶导数为 0，即

$$\frac{5(x-1)}{3\times\sqrt[3]{x+1}}=0$$

解得$x=1$。

求得的驻点一共只有一个，就是$x=1$。

再来求不可导点（也就是一阶导数没有定义的点）。

一阶导数是$y'=\dfrac{5(x-1)}{3\times\sqrt[3]{x+1}}$，在第一步求得的定义域$(-\infty,+\infty)$上$y'$存在没有定义的点，当$x=-1$时，$y'$没有定义。

求得的不可导点，一共只有一个，就是$x=-1$。

第三步：用刚才求出的驻点和不可导点划分定义域。

对于本题而言，第二步求出的驻点和不可导点总共有两个（其中一个驻点，一个不可导点），所以用这两个点$x=-1$、$x=1$划分定义域$(-\infty,+\infty)$，可以划分为三个区域：$(-\infty,-1)$、$(-1,1)$、$(1,+\infty)$。

第四步：每个区间内任取一个点（取点的原则是好计算），然后把取的那个点代入导函数中，依据导函数大于 0 还是小于 0 确定单调性。

对于本题而言，在区间$(-\infty,-1)$内任取一个点-9，然后将$x=-9$代入导函数$y'=\dfrac{5(x-1)}{3\times\sqrt[3]{x+1}}$中，解得$y'=\dfrac{25}{3}$。由于$y'>0$，所以函数$y=(x-4)\times\sqrt[3]{(x+1)^2}$在区间$(-\infty,-1)$上单调递增。

在区间$(-1,1)$内任取一个点0，然后将$x=0$代入导函数$y'=\dfrac{5(x-1)}{3\times\sqrt[3]{x+1}}$中，解得$y'=-\dfrac{5}{3}$。由于$y'<0$，所以函数$y=(x-4)\times\sqrt[3]{(x+1)^2}$在区间$(-1,1)$上单调递减。

在区间$(1,+\infty)$内任取一个点7，然后将$x=7$代入导函数$y'=\dfrac{5(x-1)}{3\times\sqrt[3]{x+1}}$中，解得$y'=5$。由于$y'>0$，所以函数$y=(x-4)\times\sqrt[3]{(x+1)^2}$在区间$(1,+\infty)$上单调递增。

第五步：极值点肯定是取自驻点或不可导点。具体地说，就是看一下每个驻点和不可导点两侧区域的单调性。“左增右减”则是极大值点，“左减右增”则是极小值点，“同增同减”则不是极值点。

对于本题而言

$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$

先来看$x=-1$这个点。刚才在第四步已经判断出了它左侧的区间$(-\infty,-1)$是单调递增区间，它右侧的区间$(-1,1)$是单调递减区间，$x=-1$这个点属于“左增右减”，所以$x=-1$是一个极大值点。

再来看$x=1$这个点。刚才在第四步已经判断出了它左侧的区间$(-1,1)$是单调递减区间，它右侧的区间$(1,+\infty)$是单调递增区间，$x=1$这个点属于“左减右增”，所以$x=1$是一个极小值点。

第六步：将上一步所求得的极值点代入函数中，算出函数值，即是极值。

对于本题而言，极大值点$x=-1$所对应的极大值为$f(-1)=(-1-4)\times\sqrt[3]{(-1+1)^2}=0$，极小值点$x=1$所对应的极小值为$f(1)=(1-4)\times\sqrt[3]{(1+1)^2}=-3\times\sqrt[3]{4}$。

例. 求函数$y=(x^2-1)^3+1$的极值。

解： 由于本题中给定了一个函数，且问题是求该函数的极值，所以本题属于本节所讨论的题型，应该用刚刚讲完的解题方法来求解本题。

第一步：写出该函数的定义域。

对于本题而言，定义域是$(-\infty,+\infty)$。

第二步：求两种点，第一种点是驻点（驻点指的是一阶导数为 0 的点），第二种点是不可导点（也就是一阶导

数没有定义的点）。

先来求驻点。

驻点指的是一阶导数为 0 的点，所以要想求驻点，就要先求一阶导数。由于 $y=(x^2-1)^3+1$，所以 $y'=6x(x^2-1)^2$。然后令一阶导数为 0，即

$$6x(x^2-1)^2=0$$

解得 $x=-1$ 或 $x=0$ 或 $x=1$。

求得的驻点一共有三个，分别是 $x=-1$、$x=0$、$x=1$。

再来求不可导点（也就是一阶导数没有定义的点）。

一阶导数是 $y'=6x(x^2-1)^2$，在第一步求得的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上 y' 不存在没有定义的点，所以没有不可导点。

第三步：用刚才求出的驻点和不可导点划分定义域。

对于本题而言，第二步求出的驻点和不可导点总共有三个（其中三个驻点，零个不可导点），所以用这三个点 $x=-1$、$x=0$、$x=1$ 划分定义域 $(-\infty,+\infty)$，可以划分为四个区域：$(-\infty,-1)$、$(-1,0)$、$(0,1)$、$(1,+\infty)$。

第四步：每个区间内任取一个点（取点的原则是好计算），然后把取的那个点代入导函数中，依据导函数大于 0 还是小于 0 确定单调性。

对于本题而言，在区间 $(-\infty,-1)$ 内任取一个点 -2，然后将 $x=-2$ 代入导函数 $y'=6x(x^2-1)^2$ 中，解得 $y'=-108$。由于 $y'<0$，所以函数 $y=(x^2-1)^3+1$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上单调递减。

在区间 $(-1,0)$ 内任取一个点 $-\dfrac{1}{2}$，然后将 $x=-\dfrac{1}{2}$ 代入导函数 $y'=6x(x^2-1)^2$ 中，解得 $y'=-\dfrac{27}{16}$。由于 $y'<0$，所以函数 $y=(x^2-1)^3+1$ 在区间 $(-1,0)$ 上单调递减。

在区间 $(0,1)$ 内任取一个点 $\dfrac{1}{2}$，然后将 $x=\dfrac{1}{2}$ 代入导函数 $y'=6x(x^2-1)^2$ 中，解得 $y'=\dfrac{27}{16}$。由于 $y'>0$，所以函数 $y=(x^2-1)^3+1$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增。

在区间 $(1,+\infty)$ 内任取一个点 2，然后将 $x=2$ 代入导函数 $y'=6x(x^2-1)^2$ 中，解得 $y'=108$。由于 $y'>0$，所以函数 $y=(x^2-1)^3+1$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增。

第五步：极值点肯定是取自驻点或者不可导点。具体地说，就是看一下每个驻点和不可导点两侧区域的单调性。“左增右减”则是极大值点，“左减右增”则是极小值点，“同增同减”则不是极值点。

对于本题而言

$(-\infty,-1)$　　-1　　$(-1,0)$　　0　　$(0,1)$　　1　　$(1,+\infty)$

对于 $x=-1$ 这个点。刚才在第四步已经判断出了它左侧的区间 $(-\infty,-1)$ 是单调递减区间，它右侧的区间 $(-1,0)$ 也是单调递减区间，$x=-1$ 这个点属于“同增同减”，所以 $x=-1$ 不是极值点。

对于 $x=0$ 这个点。刚才在第四步已经判断出了它左侧的区间 $(-1,0)$ 是单调递减区间，它右侧的区间 $(0,1)$ 是单调递增区间，x=1 这个点属于“左减右增”，所以 $x=0$ 是一个极小值点。

对于 $x=1$ 这个点。刚才在第四步已经判断出了它左侧的区间 $(0,1)$ 是单调递增区间，它右侧的区间 $(1,+\infty)$ 也是单调递增区间，x=1 这个点属于“同增同减”，所以 $x=1$ 不是极值点。

第六步：将上一步所求得的极值点代入函数中，算出函数值，即是极值。

对于本题而言，极小值点 $x=0$ 所对应的极小值为 $f(0)=(0-1)^3+1=0$。

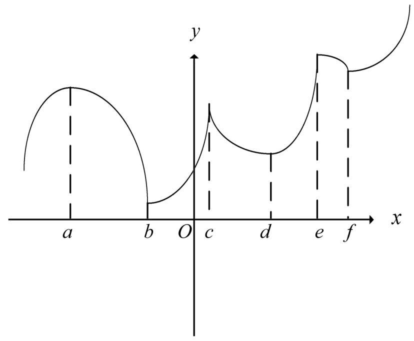
3.4　求函数在给定区间的凹凸性

首先给大家解释一下“凹凸性”这三个字的意思。

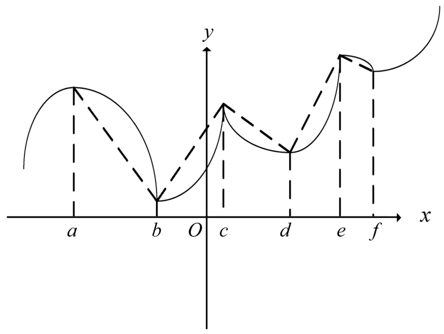
设函数 $f(x)$ 在某区间上连续，若对于这个区间上的任意两点 x_1 和 x_2，恒有 $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称函数 $f(x)$ 在该区间上是凹的。

设函数 $f(x)$ 在某区间上连续，若对于这个区间上的任意两点 x_1 和 x_2，恒有 $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称函数 $f(x)$ 在该区间上是凸的。

给大家画个图。



以上这个图像是函数 $y=f(x)$ 的图像。函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是凸的，在区间 (b,c) 上是凹的，在区间 (c,d) 上是凹的，在区间 (d,e) 上是凹的，在区间 (e,f) 上是凸的。在上图的基础上补充几条虚线大家就明白了。



大家看，函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上的图像全在线段 ab 上方，所以函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是凸的；函数 $f(x)$ 在区间 (b,c) 上的图像全在线段 bc 下方，所以函数 $f(x)$ 在区间 (b,c) 上是凹的；函数 $f(x)$ 在区间 (c,d) 上的图像全在线段 cd 下方，所以函数 $f(x)$ 在区间 (c,d) 上是凹的；函数 $f(x)$ 在区间 (d,e) 上的图像全在线段 de 下方，所以函数 $f(x)$ 在区间 (d,e) 上是凹的；函数 $f(x)$ 在区间 (e,f) 上的图像全在线段 ef 上方，所以函数 $f(x)$ 在区间 (e,f) 上是凸的。

本节要讨论的题型是：题中给定了一个函数，又给定了一个区间，问该函数在该区间的凹凸性。

那么这种题型的解题方法是什么呢？

求一下函数 $f(x)$ 的二阶导函数 $f''(x)$。如果求得的二阶导函数 $f''(x)$ 在题中给定的那个区间恒大于 0，则说明函数 $f(x)$ 在该区间是凹的；如果求得的二阶导函数 $f''(x)$ 在题中给定的那个区间恒小于 0，则说明函数 $f(x)$ 在该区间是凸的。

下面来看例题。

例. 请判定一下函数 $y=\ln x$ 在 $(2,5)$ 上的凹凸性。

解： 由于本题中给定了一个函数，又给定了一个区间，且问题是该函数在该区间的凹凸性，所以本题属于本节所讨论的题型，应该用刚刚讲完的解题方法来求解本题。

由于 $y=\ln x$，所以 $y'=\dfrac{1}{x}$， $y''=-\dfrac{1}{x^2}$。

现在看一下二阶导函数 $y''=-\dfrac{1}{x^2}$ 在题中给定的区间 $(2,5)$ 上到底是恒大于 0 的还是恒小于 0 的。

显然是恒小于 0 的，所以函数 $y=\ln x$ 在 $(2,5)$ 上是凸的。

例. 请判定一下函数 $y=x^3$ 在 $(4,6)$ 上的凹凸性。

解： 由于本题中给定了一个函数，又给定了一个区间，且问题是该函数在该区间的凹凸性，所以本题属于本节所讨论的题型，应该用刚刚讲完的解题方法来求解本题。

由于 $y=x^3$，所以 $y'=3x^2$， $y''=6x$。

现在看一下二阶导函数 $y''=6x$ 在题中给定的区间 $(4,6)$ 上到底是恒大于 0 的还是恒小于 0 的。

显然是恒大于 0 的，所以函数 $y=x^3$ 在 $(4,6)$ 上是凹的。

3.5 求函数的凹凸区间

本节要讨论的题型是：题中给定了一个函数，问该函数的凹凸区间。

那么这种题型的解题方法是什么呢？

第一步：写出该函数的定义域。

第二步：求两种点，第一种点是二阶导数为 0 的点，第二种点是二阶导数没有定义的点。

第三步：用刚才求出的二阶导数为 0 的点和二阶导数没有定义的点划分定义域。

第四步：每个区间内任取一个点（取点的原则是好计算），然后把取的那个点代入二阶导函数中，依据二阶导函数大于 0 还是小于 0 确定凹凸性。

下面来看例题。

例. 请判定一下函数 $y=\ln x$ 的凹凸区间。

解： 由于本题中给定了一个函数，且问题是该函数的凹凸区间，所以本题属于本节所讨论的题型，应该用刚刚讲完的解题方法来求解本题。

第一步：写出该函数的定义域。

对于本题而言，定义域是 $(0,+\infty)$ 。

第二步：求两种点，第一种点是二阶导数为 0 的点，第二种点是二阶导数没有定义的点。

先来求二阶导数为 0 的点。

要想求二阶导数为 0 的点，就要先求二阶导数。由于 $y=\ln x$ ，所以 $y'=\frac{1}{x}$ ， $y''=-\frac{1}{x^2}$ 。然后令二阶导数为 0，即

$$-\frac{1}{x^2}=0$$

发现无解。

这说明二阶导数为 0 的点不存在。

再来求二阶导数没有定义的点。

二阶导数是 $y''=-\frac{1}{x^2}$ ，而在第一步求得的定义域 $(0,+\infty)$ 上 y'' 不存在没有定义的点，所以没有二阶导数没有定义的点。

（**注意：** 有的同学认为存在，他们认为 $y''=-\frac{1}{x^2}$ 在 $x=0$ 处没有定义。这就大错特错了。是否存在没有定义的点的大前提是在第一步求得的定义域 $(0,+\infty)$ 上来看的，第一步求得的定义域本来就不包括 0，所以 $x=0$ 不算是二阶导数没有定义的点。）

第三步：用刚才求出的二阶导数为 0 的点和二阶导数没有定义的点划分定义域。

对于本题而言，第二步求出的二阶导数为 0 的点和二阶导数没有定义的点总共有零个（其中二阶导数为 0 的点零个，二阶导数没有定义的点零个），所以根本就不用划分定义域。

第四步：每个区间内任取一个点（取点的原则是好计算），然后把取的那个点代入二阶导函数中，依据二阶导函数大于 0 还是小于 0 确定凹凸性。

对于本题而言，由于定义域 $(0,+\infty)$ 根本就不用划分，所以在区间 $(0,+\infty)$ 内任取一个点 1 ，然后将 $x=1$ 代入二阶导函数 $y''=-\frac{1}{x^2}$ 中，解得 $y''=-1$ 。由于 $y''<0$ ，所以函数 $y=\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是凸的。

例. 请判定一下函数 $y=x^3$ 的凹凸区间。

解： 由于本题中给定了一个函数，且问题是该函数的凹凸区间，所以本题属于本节所讨论的题型，应该用刚刚讲完的解题方法来求解本题。

第一步：写出该函数的定义域。

对于本题而言，定义域是 $(-\infty,+\infty)$ 。

第二步：求两种点，第一种点是二阶导数为 0 的点，第二种点是二阶导数没有定义的点。

先来求二阶导数为 0 的点。

要想求二阶导数为 0 的点，就要先求二阶导数。由于 $y=x^3$ ，所以 $y'=3x^2$ ， $y''=6x$ 。然后令二阶导数为 0，即

$$6x=0$$

解得 $x=0$ 。

这说明二阶导数为 0 的点只有一个，即 $x=0$ 。

再来求二阶导数没有定义的点。

二阶导数是 $y''=6x$ ，而在第一步求得的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上 y'' 不存在没有定义的点，所以没有二阶导数没有定义的点。

第三步：用刚才求出的二阶导数为 0 的点和二阶导数没有定义的点划分定义域。

对于本题而言，第二步求出的二阶导数为 0 的点和二阶导数没有定义的点总共有一个（其中二阶导数为 0 的点一个，二阶导数没有定义的点零个），所以将定义域 $(-\infty,+\infty)$ 划分为两个区域：$(-\infty,0)$ 、$(0,+\infty)$ 。

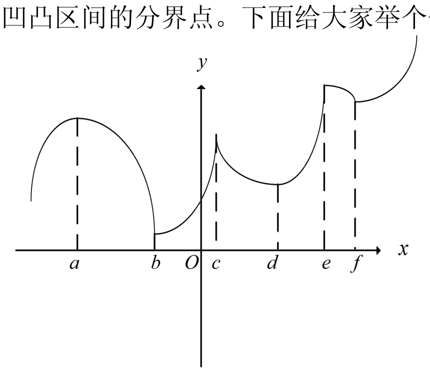
第四步：每个区间内任取一个点（取点的原则是好计算），然后把取的那个点代入二阶导函数中，依据二阶导函数大于 0 还是小于 0 确定凹凸性。

对于本题而言，在区间 $(-\infty,0)$ 内任取一个点 -2 ，然后将 $x=-2$ 代入二阶导函数 $y''=6x$ 中，解得 $y''=-12$ 。由于 $y''<0$ ，所以函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是凸的。

在区间 $(0,+\infty)$ 内任取一个点 2 ，然后将 $x=2$ 代入二阶导函数 $y''=6x$ 中，解得 $y''=12$ 。由于 $y''>0$ ，所以函数 $y=x^3$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是凹的。

3.6　求函数的拐点

先讲一下什么叫“拐点”，其实就是凹凸区间的分界点。下面给大家举个例子。



以上这个图像是函数 $y=f(x)$ 的图像。点 $x=b$、$x=e$ 是函数 $y=f(x)$ 的拐点。通过以上这个例子，大家应该明白什么叫“拐点”了，可以把拐点理解为凹凸区间的分界点。

本节要讨论的题型是：题中给定了一个函数，问该函数的拐点。

那么这种题型的解题方法是什么呢？

第一步：写出该函数的定义域。

第二步：求两种点，第一种点是二阶导数为 0 的点，第二种点是二阶导数没有定义的点。

第三步：用刚才求出的二阶导数为 0 的点和二阶导数没有定义的点划分定义域。

第四步：每个区间内任取一个点（取点的原则是好计算），然后把取的那个点代入二阶导函数中，依据二阶导函数大于 0 还是小于 0 确定凹凸性。

第五步：拐点肯定是取自二阶导数为 0 的点或二阶导数没有定义的点。具体地说，就是看一下每个二阶导数为 0 的点和二阶导数没有定义的点两侧区域的凹凸性。“左凹右凸”或“左凸右凹”则是拐点，“同凹同凸”则不是拐点。

第六步：刚才算出的其实是拐点的横坐标，现在要做的就是把拐点的横坐标代入函数 $f(x)$ 中，计算出拐点。

本节所讲的题型的解题方法中的前四步其实就是上一节所讲的题型的解题方法。

下面来看例题。

例. 求函数 $y=2x^3+3x^2-12x+14$ 的拐点。

解： 由于本题中给定了一个函数，且问题是求该函数的拐点，所以本题属于本节所讨论的题型，应该用刚刚讲完的解题方法来求解本题。

第一步：写出该函数的定义域。

对于本题而言，定义域是 $(-\infty,+\infty)$ 。

第二步：求两种点，第一种点是二阶导数为 0 的点，第二种点是二阶导数没有定义的点。

先来求二阶导数为 0 的点。

要想求二阶导数为 0 的点，就要先求二阶导数。由于 $y=2x^3+3x^2-12x+14$ ，所以 $y'=6x^2+6x-12$ ，$y''=12x+6$ 。然后令二阶导数为 0，即

$$12x+6=0$$

解得 $x=-\dfrac{1}{2}$ 。

二阶导数为 0 的点只有一个，就是 $x=-\frac{1}{2}$。

再来求二阶导数没有定义的点。

二阶导数是 $y''=12x+6$，而在第一步求得的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上 y'' 不存在没有定义的点，所以没有二阶导数没有定义的点。

第三步：用刚才求出的二阶导数为 0 的点和二阶导数没有定义的点划分定义域。

对于本题而言，第二步求出的二阶导数为 0 的点和二阶导数没有定义的点总共有一个（其中二阶导数为 0 的点一个，二阶导数没有定义的点零个），所以用这一个点 $x=-\frac{1}{2}$ 划分定义域 $(-\infty,+\infty)$，可以划分为两个区域：$(-\infty,-\frac{1}{2})$、$(-\frac{1}{2},+\infty)$。

第四步：每个区间内任取一个点（取点的原则是好计算），然后把取的那个点代入二阶导函数中，依据二阶导函数大于 0 还是小于 0 确定凹凸性。

对于本题而言，在区间 $(-\infty,-\frac{1}{2})$ 内任取一个点 -1，然后将 $x=-1$ 代入二阶导函数 $y''=12x+6$ 中，解得 $y''=-6$。由于 $y''<0$，所以函数 $y=2x^3+3x^2-12x+14$ 在区间 $(-\infty,-\frac{1}{2})$ 上是凸的。

在区间 $(-\frac{1}{2},+\infty)$ 内任取一个点 1，然后将 $x=1$ 代入二阶导函数 $y''=12x+6$ 中，解得 $y''=18$。由于 $y''>0$，所以函数 $y=2x^3+3x^2-12x+14$ 在区间 $(-\frac{1}{2},+\infty)$ 上是凹的。

第五步：拐点肯定是取自二阶导数为 0 的点或二阶导数没有定义的点。具体地说，就是看一下每个二阶导数为 0 的点和二阶导数没有定义的点两侧区域的凹凸性。“左凹右凸”或“左凸右凹”则是拐点，“同凹同凸”则不是拐点。

对于本题而言

$(-\infty,-\frac{1}{2})$　　　　$-\frac{1}{2}$　　　　$(-\frac{1}{2},+\infty)$

来看 $x=-\frac{1}{2}$ 这个点。刚才在第四步已经判断出了它左侧的区间 $(-\infty,-\frac{1}{2})$ 是凸的，它右侧的区间 $(-\frac{1}{2},+\infty)$ 是凹的，$x=-\frac{1}{2}$ 这个点属于“左凸右凹”，所以 $x=-\frac{1}{2}$ 是一个拐点（横坐标）。

第六步：刚才算出的其实是拐点的横坐标，现在要做的就是把拐点的横坐标代入函数 $f(x)$ 中，计算出拐点。

对于本题而言，就是把刚刚算出的 $x=-\frac{1}{2}$ 代入 $y=2x^3+3x^2-12x+14$ 中，解得 $y(-\frac{1}{2})=\frac{41}{2}$。

所以，点 $(-\frac{1}{2},\frac{41}{2})$ 是函数 $y=2x^3+3x^2-12x+14$ 的拐点。

例. 求函数 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点。

解： 由于本题中给定了一个函数，且问题是求该函数的拐点，所以本题属于本节所讨论的题型，应该用刚刚讲完的解题方法来求解本题。

第一步：写出该函数的定义域。

对于本题而言，定义域是 $(-\infty,+\infty)$。

第二步：求两种点，第一种点是二阶导数为 0 的点，第二种点是二阶导数没有定义的点。

先来求二阶导数为 0 的点。

要想求二阶导数为 0 的点，就要先求二阶导数。由于 $y=3x^4-4x^3+1$，所以 $y'=12x^3-12x^2$，$y''=36x^2-24x$。然后令二阶导数为 0，即

$$36x^2-24x=0$$

解得 $x=0$ 或 $x=\frac{2}{3}$。

二阶导数为 0 的点一共有两个，分别是 $x=0$、$x=\frac{2}{3}$。

再来求二阶导数没有定义的点。

二阶导数是 $y''=36x^2-24x$，而在第一步求得的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上 y'' 不存在没有定义的点，所以没有二阶导数没有定义的点。

第三步：用刚才求出的二阶导数为 0 的点和二阶导数没有定义的点划分定义域。

对于本题而言，刚才第二步求出的二阶导数为 0 的点和二阶导数没有定义的点总共有两个（其中二阶导数为 0 的点两个，二阶导数没有定义的点零个），所以用这两个点 $x=0$ 、$x=\frac{2}{3}$ 划分定义域 $(-\infty,+\infty)$ ，可以划分为三个区域：$(-\infty,0)$ 、$(0,\frac{2}{3})$ 、$(\frac{2}{3},+\infty)$ 。

第四步：每个区间内任取一个点（取点的原则是好计算），然后把取的那个点代入二阶导函数中，依据二阶导函数大于 0 还是小于 0 确定凹凸性。

对于本题而言，在区间 $(-\infty,0)$ 内任取一个点 -1 ，然后将 $x=-1$ 代入二阶导函数 $y''=36x^2-24x$ 中，解得 $y''=60$ 。由于 $y''>0$ ，所以函数 $y=3x^4-4x^3+1$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是凹的。

在区间 $(0,\frac{2}{3})$ 内任取一个点 $\frac{1}{3}$ ，然后将 $x=\frac{1}{3}$ 代入二阶导函数 $y''=36x^2-24x$ 中，解得 $y''=-4$ 。由于 $y''<0$ ，所以函数 $y=3x^4-4x^3+1$ 在区间 $(0,\frac{2}{3})$ 上是凸的。

在区间 $(\frac{2}{3},+\infty)$ 内任取一个点 1 ，然后将 $x=1$ 代入二阶导函数 $y''=36x^2-24x$ 中，解得 $y''=12$ 。由于 $y''>0$ ，所以函数 $y=3x^4-4x^3+1$ 在区间 $(\frac{2}{3},+\infty)$ 上是凹的。

第五步：拐点肯定是取自二阶导数为 0 的点或二阶导数没有定义的点。具体地说，就是看一下每个二阶导数为 0 的点和二阶导数没有定义的点两侧区域的凹凸性。“左凹右凸”或“左凸右凹”则是拐点，“同凹同凸”则不是拐点。

对于本题而言

$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$

来看 $x=0$ 这个点。刚才在第四步已经判断出了它左侧的区间 $(-\infty,0)$ 是凹的，它右侧的区间 $(0,\frac{2}{3})$ 是凸的，$x=0$ 这个点属于“左凹右凸”，所以 $x=0$ 是一个拐点（横坐标）。

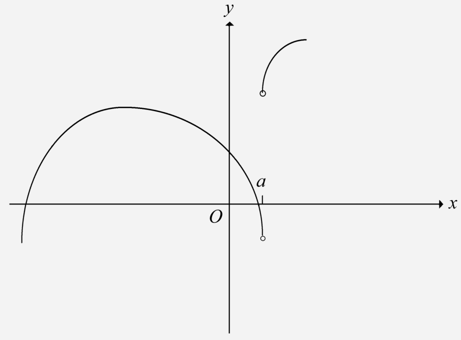
再看 $x=\frac{2}{3}$ 这个点。刚才在第四步已经判断出了它左侧的区间 $(0,\frac{2}{3})$ 是凸的，它右侧的区间 $(\frac{2}{3},+\infty)$ 是凹的，$x=\frac{2}{3}$ 这个点属于“左凸右凹”，所以 $x=\frac{2}{3}$ 是一个拐点（横坐标）。

第六步：刚才算出的其实是拐点的横坐标，现在要做的就是把拐点的横坐标代入函数 $f(x)$ 中，计算出拐点。

对于本题而言，先把刚刚算出的 $x=0$ 代入 $y=3x^4-4x^3+1$ 中，解得 $y(0)=1$ 。所以，点 $(0,1)$ 是函数 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点。

再把刚刚算出的 $x=\frac{2}{3}$ 代入 $y=3x^4-4x^3+1$ 中，解得 $y(\frac{2}{3})=\frac{11}{27}$ 。所以，点 $(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$ 是函数 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点。

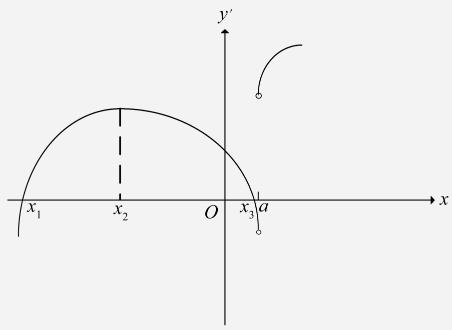
例. 设函数 $y=f(x)$ 连续，除 $x=a$ 外 $f''(x)$ 均存在。一阶导函数 $y'=f'(x)$ 的图形如下，则 $y=f(x)$(　)。



（A）有两个极大值点，一个极小值点，一个拐点。
（B）有一个极大值点，一个极小值点，两个拐点。
（C）有一个极大值点，一个极小值点，一个拐点。
（D）有一个极大值点，两个极小值点，两个拐点。

解： 首先要注意的是，上面的那个图像是函数 $y'=f'(x)$ 的图像，而不是 $y=f(x)$ 的图像。

下面开始做这道题。为了方便表示，在上图中加三个字母，分别是 x_1、x_2、x_3。



先看极值点。

我们知道，极值点肯定来自一阶导数为 0 的点或一阶导数没有定义的点。从图中可以非常直观地看出来，一阶导数为 0 的点是 $x=x_1$ 和 $x=x_3$，一阶导数没有定义的点是 $x=a$。也就是一共有三个点，下面一个点一个点来看。

首先，来看点 $x=x_1$。由于点 $x=x_1$ 的左去心邻域内 $f'(x)<0$，所以在点 $x=x_1$ 的左去心邻域内 $f(x)$ 单调递减。由于点 $x=x_1$ 的右去心邻域内 $f'(x)>0$，所以在点 $x=x_1$ 的右去心邻域内 $f(x)$ 单调递增。因此，点 $x=x_1$ 属于“左减右增”，根据之前的总结，$x=x_1$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值点。

接着，来看点 $x=x_3$。由于点 $x=x_3$ 的左去心邻域内 $f'(x)>0$，所以在点 $x=x_3$ 的左去心邻域内 $f(x)$ 单调递增。由于点 $x=x_3$ 的右去心邻域内 $f'(x)<0$，所以在点 $x=x_3$ 的右去心邻域内 $f(x)$ 单调递减。因此，点 $x=x_1$ 属于“左增右减”，根据之前的总结，$x=x_3$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值点。

最后，来看点 $x=a$。由于点 $x=a$ 的左去心邻域内 $f'(x)<0$，所以在点 $x=a$ 的左去心邻域内 $f(x)$ 单调递减。由于点 $x=a$ 的右去心邻域内 $f'(x)>0$，所以在点 $x=a$ 的右去心邻域内 $f(x)$ 单调递增。因此，点 $x=a$ 属于“左减右增”，根据之前的总结，$x=a$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值点。

综上所述，函数 $y=f(x)$ 有一个极大值点，有两个极小值点。由于本题是选择题，所以其实此刻就能选择出答案，是（D）选项。不过现在是为了学知识，所以就接着做。

再看拐点。

我们知道，拐点肯定来自二阶导数为 0 的点或二阶导数没有定义的点。题中给的图是 $y'=f'(x)$ 的图，而不是 $y''=f''(x)$ 的图，那么怎么知道二阶导数为 0 的点和二阶导数没有定义的点呢？这个问题其实很好回答，题中给的图虽然不是 $y''=f''(x)$ 的图，但是从图中依然可以非常直观地看出来，二阶导数为 0 的点是 $x=x_2$，二阶导数没有定义的点是 $x=a$。这是为什么呢？

因为导数值指的就是切线的斜率，一阶导数 $y'=f'(x)$ 在点 $x=x_2$ 处的切线很明显是一条平行于 x 轴的线，所以一阶导数 $y'=f'(x)$ 在点 $x=x_2$ 处的切线斜率为 0，也就是说 $f''(x_2)=0$。

在 $x=a$ 处，连一阶导数 $f'(x)$ 都没有定义二阶导数必然没有定义，这是常识。例如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$，它在 $x=0$ 处没定义，那么必然 y' 在 $x=0$ 处也没有定义（$y'=-\dfrac{1}{x^2}$，它在 $x=0$ 处没有定义）。

所以，从图中可以非常直观地看出来，二阶导数为 0 的点是 $x=x_2$，二阶导数没有定义的点是 $x=a$。也就是一共有两个点，下面一个点一个点来看。

首先，来看点 $x=x_2$。由于点 $x=x_2$ 的左去心邻域内 $f'(x)$ 单调递增，这说明在点 $x=x_2$ 的左去心邻域内 $f''(x)>0$，说明在点 $x=x_2$ 的左去心邻域内 $f(x)$ 是凹的。由于点 $x=x_2$ 的右去心邻域内 $f'(x)$ 单调递减，这说明在点 $x=x_2$ 的右去心邻域内 $f''(x)<0$，说明在点 $x=x_2$ 的右去心邻域内 $f(x)$ 是凸的。所以，点 $x=x_2$ 属于“左凹右凸”，根据之前的总结，$x=x_2$ 是函数 $f(x)$ 的一个拐点（横坐标）。

接着，来看点 $x=a$。由于点 $x=a$ 的左去心邻域内 $f'(x)$ 单调递减，这说明在点 $x=a$ 的左去心邻域内 $f''(x)<0$，说明在点 $x=a$ 的左去心邻域内 $f(x)$ 是凸的。由于点 $x=a$ 的右去心邻域内 $f'(x)$ 单调递增，这说明在点 $x=a$ 的右去心邻域内 $f''(x)>0$，说明在点 $x=a$ 的右去心邻域内 $f(x)$ 是凹的。所以，点 $x=a$ 属于“左凸右凹”，根据之前的总结，$x=a$ 是函数 $f(x)$ 的一个拐点（横坐标）。

综上所述，函数 $y=f(x)$ 有两个拐点。

所以本题选择（D）选项。

3.7 与极值点和拐点有关的一个重要结论

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导（也就是说，$f(x_0)$、$f'(x_0)$、$f''(x_0)$、$f'''(x_0)$、$f^{(4)}(x_0)$、$\cdots$、$f^{(n)}(x_0)$ 均存在），且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$，$\cdots$，$f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$（$n\geqslant 2$）。

情况①：若 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)<0$，则 $x=x_0$ 为极大值点。

情况②：若 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)>0$，则 $x=x_0$ 为极小值点。

情况③：若 n 为奇数，则 $x=x_0$ 不是极值点而是拐点。

下面来看例题。

例. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处存在三阶导数（也就是说 $f'(x_0)$、$f''(x_0)$、$f'''(x_0)$ 均存在），且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)=a>0$，则（　　）。

（A）$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值。

（B）$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值。

（C）在点 $(x_0,f(x_0))$ 左侧邻近曲线 $y=f(x)$ 是凹的，左侧邻近曲线 $y=f(x)$ 是凸的。

（D）在点 $(x_0,f(x_0))$ 左侧邻近曲线 $y=f(x)$ 是凸的，左侧邻近曲线 $y=f(x)$ 是凹的。

解：由于 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)=a>0$，所以根据本节刚刚讲完的结论，立刻可得 $x=x_0$ 不是极值点而是拐点。

既然 $x=x_0$ 不是极值点，这也就意味着 $x=x_0$ 既不是极大值点也不是极小值点，所以函数值 $f(x_0)$ 既不是函数 $f(x)$ 的极大值也不是函数 $f(x)$ 的极小值。因此，（A）选项和（B）选项都是错误的，（A）选项和（B）选项都不能选。

已经判断出 $x=x_0$ 是拐点。所谓拐点，指的其实就是凹凸区间的分界点。可是，（C）选项和（D）选项所表达的意思都是说 $x=x_0$ 是凹凸区间的分界点。那么，到底应该选择（C）选项还是应该选择（D）选项呢？

由于 $f'''(x_0)=a$，这就说明函数 $f''(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导。所以，根据函数在某一点处可导的等价定义（注意是等价定义而不是定义）可知

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0} \qquad \text{（1）式}$$

将 $f'''(x_0)=a$ 代入（1）式，得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=a \qquad \text{（2）式}$$

将 $f''(x_0)=0$ 代入（2）式，得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}=a \qquad \text{（3）式}$$

由（3）式可知

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f''(x)}{x-x_0}=a \qquad \text{（4）式}$$

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f''(x)}{x-x_0}=a \qquad \text{（5）式}$$

由于 $a>0$，所以有

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0 \qquad \text{（6）式}$$

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0 \qquad \text{（7）式}$$

我们知道，无论 x 趋于多少，常数的极限永远等于它本身，所以有

$$0=\lim_{x\to x_0^+}0 \qquad \text{（8）式}$$

$$0=\lim_{x\to x_0^-}0 \qquad \text{（9）式}$$

（6）式、（8）式相结合，得

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f''(x)}{x-x_0}>\lim_{x\to x_0^+}0 \qquad \text{（10）式}$$

（7）式、（9）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>\lim\limits_{x\to x_0^-}0$　　　　　　　　　　（11）式

接下来要用到之前所讲的保号性了。大家复习一下保号性。

趋于定点型的函数极限的保号性：

如果 $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$，那么必存在一个 $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$ 的右去心邻域，使得当 $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$ 在此邻域内取值时，有 $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$。

如果 $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$，那么必存在一个 $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$ 的左去心邻域，使得当 $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$ 在此邻域内取值时，有 $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$。

首先，对（10）式使用保号性，立刻可得，必存在一个 x_0 的右去心邻域，使得当 x 在此邻域内取值时，有 $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$。既然 x 是在 x_0 的右去心邻域内取值，那么 $x>x_0$，所以 $x-x_0>0$。由于 $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$，$x-x_0>0$，所以立刻有 $f''(x)>0$。也就是说，必存在一个 x_0 的右去心邻域，使得当 x 在此邻域内取值时，有 $f''(x)>0$。在某区间内 $f''(x)>0$，说明在此区间内函数 $f(x)$ 是凹的。所以，在点 $(x_0,f(x_0))$ 右侧邻近曲线 $y=f(x)$ 是凹的。

接着，对（11）式使用保号性，立刻可得，必存在一个 x_0 的左去心邻域，使得当 x 在此邻域内取值时，有 $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$。既然 x 是在 x_0 的左去心邻域内取值，那么 $x<x_0$，所以 $x-x_0<0$。由于 $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$，$x-x_0<0$，所以立刻有 $f''(x)<0$。也就是说，必存在一个 x_0 的左去心邻域，使得当 x 在此邻域内取值时，有 $f''(x)<0$。在某区间内 $f''(x)<0$，说明在此区间内函数 $f(x)$ 是凸的。所以，在点 $(x_0,f(x_0))$ 左侧邻近曲线 $y=f(x)$ 是凸的。

所以，本题应该选择（D）选项。

3.8　求函数在给定区间的最值

本节要讨论的题型是：题中给定了一个函数，又给定了一个区间，问该函数在该区间的最值（最大值和最小值）。

那么这种题型的解题方法是什么呢？

第一步：按照 3.3 节中讲的求极值的方法把题中所给函数在题中所给区间内的所有极值求出来。大家一定要注意，不是求“题中所给函数的所有极值”，而是只求“题中所给函数在题中所给区间内的所有极值”就可以了。例如，已知函数 $y=f(x)$，求函数 $y=f(x)$ 在区间 $(1,12)$ 上的最值。那么第一步就是求极值，要想求极值，肯定得求驻点和一阶导数不存在的点。假设求出的驻点和一阶导数不存在的点加起来一共有五个，分别是 $x=4$、$x=9$、$x=13$、$x=2$、$x=-4$。那么对于 $x=13$ 和 $x=-4$ 这两个点根本就不用管，因为它们根本不在区间 $(1,12)$ 上，这时只需判断 $x=4$、$x=9$、$x=2$ 这三个点中哪几个点是极值点，并且求出相应的极值就可以了。

第二步：求所给区间的两个端点的函数值或极限值。具体地说就是，如果所给的区间两边都是闭的，那就求两边的函数值；如果所给的区间一边开一边闭，那就开的那边求极限值，闭的那边求函数值；如果所给的区间两边都是开的，那就求两边的极限值。例如，已知函数 $y=f(x)$，求函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,12]$ 上的最值。那么第二步就是要算 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $f(12)$。又如，已知函数 $y=f(x)$，求函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,3)$ 上的最值。那么第二步就是要算 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)$。

第三步：把第一步算出的所有极值和第二步算出的两个值写一竖排进行比较。看看其中最大的数是不是第二步算出的极限值（当然，如果给的区间两边都是闭的，那么第二步就不需要算极限值，最大的数肯定不可能是第二步算出的极限值），如果是的话，说明该函数在该区间根本就不存在最大值，如果不是的话，那么这个最大的数就是该函数在该区间的最大值；看看其中最小的数是不是第二步算出的极限值（当然，如果给的区间两边都是闭的，那么第二步就不需要算极限值，最小的数肯定不可能是第二步算出的极限值），如果是的话，说明该函数在该区间根本就不存在最小值，如果不是的话，那么这个最小的数就是该函数在该区间的最小值。

下面来看例题。

例. 求函数 $y=2x^3-3x^2$ 在区间 $[-1,4]$ 上的最大值和最小值。

解： 由于本题是求某函数在某区间上的最值，属于本节所讲的题型，所以应该按照本节所讲的解题方法来求解本题。

第一步：把题中所给函数在题中所给区间内的所有极值求出来。

对于本题而言，$y=2x^3-3x^2$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$。

$y'=6x^2-6x$

令 $6x^2-6x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=1$，说明驻点有两个，分别是 $x=0$、$x=1$。

在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内，一阶导数没有定义的点不存在。

综上所述，驻点和一阶导数没有定义的点一共有两个（其中驻点两个，一阶导数没有定义的点零个），所以用 $x=0$、$x=1$ 来划分定义域 $(-\infty,+\infty)$，将定义域 $(-\infty,+\infty)$ 划分为三个区间：$(-\infty,0)$、$(0,1)$、$(1,+\infty)$。

由于这两个点 $x=0$、$x=1$ 都在题中所给的区间 $[-1,4]$ 上，所以这两个点都要进行考察，看看它们是不是极值点。

在区间 $(-\infty,0)$ 内任取一个点 -1，然后将 $x=-1$ 代入导函数 $y'=6x^2-6x$ 中，解得 $y'=12$。由于 $y'>0$，所以函数 $y=2x^3-3x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增。

在区间 $(0,1)$ 内任取一个点 $\frac{1}{2}$，然后将 $x=\frac{1}{2}$ 代入导函数 $y'=6x^2-6x$ 中，解得 $y'=-\frac{3}{2}$。由于 $y'<0$，所以函数 $y=2x^3-3x^2$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减。

在区间 $(1,+\infty)$ 内任取一个点 2，然后将 $x=2$ 代入导函数 $y'=6x^2-6x$ 中，解得 $y'=12$。由于 $y'>0$，所以函数 $y=2x^3-3x^2$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增。

综上所述，由于点 $x=0$ 属于“左增右减”，所以点 $x=0$ 是极值点，并且是极大值点。由于点 $x=1$ 属于“左减右增”，所以点 $x=1$ 是极值点，并且是极小值点。

已经确定了 $x=0$、$x=1$ 都是极值点，所以把这两个极值点所对应的极值求出来。

极大值点 $x=0$ 所对应的极大值为 $2\times0^3-3\times0^2=0$。

极小值点 $x=1$ 所对应的极小值为 $2\times1^3-3\times1^2=-1$。

第二步：求所给的区间的两个端点的函数值或极限值。

对于本题而言，由于本题所给的区间是 $[-1,4]$，两边都是闭的，所以求的是两边的函数值，也就是求 $f(-1)$ 和 $f(4)$。

由于 $y=2x^3-3x^2$，所以 $f(-1)=-5$，$f(4)=80$。

第三步：把第一步算出的所有极值和第二步算出的两个值写一竖排进行比较。

对于本题而言，把第一步算出的所有极值和第二步算出的两个值写一竖排进行比较。

0

-1

-5

80

这四个数中，哪个数最大？很明显是 80 最大。因为 80 是第二步算出的函数值，所以 80 就是函数 $y=2x^3-3x^2$ 在区间 $[-1,4]$ 上的最大值。

这四个数中，哪个数最小？很明显是 -5 最小。因为 -5 是第二步算出的函数值，所以 -5 就是函数 $y=2x^3-3x^2$ 在区间 $[-1,4]$ 上的最小值。

例. 求函数 $y=x^4-8x^2+2$ 在区间 $[-1,3]$ 上的最大值和最小值。

解： 由于本题是求某函数在某区间上的最值，属于本节所讲的题型，所以应该按照本节所讲的解题方法来求解本题。

第一步：把题中所给函数在题中所给区间内的所有极值求出来。

对于本题而言，$y=x^4-8x^2+2$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$。

$y'=4x^3-16x$

令 $4x^3-16x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=-2$ 或 $x=2$，说明驻点有三个，分别是 $x=0$、$x=-2$、$x=2$。

在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内，一阶导数没有定义的点不存在。

综上所述，驻点和一阶导数没有定义的点一共有三个（其中驻点三个，一阶导数没有定义的点零个），所以用 $x=0$、$x=-2$、$x=2$ 来划分定义域 $(-\infty,+\infty)$，将定义域 $(-\infty,+\infty)$ 划分为四个区间：$(-\infty,-2)$、$(-2,0)$、$(0,2)$、$(2,+\infty)$。

由于这三个点 $x=0$、$x=-2$、$x=2$ 中的两个点 $x=0$、$x=2$ 在题中所给的区间 $[-1,3]$ 上，而点 $x=-2$ 不在题中所给的区间 $[-1,3]$ 上，所以这三个点并不需要都进行考察，而是只考察点 $x=0$、$x=2$，看看它们是不是极值点就可以了。

在区间 $(-2,0)$ 内任取一个点 -1，然后将 $x=-1$ 代入导函数 $y'=4x^3-16x$ 中，解得 $y'=12$。由于 $y'>0$，所以

函数 $y=x^4-8x^2+2$ 在区间 $(-2,0)$ 上单调递增。

在区间 $(0,2)$ 内任取一个点 1，然后将 $x=1$ 代入导函数 $y'=4x^3-16x$ 中，解得 $y'=-12$。由于 $y'<0$，所以函数 $y=x^4-8x^2+2$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减。

在区间 $(2,+\infty)$ 内任取一个点 3，然后将 $x=3$ 代入导函数 $y'=4x^3-16x$ 中，解得 $y'=60$。由于 $y'>0$，所以函数 $y=x^4-8x^2+2$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增。

综上所述，由于点 $x=0$ 属于“左增右减”，所以点 $x=0$ 是极值点，并且是极大值点。由于点 $x=2$ 属于“左减右增”，所以点 $x=2$ 是极值点，并且是极小值点。

已经确定了 $x=0$、$x=2$ 都是极值点，所以把这两个极值点所对应的极值求出来。

极大值点 $x=0$ 所对应的极大值为 $0^4-8\times0^2+2=2$。

极小值点 $x=2$ 所对应的极小值为 $2^4-8\times2^2+2=-14$。

第二步：求所给的区间的两个端点的函数值或极限值。

对于本题而言，由于本题所给的区间是 $[-1,3]$，两边都是闭的，所以求的是两边的函数值，也就是求 $f(-1)$ 和 $f(3)$。

由于 $y=x^4-8x^2+2$，所以 $f(-1)=-5$，$f(3)=11$。

第三步：把第一步算出的所有极值和第二步算出的两个值写一竖排进行比较。

对于本题而言，把第一步算出的所有极值和第二步算出的两个值写一竖排进行比较。

2

-14

-5

11

这四个数中，哪个数最大？很明显是 11 最大。因为 11 是第二步算出的函数值，所以 11 就是函数 $y=x^4-8x^2+2$ 在区间 $[-1,3]$ 上的最大值。

这四个数中，哪个数最小？很明显是 -14 最小。因为 -14 是第一步算出的极小值，所以 -14 就是函数 $y=x^4-8x^2+2$ 在区间 $[-1,3]$ 上的最小值。

例. 设 $a>0$，求 $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}+\dfrac{1}{1+|x-a|}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的最大值和最小值。

解： 由于本题是求某函数在某区间上的最值，属于本节所讲的题型，所以应该按照本节所讲的解题方法来求解本题。

第一步：把题中所给函数在题中所给区间内的所有极值求出来。

对于本题而言，先将题中所给的函数 $f(x)$ 换一种写法，写为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+a-x}, & x<0\\ 1+\dfrac{1}{1+a}, & x=0\\ \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+a-x}, & 0<x<a\\ \dfrac{1}{1+a}+1, & x=a\\ \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+x-a}, & x>a\end{cases}\qquad（1）式$$

大家注意，（1）式与题中所给的 $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}+\dfrac{1}{1+|x-a|}$ 完全等价，之所以要将题中所给的 $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}+\dfrac{1}{1+|x-a|}$ 转换为（1）式，是因为要将绝对值去掉。

很明显，$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$。现在要做的就是求出两种点，一是驻点，二是在 $f(x)$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上一阶导数没有定义的点。

现在涉及分段函数求导的方法，即分段点处的导数用定义去求，非分段点处的导数直接用公式求。

先用公式求非分段点处的导数。

当 $x<0$ 时，$f'(x)=(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+a-x})'=\dfrac{1}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{(1+a-x)^2}$。

当 $0<x<a$ 时，$f'(x)=(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+a-x})'=-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+a-x)^2}$。

当 $x>a$ 时，$f'(x)=(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x-a})'=-\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x-a)^2}$。

综上所述，得

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1+a-x)^2}, & x<0\\ -\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+a-x)^2}, & 0<x<a\\ -\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x-a)^2}, & x>a\end{cases} \qquad \text{（2）式}$$

再用定义求分段点处（$x=0$ 处和 $x=a$ 处）的导数，也就是计算 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x+0)-f(0)}{\Delta x}$ 和 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x+a)-f(a)}{\Delta x}$，这个过程在此省略，因为在第 2 章都讲过，直接给出结论：最后计算出 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x+0)-f(0)}{\Delta x}$ 不存在，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x+a)-f(a)}{\Delta x}$ 也不存在。这就说明函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处和 $x=a$ 处都不可导。也就是说，一阶导数没有定义的点已经找到了，一共有两个，即 $x=0$ 和 $x=a$。

那么现在来找驻点，也就是一阶导数为 0 的点。

令 $\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1+a-x)^2}=0$，发现无解。

令 $-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+a-x)^2}=0$，解得 $x=\frac{a}{2}$。

令 $-\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x-a)^2}=0$，发现无解。

所以，驻点只有一个，就是 $x=\frac{a}{2}$。

综上所述，驻点和一阶导数没有定义的点一共有三个（其中驻点一个，一阶导数没有定义的点两个），所以用 $x=0$、$x=\frac{a}{2}$、$x=a$ 来划分定义域 $(-\infty,+\infty)$，将定义域 $(-\infty,+\infty)$ 划分为四个区间：$(-\infty,0)$、$(0,\frac{a}{2})$、$(\frac{a}{2},a)$、$(a,+\infty)$。

由于这三个点 $x=0$、$x=\frac{a}{2}$、$x=a$ 都在题中所给的区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，所以这三个点都要进行考察，看看它们是不是极值点。

在区间 $(-\infty,0)$ 内任取一个点 -1，然后将 $x=-1$ 代入导函数（2）式中，解得 $y'=\frac{1}{4}+\frac{1}{(2+a)^2}$。由于 $y'>0$，所以函数 $f(x)=\frac{1}{1+|x|}+\frac{1}{1+|x-a|}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增。

在区间 $(0,\frac{a}{2})$ 内任取一个点 $\frac{a}{4}$，然后将 $x=\frac{a}{4}$ 代入导函数（2）式中，解得 $y'=-\frac{1}{(1+\frac{a}{4})^2}+\frac{1}{(1+\frac{3}{4}a)^2}$。由于 $y'<0$，所以函数 $f(x)=\frac{1}{1+|x|}+\frac{1}{1+|x-a|}$ 在区间 $(0,\frac{a}{2})$ 上单调递减。

在区间 $(\frac{a}{2},a)$ 内任取一个点 $\frac{3}{4}a$，然后将 $x=\frac{3}{4}a$ 代入导函数（2）式中，解得 $y'=-\frac{1}{(1+\frac{3}{4}a)^2}+\frac{1}{(1+\frac{a}{4})^2}$。由于 $y'>0$，所以函数 $f(x)=\frac{1}{1+|x|}+\frac{1}{1+|x-a|}$ 在区间 $(\frac{a}{2},a)$ 上单调递增。

在区间 $(a,+\infty)$ 内任取一个点 $2a$，然后将 $x=2a$ 代入导函数（2）式中，解得 $y'=-\frac{1}{(1+2a)^2}-\frac{1}{(1+a)^2}$。由于 $y'<0$，所以函数 $f(x)=\frac{1}{1+|x|}+\frac{1}{1+|x-a|}$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上单调递减。

综上所述，由于点 $x=0$ 属于“左增右减”，所以点 $x=0$ 是极值点，并且是极大值点。由于点 $x=\dfrac{a}{2}$ 属于“左减右增”，所以点 $x=\dfrac{a}{2}$ 是极值点，并且是极小值点。由于点 $x=a$ 属于“左增右减”，所以点 $x=a$ 是极值点，并且是极大值点。

已经确定了 $x=0$ 、 $x=\dfrac{a}{2}$ 、 $x=a$ 都是极值点，所以把这三个极值点所对应的极值求出来。

极大值点 $x=0$ 所对应的极大值为 $1+\dfrac{1}{1+a}$ 。

极小值点 $x=\dfrac{a}{2}$ 所对应的极小值为 $\dfrac{4}{2+a}$ 。

极大值点 $x=a$ 所对应的极大值为 $1+\dfrac{1}{1+a}$ 。

第二步：求所给的区间的两个端点的函数值或极限值。

对于本题而言，由于本题所给的区间是 $(-\infty,+\infty)$ ，两边都是开的，所以求的是两边的极限值，也就是求 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 。

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+a-x}]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x-a}]=0$$

第三步：把第一步算出的所有极值和第二步算出的两个值写一竖排进行比较。

对于本题而言，把第一步算出的所有极值和第二步算出的两个值写一竖排进行比较。

$1+\dfrac{1}{1+a}$

$\dfrac{4}{2+a}$

$1+\dfrac{1}{1+a}$

0

0

这五个数中，哪个数最大？由于 $a>0$ ，所以很明显是 $\dfrac{4}{2+a}$ 最大。因为 $1+\dfrac{1}{1+a}$ 是第一步算出的极大值，所以 $1+\dfrac{1}{1+a}$ 就是函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}+\dfrac{1}{1+|x-a|}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的最大值。

这五个数中，哪个数最小？很明显是 0 最小。因为 0 是第二步算出的极限值，所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}+\dfrac{1}{1+|x-a|}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上没有最小值。

总结：本题与前两道题一样，都属于求最值的题，但是本题比前两道题的难度要大一些，因为本题涉及分段函数求导，而前两道题并没有涉及。

3.9　求两个函数的交点个数或求一个方程的实根个数

本节要讨论两种题型。

第一种题型是：题中给定了两个函数，让求这两个函数的交点个数。

第二种题型是：题中给定了一个方程，让求这个方程的实根个数。

之前，每一节都是讲一种题型，然后给出相应的解题方法，那么本节为什么要给出两种题型呢？这说明什么？这说明这虽然是两种不同的题型，但是这两种不同题型的解题方法是一样的。

那么这两种题型的解题方法是什么呢？

第一步：设辅助函数。具体地说，如果是求两个函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的交点个数的题，那么就设辅助函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ ；如果是求一个方程 $f(x)=g(x)$ 的实根个数的题，那么就设辅助函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 。

第二步：确定辅助函数 $F(x)$ 的定义域。

第三步：求两种值。一是求辅助函数 $F(x)$ 在定义域内的所有极值。二是求辅助函数 $F(x)$ 在定义域端点处的函数值或极限值，如果定义域两边都是闭的，那就求两边的函数值；如果定义域一边开一边闭，那就开的那边求极限值，闭的那边求函数值；如果定义域两边都是开的，那就求两边的极限值。

第四步：写两行公式并观察。第一行从左到右写——定义域的左端点、最小的极值点、第二小的极值点、……、最大的极值点、定义域的右端点。第二行从左到右写——定义域的左端点对应的函数值或极限值、最小的极值点对应的极值、第二小的极值点对应的极值、……、最大的极值点对应的极值、定义域的右端点对应的函数值或极限值。然后，看第二行相邻的数。如果异号，说明这两个相邻的点之间存在一个交点或实根；如果同号，说明这两个相邻的点之间不存在交点或实根；如果这两个相邻的数中有一个是 **0**，那么算同号，也就是说明这两个相邻的点之间不存在交点或实根，但 **0** 这个点本身算是一个交点或实根；如果这两个相邻的数都是 **0**，那么算同号，也就是说明这两个相邻的点之间不存在交点或实根，但这两个 **0** 点本身算是两个交点或实根。

下面把第四步通过举例的形式再解释一下。

例如，某道题让求两个函数的交点个数，那第一步肯定是设辅助函数，第二步是确定辅助函数的定义域，假设确定的定义域是 (a,b)，然后第三步求出的在定义域 (a,b) 内的极值点是 x_1、x_2、x_3、x_4，且满足 $x_2<x_3<x_1<x_4$，对应的极值分别是 $f(x_1)$、$f(x_2)$、$f(x_3)$、$f(x_4)$，同时第三步还求出了两个端点的极限值 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$。

现在到了第四步，要写的两行公式为

$$
\begin{array}{cccccc}
a & x_2 & x_3 & x_1 & x_4 & b \\
\lim\limits_{x\to a^+}f(x) & f(x_2) & f(x_3) & f(x_1) & f(x_4) & \lim\limits_{x\to b^-}f(x)
\end{array}
$$

假设 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=2$，$f(x_2)=-7$，$f(x_3)=9$，$f(x_1)=0$，$f(x_4)=-2$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$。现在只看第二行，不看第一行。从最左边的两个开始看，也就是看 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $f(x_2)$，由于 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $f(x_2)$ 异号，说明在 $x=a$ 和 $x=x_2$ 之间存在一个交点。到目前为止，已经判断出有一个交点了。再看 $f(x_2)$ 和 $f(x_3)$，由于 $f(x_2)$ 和 $f(x_3)$ 异号，说明在 $x=x_2$ 和 $x=x_3$ 之间存在一个交点。到目前为止，已经判断出有两个交点了。再看 $f(x_3)$ 和 $f(x_1)$，由于 $f(x_3)$ 和 $f(x_1)$ 同号（因为 $f(x_1)=0$，两个相邻的数中有一个是 0 就算同号），说明在 $x=x_3$ 和 $x=x_1$ 之间不存在交点。但是，由于 $f(x_1)=0$，所以 $x=x_1$ 本身是一个交点。到目前为止，已经判断出有三个交点了。再看 $f(x_1)$ 和 $f(x_4)$，由于 $f(x_1)$ 和 $f(x_4)$ 同号（因为 $f(x_1)=0$，两个相邻的数中有一个是 0 就算同号），说明在 $x=x_1$ 和 $x=x_4$ 之间不存在交点。但是，由于 $f(x_1)=0$，所以 $x=x_1$ 本身是一个交点。但是这个交点刚才已经判断出来了，所以到目前为止，仍旧是判断出有三个交点。最后看 $f(x_4)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$，由于 $f(x_4)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 同号（因为 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$，$-\infty$ 肯定是负数。而 $f(x_4)=-2$ 也是负数），说明在 $x=x_4$ 和 $x=b$ 之间不存在交点。到目前为止，仍旧是判断出有三个交点。

综上所述，本题所给的两个函数的交点个数为 3。

下面来看例题。

例. 求函数 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数。

解：由于题中给定了两个函数，让求这两个函数的交点个数，属于本节所讲的题型，所以应该按照本节所讲的解题方法来求解本题。

第一步：设辅助函数。

对于本题而言，设的辅助函数就是 $F(x)=4\ln x+k-(4x+\ln^4 x)=4\ln x+k-4x-\ln^4 x$。

当然，辅助函数也可以设为 $F(x)=4x+\ln^4 x-(4\ln x+k)=4x+\ln^4 x-4\ln x-k$。这里选择前者。

第二步：确定辅助函数 $F(x)$ 的定义域。

对于本题而言，本题所设的辅助函数是 $F(x)=4\ln x+k-4x-\ln^4 x$，所以很明显，辅助函数的定义域肯定是 $(0,+\infty)$。

第三步：求两种值。

对于本题而言，先来求第一种值，也就是极值。

由于 $F(x)=4\ln x+k-4x-\ln^4 x$，所以 $F'(x)=\dfrac{4(1-x-\ln^3 x)}{x}$，令 $\dfrac{4(1-x-\ln^3 x)}{x}=0$，解得 $x=1$，也就是说，驻点是 $x=1$。那么再看看在函数 $F(x)$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 内 $F'(x)=\dfrac{4(1-x-\ln^3 x)}{x}$ 是否存在没有定义的点，很明显不存在。

驻点和一阶导数没有定义的点一共求出了一个（其中驻点一个，一阶导数没有定义的点零个），用 $x=1$ 划分定义域 $(0,+\infty)$，将定义域 $(0,+\infty)$ 划分为两个区间：$(0,1)$、$(1,+\infty)$。

在 $(0,1)$ 中任取一点 $\frac{1}{2}$，然后将 $x=\frac{1}{2}$ 代入 $F'(x)=\frac{4(1-x-\ln^3 x)}{x}$ 中，算出 $F'(\frac{1}{2})=8(\frac{1}{2}-\ln^3\frac{1}{2})$。由于 $F'(\frac{1}{2})>0$，所以函数 $F(x)=4\ln x+k-4x-\ln^4 x$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增。

在 $(1,+\infty)$ 中任取一点 e，然后将 $x=\mathrm{e}$ 代入 $F'(x)=\frac{4(1-x-\ln^3 x)}{x}$ 中，算出 $F'(\mathrm{e})=-4$。由于 $F'(\mathrm{e})<0$，所以函数 $F(x)=4\ln x+k-4x-\ln^4 x$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减。

由于点 $x=1$ 属于“左增右减”，所以点 $x=1$ 是一个极大值点。

极大值点 $x=1$ 所对应的极大值为 $F(1)=4\times 0+k-4\times 1-0=k-4$。

再来求第二种值，也就是辅助函数 $F(x)$ 在定义域端点处的函数值或极限值。

由于辅助函数 $F(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，两边都是开的，所以要算的是两个极限值。

$\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(4\ln x+k-4x-\ln^4 x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(4\ln x+k-4x-\ln^4 x)=0$

第四步：写两行公式并观察。

对于本题而言

0	1	$+\infty$
$-\infty$	$k-4$	0

当 $k-4<0$ 即 $k<4$ 时，本题所给的两个函数有一个交点。

当 $k-4=0$ 即 $k=4$ 时，本题所给的两个函数有两个交点。

当 $k-4>0$ 即 $k>4$ 时，本题所给的两个函数有两个交点。

例. 就 a 的不同取值情况，确定方程 $\ln x=ax\ (a>0)$ 的实根个数。

解： 由于题中给定了一个方程，让求这个方程的实根个数，属于本节所讲的题型，所以应该按照本节所讲的解题方法来求解本题。

第一步：设辅助函数。

对于本题而言，设的辅助函数就是 $F(x)=\ln x-ax$。

当然，辅助函数也可以设为 $F(x)=ax-\ln x$。这里选择前者。

第二步：确定辅助函数 $F(x)$ 的定义域。

对于本题而言，本题所设的辅助函数是 $F(x)=\ln x-ax$，所以很明显，辅助函数的定义域肯定是 $(0,+\infty)$。

第三步：求两种值。

对于本题而言，先来求第一种值，也就是极值。

由于 $F(x)=\ln x-ax$，所以 $F'(x)=\frac{1}{x}-a$，令 $\frac{1}{x}-a=0$，解得 $x=\frac{1}{a}$，也就是说，驻点是 $x=\frac{1}{a}$。那么再看看在函数 $F(x)$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 内 $F'(x)=\frac{1}{x}-a$ 是否存在没有定义的点，很明显不存在。

驻点和一阶导数没有定义的点一共求出了一个（其中驻点一个，一阶导数没有定义的点零个），用 $x=\frac{1}{a}$ 划分定义域 $(0,+\infty)$，将定义域 $(0,+\infty)$ 划分为两个区间：$(0,\frac{1}{a})$、$(\frac{1}{a},+\infty)$。

在 $(0,\frac{1}{a})$ 中任取一点 $\frac{1}{2a}$，然后将 $x=\frac{1}{2a}$ 代入 $F'(x)=\frac{1}{x}-a$ 中，算出 $F'(\frac{1}{2a})=a$。由于 $F'(\frac{1}{2a})>0$，所以函数 $F(x)=\ln x-ax$ 在区间 $(0,\frac{1}{a})$ 上单调递增。

在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 中任取一点 $\frac{2}{a}$，然后将 $x=\frac{2}{a}$ 代入 $F'(x)=\frac{1}{x}-a$ 中，算出 $F'(\frac{2}{a})=-\frac{a}{2}$。由于 $F'(\frac{2}{a})<0$，所以函数 $F(x)=\ln x-ax$ 在区间 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递减。

由于点 $x=\frac{1}{a}$ 属于“左增右减”，所以点 $x=\frac{1}{a}$ 是一个极大值点。

极大值点 $x=\frac{1}{a}$ 所对应的极大值为 $F(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1=-\ln a-1$。

再来求第二种值，也就是辅助函数 $F(x)$ 在定义域端点处的函数值或极限值。

由于辅助函数 $F(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，两边都是开的，所以要算的是两个极限值。

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}(\ln x-ax)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}(\ln x-ax)=-\infty$$

第四步：写两行公式并观察。

对于本题而言

0	$\frac{1}{a}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\ln a-1$	$-\infty$

当 $-\ln a-1<0$ 即 $a>\mathrm{e}^{-1}$ 时，本题所给方程没有实根。

当 $-\ln a-1=0$ 即 $a=\mathrm{e}^{-1}$ 时，本题所给方程有一个实根。

当 $-\ln a-1>0$ 即 $a<\mathrm{e}^{-1}$ 时，本题所给方程有两个实根。

3.10 证明恒等式

本节要讨论的题型是：题目是一道证明题，让证明的是一个恒等式。

来看几个例子。

例. 证明：$\arctan x=\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}\ [x\in(-1,1)]$。

例. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$。证明：对 $F(x)=x^2f(x)$，在 $(0,1)$ 上存在 c，使得 $F^{(3)}(c)=0$。

例. 设 $f(x)$、$g(x)$ 在 (a,b) 内可导，$g(x)\neq0$ 且 $\begin{vmatrix}f(x)&g(x)\\f'(x)&g'(x)\end{vmatrix}=0[\forall x\in(a,b)]$。证明：存在常数 d，使得 $f(x)=dg(x)\ [x\in(a,b)]$。

例. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$。证明：存在 $c\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f'(c)=0$。

例. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内可导且满足 $f(0)=0$，$f(x)\geqslant0$，$f(x)\geqslant f'(x)\quad(\forall x>0)$。证明：$f(x)=0$。

例. 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且满足 $f''(x)+g(x)f'(x)-f(x)=0\quad(x\in[a,b])$，$f(a)=f(b)=0$。证明：$f(x)=0\ (x\in[a,b])$。

以上给出了六道题。这六道题都属于本节所讲的题型（证明恒等式）吗？如果你认为这六道题都属于本节所讲的题型（证明恒等式）的话，那你可就大错特错了。

在这六道题中，第一、三、五、六题属于“证明恒等式”的题型，而第二、四题属于后续要讲的“证明零点问题”的题型。

肯定有很多同学不明白这是为什么：以上六道题的问题让证明的都是等式，为什么有的就属于“证明恒等式”的题型，有的就属于“证明零点问题”的题型呢？

现在来回答这个问题。大家千万不要认为只要问题是让证明一个等式，就属于“证明恒等式”的题型，根本不是这样。那么，究竟是什么样呢？现在来给大家总结一下。

如果某道题是证明题，并且让证明的是一个等式的话，那么，它既有可能属于“证明恒等式”的题型，也有可能属于“证明零点问题”的题型。具体来说，若题目的问题是“存在某常数使得……”的形式，并且让证明的那个等式中的函数法则后面的括号里出现了该常数，则该题就属于“证明零点问题”的题型，否则，该题就属于“证明恒等式”的题型。

现在再来看一下之前的六个例子，看看为什么第一、三、五、六题属于“证明恒等式”的题型，而第二、四题属于“证明零点问题”的题型。

先来看第一题，第一题的问题根本就不是“存在某常数使得……”的形式，所以第一题属于“证明恒等式”的题型。再来看第二题，第二题的问题是“存在某常数使得……”的形式，并且让证明的那个等式 $F^{(3)}(c)=0$ 中的函数法则“F”后面的括号里出现了该常数（即 c），所以第二题属于“证明零点问题”的题型。再来看第三题，第三题的问题虽然是“存在某常数使得……”的形式，但是让证明的那个等式 $f(x)=dg(x)$ 中的两个函数法则“f”

和“g”后面的括号里都没有出现该常数（即d），所以第三题属于“证明恒等式”的题型。大家注意，假设本题让证明的等式中的两个函数法则“f”和“g”后面的括号里都出现了常数d或只有一个法则后面的括号里出现了常数d，那么该题就属于“证明零点问题”的题型了。再来看第四题，第四题的问题是“存在某常数使得……”的形式，并且让证明的那个等式$f'(c)=0$中的函数法则“f'”后面的括号里出现了该常数（即c），所以第四题属于“证明零点问题”的题型。最后来看第五、六题，第五、六题的问题根本就不是“存在某常数使得……”的形式，所以第五、六题属于“证明恒等式”的题型。

相信大家现在已经能够轻易地区分“证明恒等式”的题型与“证明零点问题”的题型了。

本节要讲的是“证明恒等式”题型的解题方法。

先来看方法 1。

方法 1 用于证明：让证明的恒等式的左右两侧的函数都是显化的。

方法 1 是： 首先将要证明的等式左右两侧的两个函数分别求导，计算出两个导函数相等，然后在题中所给的区间内任意取一个值（取的时候以好计算为原则），将该值分别代入等式左右两侧的两个函数中，计算出值相等。这样就可以说这两个函数恒等了。

下面来看例题。

例. 证明：$\arctan x=\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}\ [x\in(-1,1)]$。

解： 根据前面的内容，已经确定本题属于“证明恒等式”的题型。那么现在再来看看本题应不应该用刚刚讲完的方法 1 来做。

由于本题让证明的恒等式的左右两侧的函数都很明显地告诉我们了，也就是说都是显化的，所以本题应该用刚刚讲完的方法 1 来做。

现在正式用方法 1 做本题。

对于本题而言，通过计算可知

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned}
&(\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2})'\\
&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+(\frac{2x}{1-x^2})^2}\times\frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2}\\
&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\times2\times\frac{(1-x^2)+2x^2}{(1-x^2)^2}\\
&=\frac{1}{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\times\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\\
&=\frac{1}{\frac{(1-x^2)^2+4x^2}{(1-x^2)^2}}\times\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\\
&=\frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2+4x^2}\times\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\\
&=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2+4x^2}\\
&=\frac{1+x^2}{1+2x^2+x^4}\\
&=\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}\\
&=\frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

现在已经证出了$(\arctan x)'=(\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2})'$。

然后，在本题所给的区间 $(-1,1)$ 中任取一个点 0，把 $x=0$ 代入 $\arctan x$ 中，计算可得 $\arctan 0=0$；把 $x=0$ 代入 $\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}$ 中，计算可得 $\frac{1}{2}\arctan\frac{2\times 0}{1-0^2}=0$。

既证出了 $(\arctan x)'=(\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2})'$，又证出了 $\arctan 0=\frac{1}{2}\arctan\frac{2\times 0}{1-0^2}$，所以，当 $x\in(-1,1)$ 时，$\arctan x$ 和 $\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}$ 恒等，即 $\arctan x=\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}$ $[x\in(-1,1)]$。

例. 证明：$\arctan x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $[x\in(-\infty,\infty)]$。

解： 首先本题是一道证明题，并且本题让证明的是一个等式，所以本题要么就属于“证明恒等式”的题型，要么就属于“证明零点问题”的题型。由于本题的问题根本就不是“存在某常数使得……”的形式，所以本题属于“证明恒等式”的题型。那么现在再来看看本题应不应该用刚刚讲完的方法 1 来做。

由于本题让证明的恒等式的左右两侧的函数都很明显地告诉我们了，也就是说都是显化的，所以本题应该用刚刚讲完的方法 1 来做。

现在正式用方法 1 做本题。

对于本题而言，通过计算可知

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})'=\frac{1}{1+x^2}$$（计算过程省略）

现在已经证出了 $(\arctan x)'=(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})'$。

然后，在本题所给的区间 $(-\infty,+\infty)$ 中任取一个点 0，把 $x=0$ 代入 $\arctan x$ 中，计算可得 $\arctan 0=0$；把 $x=0$ 代入 $\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 中，计算可得 $\arcsin\frac{0}{\sqrt{1+0^2}}=0$。

既证出了 $(\arctan x)'=(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})'$，又证出了 $\arctan 0=\arcsin\frac{0}{\sqrt{1+0^2}}$，所以，当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$\arctan x$ 和 $\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 恒等，即 $\arctan x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $[x\in(-\infty,\infty)]$。

再来看方法 2。

方法 2 用于证明：让证明的恒等式的形式是 $\frac{f(x)}{g(x)}=$常数，并且函数 $f(x)$、$g(x)$ 都未显化给出。

方法 2 是： 将要证明的等式的左侧求导，然后计算出导数为 0，就证完了。

下面来看例题。

例. 设 $f(x)$、$g(x)$ 在 (a,b) 内可导，$g(x)\neq 0$ 且 $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}=0[\forall x\in(a,b)]$。证明：存在常数 d，使得 $f(x)=dg(x)$ $[x\in(a,b)]$。

解： 根据前面的内容，已经确定本题属于“证明恒等式”的题型。那么现在再来看看本题应不应该用刚刚讲完的方法 2 来做。

本题让证明的恒等式是 $f(x)=dg(x)$，将它稍微变一下形，变为 $\frac{f(x)}{g(x)}=d$。由于本题让证明的恒等式的形式是 $\frac{f(x)}{g(x)}=$常数，并且函数 $f(x)$、$g(x)$ 都未显化给出，所以本题应该用刚刚讲完的方法 2 来做。

现在正式用方法 2 做本题。

对于本题而言，就是计算出 $[\frac{f(x)}{g(x)}]'$ 为 0 就可以了。

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

由于题中有 $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}=0$，所以根据线性代数的知识立刻可知 $f(x)g'(x)-g(x)f'(x)=0$。由 $f(x)g'(x)-g(x)\ f'(x)=0$，

所以 $g(x)f'(x)-f(x)g'(x)=0$。因此，$[\dfrac{f(x)}{g(x)}]'=\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}=\dfrac{0}{g^2(x)}=0$。

由于 $[\dfrac{f(x)}{g(x)}]'=0$，这就说明 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为一个常数（因为只有常函数的导函数才是 0）。

再来看方法 3。

方法 3 用于证明：题中说了 $f(x)\geqslant 0$ 或题中说了 $f(x)\leqslant 0$，让证 $f(x)=0$。

方法 3 是：

①如果题中给的是 $f(x)\geqslant 0$，那么只需证出 $f(x)\leqslant 0$ 就可以了，因为 $f(x)\geqslant 0$ 与 $f(x)\leqslant 0$ 同时成立就意味着 $f(x)=0$。那么到底怎么证 $f(x)\leqslant 0$ 呢？就设辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$ 或设辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，证出在题中所给的区间内 $F'(x)\leqslant 0$，这就说明在题中所给的区间内 $F(x)$ 单调递减；然后计算出 F（题中所给区间的左端点），计算出的肯定是 0。既然 $F(x)$ 在题中所给的区间内单调递减，而 F（题中所给区间的左端点）=0，这就说明在题中所给的区间内 $F(x)\leqslant 0$。而 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$ 或 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，因为无论是 e^x 还是 e^{-x} 都肯定大于 0，所以有 $f(x)\leqslant 0$。

简单说就是，如果题中给的是 $f(x)\geqslant 0$，那么只需证出 $F(x)\leqslant 0$ 就可以了。具体证法就是设辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$ 或设辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$，然后证出在题中所给的区间内的 $F'(x)\leqslant 0$ 及 F(题中所给区间的左端点）=0 即可。

辅助函数到底设为 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$ 还是 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，这依具体的题而定。有的题设 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$ 根本证不出 $F'(x)\leqslant 0$ 而设 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$ 能证出 $F'(x)\leqslant 0$，有的题设 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$ 根本证不出 $F'(x)\leqslant 0$ 而设 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$ 能证出 $F'(x)\leqslant 0$。

②如果题中给的是 $f(x)\leqslant 0$，那么只需证出 $f(x)\geqslant 0$ 就可以了，因为 $f(x)\leqslant 0$ 与 $f(x)\geqslant 0$ 同时成立就意味着 $f(x)=0$。那么到底怎么证 $f(x)\geqslant 0$ 呢？就设辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$ 或设辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，证出在题中所给的区间内 $f(x)\geqslant 0$，这就说明在题中所给的区间内 $F(x)$ 单调递增；然后计算出 F（题中所给区间的左端点），计算出的肯定是 0。既然 $F(x)$ 在题中所给的区间内单调递增，而 F（题中所给区间的左端点）=0，这就说明在题中所给的区间内 $f(x)\geqslant 0$。而 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$ 或 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，因为无论是 e^x 还是 e^{-x} 都肯定大于 0，所以有 $f(x)\geqslant 0$。

简单说就是，如果题中给的是 $f(x)\leqslant 0$，那么只需证出 $f(x)\geqslant 0$ 就可以了。具体证法就是设辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$ 或设辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，然后证出在题中所给的区间内 $F'(x)\geqslant 0$ 及 F（题中所给区间的左端点）=0 即可。

辅助函数到底设为 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$ 还是 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，这也依具体的题而定。

下面来看例题。

例．设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内可导且满足 $f(0)=0$，$f(x)\geqslant 0$，$f(x)\geqslant f'(x)$ $(\forall x>0)$。证明：$f(x)=0$。

解：根据前面的内容，已经确定本题属于“证明恒等式”的题型。那么现在再来看看本题应不应该用刚刚讲完的方法 3 来做。

由于题中说了 $f(x)\geqslant 0$，让证 $f(x)=0$，所以本题应该用刚刚讲完的方法 3 来做。

现在正式用方法 3 做本题。

对于本题而言，明显应该用的是方法 3 的①。

首先要做的就是设辅助函数，那么到底是应该将辅助函数设为 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$ 还是应该将辅助函数设为 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$ 呢？这要看怎么设能证出 $F'(x)\leqslant 0$。那此刻也不知道怎么设能证出 $F'(x)\leqslant 0$，所以不妨就设 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$，试试看能不能证出 $F'(x)\leqslant 0$。如果能的话，那么说明确实应该将辅助函数设为 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$，如果不能的话，那么说明应该将辅助函数设为 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$。

那就来试试看。

设辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$，则 $F'(x)=\mathrm{e}^x f(x)+\mathrm{e}^x f'(x)=\mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)]$，根据本题的已知条件，根本就证不出 $F'(x)\leqslant 0$，所以这就说明应该将辅助函数设为 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$。

设辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，则 $F'(x)=-\mathrm{e}^{-x}f(x)+\mathrm{e}^{-x}f'(x)=\mathrm{e}^{-x}[f'(x)-f(x)]$。由于题中说 $f(x)\geqslant f'(x)$，所以有 $f'(x)-f(x)\leqslant 0$，而 e^{-x} 恒大于 0，将 $f'(x)-f(x)\leqslant 0$ 和 $\mathrm{e}^{-x}>0$ 代入 $F'(x)=\mathrm{e}^{-x}[f'(x)-f(x)]$ 中，立刻有 $F'(x)\leqslant 0$。这说明辅助函数 $F(x)$ 在题中所给的区间 $[0,+\infty)$ 内单调递减。

接下来再来证 F（题中所给区间的左端点）=0。

对于本题而言，题中所给的区间是 $[0,+\infty)$，左端点是 0，所以应该算的是 $F(0)$。

由于 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，所以 $F(0)=\mathrm{e}^{-0}f(0)=1\times 0=0$。

综上所述，由于 $F'(x)\leqslant 0$ 且 $F(0)=0$，所以可知在题中所给的区间 $[0,+\infty)$ 内 $F(x)\leqslant 0$。又因为 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，e^{-x} 恒大于 0，所以在题中所给的区间 $[0,+\infty)$ 内 $f(x)\leqslant 0$。而题中明确说 $f(x)\geqslant 0$，所以 $f(x)\geqslant 0$ 与 $f(x)\leqslant 0$ 相结合，得 $f(x)=0$。

最后来看方法 4。

方法 4 用于证明：如果某道“证明恒等式”的题型，方法 1、方法 2、方法 3 都不能证明，则用方法 4 证明。

方法 4 是：反证法。反证法指的是，假设所证结论的否定形式成立，然后推矛盾。

下面来看例题。

例. 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且满足 $f''(x)+g(x)f'(x)-f(x)=0\ (x\in[a,b])$，$f(a)=f(b)=0$。证明：$f(x)=0\ (x\in[a,b])$。

解：根据前面的内容，已经确定本题属于“证明恒等式”的题型。那么现在再来看看本题应不应该用刚刚讲完的方法 4 来做。

由于本题既不满足方法 1 的适用条件，也不满足方法 2 和方法 3 的适用条件，所以本题应该用刚刚讲完的方法 4 来做。

现在正式用方法 4 做本题。

对于本题而言，本题让证的结论是在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)=0$，那么结论的否定形式就是，在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 不恒为 0（大家一定要注意，千万别以为结论的否定形式是“恒不为 0”）。

现在假设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 不恒为 0，那么现在继续做，看看最后能推出什么矛盾结论。

由于题中说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，那么必然一阶可导，也就是说，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导。而可导一定连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。某函数在闭区间上连续，说明该函数在该闭区间上一定存在最大值和最小值，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最大值和最小值。

由于在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 不恒为 0，加上 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最大值和最小值，所以，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在正的最大值或负的最小值。注意：不能说函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在正的最大值和负的最小值。

情况 1：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在正的最大值。

最大值只能取自极大值或区间的端点值，而题中明确说区间的端点值 $f(a)=f(b)=0$，0 不是正数。既然存在的是正的最大值，那么就说明这个最大值肯定不是区间的端点值，而是极大值。

极大值点肯定又来自两种点，一种是驻点，另一种是一阶导数没有定义的点（这在之前都讲过）。题中明确说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，那么必然一阶可导，也就是说，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导。那就是说，在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 根本就不存在一阶导数没有定义的点。所以，极大值点肯定是驻点（一阶导数为 0 的点）。也就是说，最大值点肯定是驻点（一阶导数为 0 的点）。

现在来看题中所给的那个式子

$$f''(x)+g(x)f'(x)-f(x)=0\ (x\in[a,b])$$

后面的 $x\in[a,b]$ 说明区间 $[a,b]$ 上的任意一点都满足 $f''(x)+g(x)f'(x)-f(x)=0$。

现在设最大值是 $f(x_0)$，也就是说，$x=x_0$ 是驻点（一阶导数为 0 的点），那么立刻有

$$f(x_0)>0$$

$$f'(x_0)=0$$

$$f''(x_0)\leqslant 0$$

现在来解释一下以上三个式子为什么成立。

先来解释第一个式子：因为最大值是正的，所以 $f(x_0)>0$。

再来解释第二个式子：因为 $x=x_0$ 是驻点（一阶导数为 0 的点），所以 $f'(x_0)=0$。

最后来解释第三个式子：这要运用 3.7 节的知识点。

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导（也就是说 $f(x_0)$、$f'(x_0)$、$f''(x_0)$、$f'''(x_0)$、$f^{(4)}(x_0)$、$\cdots$、$f^{(n)}(x_0)$ 均存在），且 $f'(x_0),f''(x_0),\cdots,f^{(n-1)}(x_0),f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geqslant 2)$。

情况①：若 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)<0$，则 $x=x_0$ 为极大值点。

情况②：若 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)>0$，则 $x=x_0$ 为极小值点。

情况③：若 n 为奇数，则 $x=x_0$ 不是极值点而是拐点。

现在已知点 $x=x_0$ 是极大值点，所以肯定有 $f'(x_0)=0$、$f''(x_0)<0$，或者 $f'(x_0)=0$、$f''(x_0)=0$、$f'''(x_0)=0$、$f^{(4)}(x_0)<0$，或者……

所以有 $f''(x_0)\leqslant 0$。

现在把 $f(x_0)>0$、$f'(x_0)=0$、$f''(x_0)\leqslant 0$ 代入 $f''(x)+g(x)f'(x)-f(x)$ 中，得

$f''(x_0)+g(x_0)f'(x_0)-f(x_0)$

$=f''(x_0)-f(x_0)$

=一个小于等于0的数减去 一个大于0的数

=一个小于0的数

题中说 $f''(x)+g(x)f'(x)-f(x)=0$，按照这个等式，那么就有 $f''(x_0)+g(x_0)f'(x_0)-f(x_0)$=0，这与刚刚推出的"$f''(x_0)+g(x_0)f'(x_0)-f(x_0)$=一个小于0的数"矛盾。这说明开始的假设"在区间$[a,b]$上 $f(x)$ 不恒为 0"不成立，所以说明"在区间$[a,b]$上 $f(x)$ 恒为 0"。

情况 2：若 $f(x)$ 在$[a,b]$上存在负的最小值。

最小值只能取自极小值或区间的端点值，而题中明确说区间的端点值 $f(a)=f(b)=0$，0 不是负数。既然存在的是负的最小值，那么就说明这个最小值肯定不是区间的端点值，而是极小值。

极小值点肯定又来自两种点，一种是驻点，另一种是一阶导数没有定义的点（这在之前都讲过）。题中明确说 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导，那么必然一阶可导，也就是说，$f(x)$ 在$[a,b]$上可导。那就是说，在$[a,b]$上 $f(x)$ 根本就不存在一阶导数没有定义的点。所以，极小值点肯定是驻点（一阶导数为 0 的点）。也就是说，最小值点肯定是驻点（一阶导数为 0 的点）。

现在来看题中所给的那个式子

$f''(x)+g(x)f'(x)-f(x)=0\ (x\in[a,b])$

后面的 $x\in[a,b]$ 说明区间$[a,b]$上的任意一点都满足 $f''(x)+g(x)f'(x)-f(x)=0$。

现在设最小值是 $f(x_1)$，也就是说，$x=x_1$ 是驻点（一阶导数为 0 的点），那么立刻有

$f(x_1)<0$

$f'(x_1)=0$

$f''(x_0)\geqslant 0$

现在来解释一下以上三个式子为什么成立。

先来解释第一个式子：因为最小值是负的，所以 $f(x_1)<0$。

再来解释第二个式子：因为 $x=x_1$ 是驻点（一阶导数为 0 的点），所以 $f'(x_1)=0$。

最后来解释第三个式子：还是运用 3.7 节的知识点，现在已知点 $x=x_1$ 是极小值点，所以肯定有 $f'(x_1)=0$、$f''(x_1)>0$，或者 $f'(x_1)=0$、$f''(x_1)=0$、$f'''(x_1)=0$、$f^{(4)}(x_1)>0$，或者……

所以有 $f''(x_0)\geqslant 0$。

现在把 $f(x_1)<0$、$f'(x_1)=0$、$f''(x_0)\geqslant 0$ 代入 $f''(x)+g(x)f'(x)-f(x)$ 中，得

$f''(x_1)+g(x_1)f'(x_1)-f(x_1)$

$=f''(x_1)-f(x_1)$

=一个大于等于0的数减去 一个小于0的数

=一个大于0的数

题中说 $f''(x)+g(x)f'(x)-f(x)=0$，按照这个等式，那么就有 $f''(x_1)+g(x_1)f'(x_1)-f(x_1)$=0，这与刚刚推出的"$f''(x_1)+g(x_1)f'(x_1)-f(x_1)$=一个大于0的数"矛盾。这说明开始的假设"在区间$[a,b]$上 $f(x)$ 不恒为 0"不成立，所以说明"在区间$[a,b]$上 $f(x)$ 恒为 0"。

综上所述，无论函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上存在正的最大值还是存在负的最小值，都有 $f(x)=0$。

3.11　证明不等式

本节要讨论的题型是：题目是一道证明题，让证明的是一个不等式。

那么这种题型的解题方法是什么呢？

先来看方法 1。

方法 1 的适用题型：让证明的不等式的形式是□<□<□，并且这三个方框中全是常数。

方法 1 如下。

第一步：设一个辅助函数 $f(x)$。怎么设呢？就是把中间那个方框中的常数变成 x 就行了。

第二步：把让证明的不等式改写为□<□−0<□。

第三步：找到使得 $f(a)=0$ 的 a，把□<□−0<□ 再改写为□<□−$f(a)$<□。

第四步：在区间[a,中间那个方框中的常数]上使用拉格朗日中值定理即可得证。

先给大家讲一下什么叫拉格朗日中值定理。

拉格朗日中值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，则必存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$。

下面来看例题。

例. 证明：$\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)<\ln(\sqrt{2}+1)<\sqrt{2}$。

解：很明显，本题属于"证明不等式"的题型。再来看看本题应不应该用刚刚讲完的方法 1 来做。

由于本题让证明的不等式的形式是□<□<□，并且这三个方框中全是常数，所以本题应该用刚刚讲完的方法 1 来做。

第一步：设一个辅助函数 $f(x)$。怎么设呢？就是把中间那个方框中的常数变成 x 就行了。

对于本题而言，中间的方框中是 $\ln(\sqrt{2}+1)$，把里面的常数变成 x。也就是说，辅助函数为 $f(x)=\ln x$。

第二步：把让证明的不等式改写为□<□−0<□。

对于本题而言，本题让证明的不等式是 $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)<\ln(\sqrt{2}+1)<\sqrt{2}$，所以应该将其改写为 $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)<\ln(\sqrt{2}+1)-0<\sqrt{2}$。也就是说，本题让证明的不等式现在是 $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)<\ln(\sqrt{2}+1)-0<\sqrt{2}$。

第三步：找到使得 $f(a)=0$ 的 a，把□<□−0<□ 再改写为□<□−$f(a)$<□。

对于本题而言，刚才第一步已经设了辅助函数 $f(x)=\ln x$，显然 $\ln 1$ 是 0，所以将本题让证明的不等式 $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)<\ln(\sqrt{2}+1)-0<\sqrt{2}$ 改写为 $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)<\ln(\sqrt{2}+1)-\ln 1<\sqrt{2}$。也就是说，本题让证明的不等式现在是 $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)<\ln(\sqrt{2}+1)-\ln 1<\sqrt{2}$。

第四步：在区间[a,中间那个方框中的常数]上使用拉格朗日中值定理即可得证。

对于本题而言，$a=1$，中间那个方框中的常数是 $\sqrt{2}+1$，所以在区间 $[1,\sqrt{2}+1]$ 上使用拉格朗日中值定理。使用如下。

由于函数 $f(x)=\ln x$ 在 $[1,\sqrt{2}+1]$ 上连续，在 $(1,\sqrt{2}+1)$ 上可导，根据拉格朗日中值定理，有 $\dfrac{f(\sqrt{2}+1)-f(1)}{\sqrt{2}+1-1}=f'(\xi)$，其中 $\xi\in(1,\sqrt{2}+1)$。

将 $\dfrac{f(\sqrt{2}+1)-f(1)}{\sqrt{2}+1-1}=f'(\xi)$ 整理得 $\dfrac{\ln(\sqrt{2}+1)-\ln 1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\xi}$，再整理可得 $\ln(\sqrt{2}+1)-\ln 1=\dfrac{\sqrt{2}}{\xi}$。

既然 $1<\xi<\sqrt{2}+1$，所以 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}<\dfrac{\sqrt{2}}{\xi}<\dfrac{\sqrt{2}}{1}$，整理得 $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)<\dfrac{\sqrt{2}}{\xi}<\sqrt{2}$。

既然 $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)<\dfrac{\sqrt{2}}{\xi}<\sqrt{2}$，而 $\ln(\sqrt{2}+1)-\ln 1=\dfrac{\sqrt{2}}{\xi}$，所以 $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)<\ln(\sqrt{2}+1)-\ln 1<\sqrt{2}$。

再来看方法 2。

方法 2 的适用题型：让证明的不等式的形式是 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>$某常数，或者让证明的不等式的形式是 $\dfrac{f(x)}{g(x)}<$某常数。

方法 2 如下。

第一步：找出使得 $f(a)=0$ 和 $g(a)=0$ 的常数 a，然后把要证明的不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>$某常数 改写为 $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}>$某常数，或者把要证明的不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}<$某常数 改写为 $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}<$某常数。

第二步：在区间 $[a,x]$ 上对函数 $f(x)$、$g(x)$ 使用柯西中值定理即可得证。

先给大家讲一下什么叫柯西中值定理。

柯西中值定理：设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导且 $g'(x)\neq 0$，则必存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

下面来看例题。

例. 证明：$x>0$ 时，$\dfrac{(1+x)\ln(1+x)}{\arctan x}>1$。

解：很明显，本题属于"证明不等式"的题型。再来看看本题应不应该用刚刚讲完的方法 2 来做。

由于本题让证明的不等式的形式是$\dfrac{f(x)}{g(x)}>$某常数，所以本题应该用刚刚讲完的方法 2 来做。

第一步：找出使得 $f(a)=0$ 和 $g(a)=0$ 的常数 a，然后把要证明的不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>$ 某常数改写为 $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}>$ 某常数。

对于本题而言，由于 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$，$g(x)=\arctan x$，能使得 $f(a)=0$ 和 $g(a)=0$ 的常数 a 很明显是 0，所以应该将本题让证明的不等式改写为 $\dfrac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}>1$。也就是说，本题让证明的不等式从 $\dfrac{(1+x)\ln(1+x)}{\arctan x}>1$ 变为了 $\dfrac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}>1$。

第二步：在区间 $[a,x]$ 上对函数 $f(x)$、$g(x)$ 使用柯西中值定理即可得证。

对于本题而言，$a=0$，所以在区间 $[0,x]$ 上对函数 $f(x)$、$g(x)$ 使用柯西中值定理。使用如下。

由于函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[0,x]$ 上连续，在 $(0,x)$ 上可导，根据柯西中值定理，有 $\dfrac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，其中 $\xi\in(0,x)$。

将 $\dfrac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 整理得 $\dfrac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\dfrac{1+\ln(1+\xi)}{\dfrac{1}{1+\xi^2}}=(1+\xi^2)[1+\ln(1+\xi)]$。

由于 $(1+\xi^2)>1$，$[1+\ln(1+\xi)]>1$，所以 $(1+\xi^2)[1+\ln(1+\xi)]>1$，而 $\dfrac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=(1+\xi^2)[1+\ln(1+\xi)]$，所以 $\dfrac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}>1$。

再来看方法 3。方法 3 是考研中最常用到的“证明不等式”的方法。

方法 3 的适用题型：让证明的不等式的形式是 $\Box<\Delta$(或$\Box>\Delta$,或$\Box\leqslant\Delta$,或$\Box\geqslant\Delta$)，并且 $\Box$ 和 Δ 中都不是常数。

方法 3 如下。

第一步：设辅助函数 $F(x)=\Delta-\Box$，或者设辅助函数 $F(x)=\Delta-\Box$（这两个辅助函数设哪个都行）。

第二步：对辅助函数 $F(x)$ 求导、求导、再求导……求到几阶导为止呢？如果遇到以下两种情况之一，那么就不用再往后求了。

情况 1：求到某阶导函数后，在题中所给的区间上该导函数恒正或恒负。

情况 2：求到某阶导函数后，可以在题中所给的区间上找到一个点，在题中所给的区间的左端点上该导函数恒正（或恒负），在题中所给的区间的右端点上该导函数恒负（或恒正）。

第三步：一阶一阶地往回推，要通过高阶导函数的正负推出低阶导函数的增减性，再通过端点的函数值或第二步中找到的那个分界点的函数值推出低阶导函数的正负……就这样一阶一阶地往回推，直到推出 $F(x)>0$ 或 $F(x)<0$ 为止。

下面来看例题。

例. 证明：$x>1$ 时，$\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}>\dfrac{x}{1+x}$。

解：很明显，本题属于“证明不等式”的题型。再来看看本题应不应该用刚刚讲完的方法 3 来做。

由于本题让证明的不等式的形式是 $\Box>\Delta$，并且 $\Box$ 和 Δ 中都不是常数，所以本题应该用刚刚讲完的方法 3 来做。

第一步：设辅助函数 $F(x)=\Box-\Delta$，或者设辅助函数 $F(x)=\Delta-\Box$。

对于本题而言，大家肯定认为应该将辅助函数设为 $F(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}-\dfrac{x}{1+x}$ 或 $F(x)=\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}$。的确，这样没问题。但是这样的话，第二步求导就会很麻烦，因为有分数。所以，不妨先将本题所让证的不等式变一下形，变得没有分数，那么应该怎么变呢？很简单，在不等式两侧同时乘以 $\ln x(1+x)$，这样一来，本题让证明的不等式就变为 $(1+x)\ln(1+x)>x\ln x$。

经过这么一变之后，相当于本题变为“证明：$x>1$ 时，$(1+x)\ln(1+x)>x\ln x$”。辅助函数此时就应该设为 $F(x)=(1+x)\ln(1+x)-x\ln x$ 或 $F(x)=x\ln x-(1+x)\ln(1+x)$。这里就选前者，也就是设辅助函数 $F(x)=(1+x)\ln(1+x)-x\ln x$。

那么，最终只要能证明在区间 $(1,+\infty)$ 上 $F(x)>0$ 就可以了，因为 $F(x)>0$ 说明 $(1+x)\ln(1+x)-x\ln x>0$，从而就说明 $(1+x)\ln(1+x)>x\ln x$。

第二步：对辅助函数 $F(x)$ 求导、求导、再求导……求到几阶导为止呢？如果遇到以下两种情况之一，那么就不用再往后求了。

情况 1：求到某阶导函数后，在题中所给的区间上该导函数恒正或恒负。

情况 2：求到某阶导函数后，可以在题中所给的区间上找到一个点，在题中所给的区间的左端点上该导函数恒正（或恒负），在题中所给的区间的右端点上该导函数恒负（或恒正）。

对于本题而言，由于 $F(x)=(1+x)\ln(1+x)-x\ln x$，所以 $F'(x)=\ln(1+x)-\ln x$。现在还用继续往后求 $F''(x)$ 吗？不用了。因为现在求得的这个一阶导数 $F'(x)=\ln(1+x)-\ln x$ 在题中所给的区间 $(1,+\infty)$ 上恒正[很明显 $\ln(1+x)$ 要比 $\ln x$ 大，也就是 $F'(x)>0$，这属于“情况 1”，所以不用继续往后求 $F''(x)$ 了。

第三步：一阶一阶地往回推，要通过高阶导函数的正负推出低阶导函数的增减性，再通过端点的函数值或第二步中找到的那个分界点的函数值推出低阶导函数的正负……就这样一阶一阶地往回推，直到推出 $F(x)>0$ 或 $F(x)<0$ 为止。

对于本题而言，由于在区间 $(1,+\infty)$ 上 $F'(x)>0$，这说明 $F(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增。算一下 $F(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上的左端点的函数值 $F(1)$。由于 $F(x)=(1+x)\ln(1+x)-x\ln x$，所以 $F(1)=(1+1)\ln(1+1)-1\ln 1=2\ln 2>0$。

因为 $F(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，而 $F(1)$ 又大于 0，那么就说明在区间 $(1,+\infty)$ 上 $F(x)>0$。

例. 证明：$x\in(0,1)$ 时，$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$。

解： 很明显，本题属于“证明不等式”的题型。再来看看本题应不应该用刚刚讲完的方法 3 来做。

由于本题让证明的不等式的形式是□ $\geqslant \Delta$，并且□和 Δ 中都不是常数，所以本题应该用刚刚讲完的方法 3 来做。

第一步：设辅助函数 $F(x)=$□ $-\Delta$，或者设辅助函数 $F(x)=\Delta-$□。

对于本题而言，应该将辅助函数设为 $F(x)=x^2-(1+x)\ln^2(1+x)$ 或 $F(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$。这里就选前者，也就是设辅助函数 $F(x)=x^2-(1+x)\ln^2(1+x)$。

那么，最终只要能证明在区间 $(0,1)$ 上 $F(x)>0$ 就可以了，因为 $F(x)>0$ 说明 $x^2-(1+x)\ln^2(1+x)>0$，从而就说明 $x^2>(1+x)\ln^2(1+x)$。

第二步：对辅助函数 $F(x)$ 求导、求导、再求导……求到几阶导为止呢？如果遇到前述两种情况之一，那么就不用再往后求了。

对于本题而言，由于 $F(x)=x^2-(1+x)\ln^2(1+x)$，所以 $F'(x)=2x-\ln^2(1+x)-2\ln(1+x)$。现在还用继续往后求 $F''(x)$ 吗？还用。因为现在求得的这个一阶导数 $F'(x)=2x-\ln^2(1+x)-2\ln(1+x)$ 在题中所给的区间 $(0,1)$ 上根本无法判断是否恒正或恒负（不属于“情况 1”），而且也根本无法分段判断正负（也不属于“情况 2”），所以必须还要继续往后求 $F''(x)$。

$F''(x)=\dfrac{2}{1+x}[x-\ln(1+x)]$，现在还用继续往后求 $F'''(x)$ 吗？不用了。因为现在求得的这个二阶导数 $F''(x)=\dfrac{2}{1+x}[x-\ln(1+x)]$ 在题中所给的区间 $(0,1)$ 上恒正[因为在区间 $(0,1)$ 上 $\dfrac{2}{1+x}$ 大于 0，而且在区间 $(0,1)$ 上 x 要比 $\ln(1+x)$ 大，也就是 $F''(x)>0$，这属于“情况 1”，所以不用继续往后求 $F'''(x)$ 了]。

第三步：一阶一阶地往回推，直到推出 $F(x)>0$ 或 $F(x)<0$ 为止。

对于本题而言，由于在区间 $(0,1)$ 上 $F''(x)>0$，这说明 $F'(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增。算一下 $F'(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上的左端点的函数值 $F'(0)$。由于 $F'(x)=2x-\ln^2(1+x)-2\ln(1+x)$，所以 $F'(0)=2\times0-\ln^2(1+0)-2\ln(1+0)=0$。

因为 $F'(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，而 $F'(0)$ 又等于 0，说明在区间 $(0,1)$ 上 $F'(x)>0$，继续往回推。

由于在区间 $(0,1)$ 上 $F'(x)>0$，这说明 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增。算一下 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上的左端点的函数值 $F(0)$。由于 $F(x)=x^2-(1+x)\ln^2(1+x)$，所以 $F(0)=0^2-(1+0)\ln^2(1+0)=0$。

因为 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，而 $F(0)$ 又等于 0，说明在区间 $(0,1)$ 上 $F(x)>0$。

例. 证明：$x>0$ 时，$(x2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$。

解： 很明显，本题属于“证明不等式”的题型。再来看看本题应不应该用刚刚讲完的方法 3 来做。

由于本题让证明的不等式的形式是□ $\geqslant \Delta$，并且□和 Δ 中都不是常数，所以本题应该用刚刚讲完的方法 3 来做。

第一步：设辅助函数 $F(x)=$□ $-\Delta$，或者设辅助函数 $F(x)=\Delta-$□。

对于本题而言，应该将辅助函数设为 $F(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$ 或 $F(x)=(x-1)^2-(x^2-1)\ln x$。这里就选前者，也就是设辅助函数 $F(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$。

那么，最终只要能证明在区间 $(0,+\infty)$ 上 $F(x)\geqslant0$ 就可以了，因为 $F(x)\geqslant0$ 说明 $(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\geqslant0$，从而说明 $(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$。

第二步：对辅助函数 $F(x)$ 求导、求导、再求导……求到几阶导为止呢？如果遇到前述两种情况之一，那么就

不用再往后求了。

对于本题而言，由于 $F(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，所以 $F'(x)=2x\ln x-x-\dfrac{1}{x}+2$。现在还用继续往后求 $F''(x)$ 吗？还用。因为现在求得的这个一阶导数 $F'(x)=2x\ln x-x-\dfrac{1}{x}+2$ 在题中所给的区间 $(0,+\infty)$ 上根本无法判断是否恒正或恒负（不属于“情况 1”），而且也根本无法分段判断正负（也不属于“情况 2”），所以必须还要继续往后求 $F''(x)$。

$F''(x)=2\ln x+1+\dfrac{1}{x^2}$，现在还用继续往后求 $F'''(x)$ 吗？还用。因为现在求得的这个二阶导数 $F''(x)=2\ln x+1+\dfrac{1}{x^2}$ 在题中所给的区间 $(0,+\infty)$ 上根本无法判断是否恒正或恒负（不属于“情况 1”），而且也根本无法分段判断正负（也不属于“情况 2”），所以必须还要继续往后求 $F'''(x)$。

$F'''(x)=2\times\dfrac{x^2-1}{x^3}$，现在还用继续往后求 $F^{(4)}(x)$ 吗？不用了。因为可以在题中所给的区间 $(0,+\infty)$ 上找到一个点 1，当在区间 $(0,1)$ 上时，$F'''(x)=2\times\dfrac{x^2-1}{x^3}$ 恒负，也就是 $F'''(x)<0$；当在区间 $(1,+\infty)$ 上时，$F'''(x)=2\times\dfrac{x^2-1}{x^3}$ 恒正，也就是 $F'''(x)>0$。这属于“情况 2”，所以不用继续往后求 $F^{(4)}(x)$ 了。

第三步：一阶一阶地往回推，直到推出 $F(x)>0$ 或 $F(x)<0$ 为止。

对于本题而言，我们先来讨论在区间 $(0,1)$ 上的情况。

由于在区间 $(0,1)$ 上 $F'''(x)<0$，这说明 $F''(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减。算一下 $F''(x)$ 在分界点 1 的函数值 $F''(1)$。由于 $F''(x)=2\ln x+1+\dfrac{1}{x^2}$，所以 $F''(1)=2\ln 1+1+\dfrac{1}{1}=2>0$。

因为 $F''(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，而 $F''(1)$ 又大于 0，说明在区间 $(0,1)$ 上 $F''(x)>0$。

由于在区间 $(0,1)$ 上 $F''(x)>0$，这说明 $F'(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增。算一下 $F'(x)$ 在分界点 1 的函数值 $F'(1)$。由于 $F'(x)=2x\ln x-x-\dfrac{1}{x}+2$，所以 $F'(1)=2\ln 1-1-1+2=0$。

因为 $F'(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，而 $F'(1)$ 又等于 0，说明在区间 $(0,1)$ 上 $F'(x)<0$。

由于在区间 $(0,1)$ 上 $F'(x)<0$，这说明 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减。算一下 $F(x)$ 在分界点 1 的函数值 $F(1)$。由于 $F(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，所以 $F(1)=(1-1)\ln 1-(1-1)^2=0$。

因为 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，而 $F(1)$ 又等于 0，说明在区间 $(0,1)$ 上 $F(x)>0$。

再来讨论区间在 $(1,+\infty)$ 上的情况。

由于在区间 $(1,+\infty)$ 上 $F'''(x)>0$，这说明 $F''(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增。算一下 $F''(x)$ 在分界点 1 的函数值 $F''(1)$。由于 $F''(x)=2\ln x+1+\dfrac{1}{x^2}$，所以 $F''(1)=2\ln 1+1+\dfrac{1}{1}=2>0$。

因为 $F''(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，而 $F''(1)$ 又大于 0，说明在区间 $(1,+\infty)$ 上 $F''(x)>0$。

由于在区间 $(1,+\infty)$ 上 $F''(x)>0$，这说明 $F'(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增。算一下 $F'(x)$ 在分界点 1 的函数值 $F'(1)$。由于 $F'(x)=2x\ln x-x-\dfrac{1}{x}+2$，所以 $F'(1)=2\ln 1-1-1+2=0$。

因为 $F'(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，而 $F'(1)$ 又等于 0，说明在区间 $(1,+\infty)$ 上 $F'(x)>0$。

由于在区间 $(1,+\infty)$ 上 $F'(x)>0$，这说明 $F(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增。算一下 $F(x)$ 在分界点 1 的函数值 $F(1)$。由于 $F(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，所以 $F(1)=(1-1)\ln 1-(1-1)^2=0$。

因为 $F(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，而 $F(1)$ 又等于 0，说明在区间 $(1,+\infty)$ 上 $F(x)>0$。

综上所述，无论是在区间 $(0,1)$ 上还是在区间 $(1,+\infty)$ 上都有 $F(x)>0$，而 $F(1)=0$，所以在区间 $(0,+\infty)$ 上 $F(x)>0$。

我们再来看方法 4。

方法 4 的适用题型：让证明的不等式的形式是□≤□≤□，并且最左侧的方框和最右侧的方框中都是常数而中间的方框中是函数。

方法 4 如下：只要按 3.8 节中所讲的求最值的方法求出中间那个函数的最小值是最左侧方框中的值、最大值是最右侧方框中的值就可以了。

下面来看例题。

例. 已知 p 为大于 1 的常数。证明：$x\in[0,1]$ 时，$\dfrac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$。

解： 很明显，本题属于“证明不等式”的题型。再来看看本题应不应该用刚刚讲完的方法 4 来做。

由于本题让证明的不等式的形式是□≤□≤□，并且最左侧的方框和最右侧的方框中都是常数而中间的方框中是

函数，所以本题应该用刚刚讲完的方法 4 来做。

那就是说，只要求出函数 $y=x^p+(1-x)^p$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值为 $\dfrac{1}{2^{p-1}}$，在区间 $[0,1]$ 上的最大值为 1 就可以了。

现在就按 3.8 节中所讲的求最值的方法来求。

3.8 节中所讲的求最值的方法一共有三步。

第一步：把题中所给函数在题中所给区间内的所有极值求出来。

对于本题而言，$y=x^p+(1-x)^p$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$。

$y'=p[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}]$

令 $p[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}]=0$，解得 $x=\dfrac{1}{2}$，说明驻点有一个，是 $x=\dfrac{1}{2}$。

在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内，一阶导数没有定义的点不存在。

综上所述，驻点和一阶导数没有定义的点一共有一个（其中驻点一个，一阶导数没有定义的点零个），所以用 $x=\dfrac{1}{2}$ 来划分定义域 $(-\infty,+\infty)$，将定义域 $(-\infty,+\infty)$ 划分为两个区间：$(-\infty,\dfrac{1}{2})$、$(\dfrac{1}{2},+\infty)$。

由于这个点 $x=\dfrac{1}{2}$ 在题中所给的区间 $[0,1]$ 上，所以这个点要进行考察，看看它是不是极值点。

在区间 $(-\infty,\dfrac{1}{2})$ 内任取一个点 0，然后将 $x=0$ 代入导函数 $y'=p[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}]$ 中，解得 $y'=-p$。由于 $y'<0$，所以函数 $y=x^p+(1-x)^p$ 在区间 $(-\infty,\dfrac{1}{2})$ 上单调递减。

在区间 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 内任取一个点 1，然后将 $x=1$ 代入导函数 $y'=p[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}]$ 中，解得 $y'=p$。由于 $y'>0$，所以函数 $y=x^p+(1-x)^p$ 在区间 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增。

综上所述，由于点 $x=\dfrac{1}{2}$ 属于“左减右增”，所以点 $x=0$ 是极值点，并且是极小值点。

已经确定了 $x=\dfrac{1}{2}$ 是极值点，所以把这个极值点所对应的极值求出来。

极小值点 $x=\dfrac{1}{2}$ 所对应的极小值为 $\dfrac{1}{2^{p-1}}$。

第二步：求所给的区间的两个端点的函数值或极限值。

对于本题而言，由于本题所给的区间是 $[0,1]$，两边都是闭的，所以求的是两边的函数值，也就是求 $f(0)$ 和 $f(1)$。

由于 $y=x^p+(1-x)^p$，所以 $f(0)=1$，$f(1)=1$。

第三步：把第一步算出的所有极值和第二步算出的两个值写一竖排进行比较。

对于本题而言，把第一步算出的所有极值和第二步算出的两个值写一竖排进行比较。

$\dfrac{1}{2^{p-1}}$

1

1

这三个数中，哪个数最大？由于题中说 $p>1$，所以很明显是 1 最大。因为 1 是第二步算出的函数值，所以 1 就是函数 $y=x^p+(1-x)^p$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值。

这三个数中，哪个数最小？很明显是 $\dfrac{1}{2^{p-1}}$ 最小。因为 $\dfrac{1}{2^{p-1}}$ 是第一步算出的极值，所以 $\dfrac{1}{2^{p-1}}$ 就是函数 $y=x^p+(1-x)^p$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值。

所以有 $x\in[0,1]$ 时，$\dfrac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$。

再来看方法 5。

方法 5 的适用题型：让证明的不等式的形式是□ $>\Delta$ 或□ $<\Delta$，并且□和 Δ 中都是常数，并且设一个辅助函数 $f(x)$ 后让证明的不等式可表示为 $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 或 $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$。

方法 5 如下。

①如果最终要证明的不等式是 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，那么只要算出 $f''(x)>0$ 就可以了。这是因为 $f''(x)>0$ 说明函数图形是凹的，而凹函数的定义是 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$。

②如果最终要证明的不等式是 $f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，那么只要算出 $f''(x)<0$ 就可以了。这是因为 $f''(x)<0$ 说明函数图形是凸的，而凸函数的定义是 $f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$。

下面来看例题。

例. 设 $a>0$，$b>0$，$a\neq b$。证明下列不等式：

（1）$a^p+b^p>2^{1-p}(a+b)^p$ $(p>1)$。

（2）$a^p+b^p<2^{1-p}(a+b)^p$ $(0<p<1)$。

解： 先来做第（1）题。

很明显，本题属于“证明不等式”的题型。再来看看本题应不应该用刚刚讲完的方法 5 来做。

首先，本题让证明的不等式的形式是□> Δ；其次，□和 Δ 中都是常数；最后，本题让证明的不等式变一下形就是 $\frac{1}{2}(a^p+b^p)>(\frac{a+b}{2})^p$，所以设辅助函数 $y=x^p$ 后，本题让证明的不等式就变为 $\frac{f(a)+f(b)}{2}>f(\frac{a+b}{2})$。综上所述，本题应该用刚刚讲完的方法 5 来做，只要证明 $f''(x)>0$ 就可以了。

由于 $y=x^p$，所以 $y'=px^{p-1}$，$y''=p(p-1)x^{p-2}$。

由于题中说 $p>1$，所以就可以知道对于任意的在区间 $(0,+\infty)$ 上的数 x，都有 $y''>0$。

也就是说，在区间 $(0,+\infty)$ 上函数 $y=x^p$ 为凹函数。那么，根据凹函数的定义可知，对于任意的 $a>0$，$b>0$，有 $\frac{f(a)+f(b)}{2}>f(\frac{a+b}{2})$。

再来做第（2）题。

很明显，本题属于“证明不等式”的题型。再来看看本题应不应该用刚刚讲完的方法 5 来做。

首先，本题让证明的不等式的形式是□< Δ；其次，□和 Δ 中都是常数；最后，本题让证明的不等式变一下形就是 $\frac{1}{2}(a^p+b^p)<(\frac{a+b}{2})^p$，所以设辅助函数 $y=x^p$ 后，本题让证明的不等式就变为 $\frac{f(a)+f(b)}{2}<f(\frac{a+b}{2})$。

综上所述，本题应该用刚刚讲完的方法 5 来做，只要证明 $f''(x)<0$ 就可以了。

由于 $y=x^p$，所以 $y'=px^{p-1}$，$y''=p(p-1)x^{p-2}$。

由于题中说 $0<p<1$，所以就可以知道对于任意的在区间 $(0,+\infty)$ 上的数 x，都有 $y''<0$。

也就是说，在区间 $(0,+\infty)$ 上函数 $y=x^p$ 为凸函数。那么，根据凸函数的定义可知，对于任意的 $a>0$，$b>0$，有 $\frac{f(a)+f(b)}{2}<f(\frac{a+b}{2})$。

最后来看方法 6。

方法 6 的适用题型：让证明的不等式的形式是 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$ 或 $f(x)\geqslant 0$ 或 $f(x)\leqslant 0$，题中没有明显告诉 $f(x)$，并且题中告诉了 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的一个关系式。

方法 6 如下。

①如果题中让证明的是 $f(x)>0$，那么就设辅助函数 $F(x)=e^x f(x)$ 或设辅助函数 $F(x)=e^{-x}f(x)$，证出在题中所给的区域内 $F'(x)>0$，这就说明在题中所给的区域内 $F(x)$ 单调递增；然后计算出 F(题中所给区域的左端点)，计算出的肯定是 0。既然 $F(x)$ 在题中所给的区域内单调递增，而 F 题中所给区域的左端点=0，这就说明在题中所给的区域内 $F(x)>0$。而 $F(x)=e^x f(x)$ 或 $F(x)=e^{-x}f(x)$，因为无论是 e^x 还是 e^{-x} 都肯定大于 0，所以有 $f(x)>0$。

简单说就是，如果题中让证明的是 $f(x)>0$，那么只需设辅助函数 $F(x)=e^x f(x)$ 或设辅助函数 $F(x)=e^{-x}f(x)$，然后证出在题中所给的区间内 $F'(x)>0$ 及 F(题中所给区域的左端点)$=0$ 即可。

辅助函数到底设为 $F(x)=e^x f(x)$ 还是 $F(x)=e^{-x}f(x)$，这依具体的题而定。有的题设 $F(x)=e^x f(x)$ 根本证不出 $F'(x)>0$ 而设 $F(x)=e^{-x}f(x)$ 能证出 $F'(x)>0$，有的题设 $F(x)=e^{-x}f(x)$ 根本证不出 $F'(x)>0$ 而设 $F(x)=e^x f(x)$ 能证出 $F'(x)>0$。

②如果题中让证明是 $F(x)\geqslant 0$，那么就设辅助函数 $F(x)=e^x f(x)$ 或设辅助函数 $F(x)=e^{-x}f(x)$，证出在题中所给的区域内 $F(x)\geqslant 0$，这就说明在题中所给的区域内 $F(x)$ 单调不减；然后计算出 F(题中所给区域的左端点)，计

算出的肯定是 0。既然 $F(x)$ 在题中所给的区域内单调不减，而 F(题中所给区域的左端点)=0，这就说明在题中所给的区域内 $F(x)\geqslant 0$ 。而 $F(x)=e^{x}f(x)$ 或 $F(x)=e^{-x}f(x)$ ，因为无论是 e^{x} 还是 e^{-x} 都肯定大于 0，所以有 $F(x)\geqslant 0$ 。

简单说就是，如果题中让证明的是 $F(x)\geqslant 0$ ，那么只需设辅助函数 $F(x)=e^{x}f(x)$ 或设辅助函数 $F(x)=e^{-x}f(x)$ ，然后证出在题中所给的区间内 $F(x)\geqslant 0$ 及 F(题中所给区域的左端点) $=0$ 即可。

辅助函数到底设为 $F(x)=e^{x}f(x)$ 还是 $F(x)=e^{-x}f(x)$ ，这也依具体的题而定。

③如果题中让证明的是 $f(x)<0$，那么只需设辅助函数 $F(x)=e^{x}f(x)$ 或设辅助函数 $F(x)=e^{-x}f(x)$，然后证出在题中所给的区间内 $F'(x)<0$ 及 F(题中所给区域的左端点)=0 即可。

辅助函数到底设为 $F(x)=e^{x}f(x)$ 还是 $F(x)=e^{-x}f(x)$ ，这也依具体的题而定。

④如果题中让证明的是 $F(x)\leqslant 0$ ，那么只需设辅助函数 $F(x)=e^{x}f(x)$ 或设辅助函数 $F(x)=e^{-x}f(x)$ ，然后证出在题中所给的区间内 $F(x)\leqslant 0$ 及 F(题中所给区域的左端点)=0 即可。

辅助函数到底设为 $F(x)=e^{x}f(x)$ 还是 $F(x)=e^{-x}f(x)$ ，这也依具体的题而定。

下面来看例题。

例. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f(0)=0$ ，在区间 $x\in[0,+\infty)$ 上有 $f'(x)>-f(x)$ 。证明：当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)>0$ 。

解：很明显，本题属于“证明不等式”的题型。再来看看本题应不应该用刚刚讲完的方法 6 来做。

首先，本题让证明的不等式的形式是 $f(x)>0$；其次，函数 $f(x)$ 在题中没有显化地给出；最后，题中给出了 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的一个关系式。综上所述，本题应该用刚刚讲完的方法 6 来做。

现在正式用方法 6 做本题。

设辅助函数 $F(x)=e^{x}f(x)$ ，由方法 6 可知，只需要证出在区间 $[0,+\infty)$ 上 $F'(x)>0$ 及 $F(0)=0$ 就可以了。

由于 $F(x)=e^{x}f(x)$ ，所以 $F(x)=e^{x}f(x)+e^{x}f'(x)=e^{x}[f(x)+f'(x)]$ 。题中说在区间 $[0,+\infty)$ 上有 $f'(x)>-f(x)$ ，这就说明在区间 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)+f'(x)>0$ ，而 e^{x} 一定大于 0，所以在区间 $[0,+\infty)$ 上 $F'(x)>0$ 。

由于 $F(x)=e^{x}f(x)$ ，所以 $F(0)=1\times 0=0$ 。

在区间 $[0,+\infty)$ 上 $F'(x)>0$ 说明在区间 $[0,+\infty)$ 上 $F(x)$ 单调递增，而左端点的函数值等于 0，那就说明在区间 $[0,+\infty)$ 上 $F(x)>0$ 。而 $F(x)=e^{x}f(x)$ ， e^{x} 一定大于 0，所以在区间 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)>0$ 。

3.12 证明零点问题

本节要讨论的题型是：证明零点问题。

什么样的题型属于“证明零点问题”的题型呢？这在 3.10 节中告诉过大家。现在再给大家复习一下。

如果某道题是证明题，并且让证明的是一个等式的话，那么，它既有可能属于“证明恒等式”的题型，也有可能属于“证明零点问题”的题型。具体地说，若题目的问题是“存在某常数使得……”的形式，并且让证明的那个等式中的函数法则后面的括号里出现了该常数，则该题就属于“证明零点问题”的题型，否则，该题就属于“证明恒等式”的题型。

在 3.10 节开始给出的六道题中，第一、三、五、六题属于“证明恒等式”的题型，而第二、四题属于本节要讲的“证明零点问题”的题型。

本节要讲的就是“证明零点问题”的题型的解题方法。在讲“证明零点问题”的题型的解题方法前先讲五个定理。它们分别是零点定理、零点定理的逆否命题、介值定理、达布定理、罗尔定理。

零点定理 1：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\times f(b)<0$ [也就是说， $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号]，那么在开区间 (a,b) 上至少有一点 ξ 使得 $f(\xi)=0$ 。

零点定理 2：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\times f(b)\leqslant 0$ ，那么在区间 $[a,b]$ 上至少有一点 ξ 使得 $f(\xi)=0$ 。

零点定理的逆否命题：设函数 $f(x)$ 在某区间上连续，且 $f(x)$ 在该区间上恒不等于 0[也就是说，该区间上的任意一个点 ξ 都不能使得 $f(\xi)=0$]，那么函数 $f(x)$ 在该区间上必恒正或恒负。

介值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点处取不同的函数值 $f(a)=A$ 与 $f(b)=B$ 。

① 假设 $A>B$ ，那么对于满足 $B<C<A$ 的任意常数 C ，在开区间 (a,b) 上至少有一点 ξ 使得 $f(\xi)=C$ 。

② 假设 $A<B$，那么对于满足 $A<C<B$ 的任意常数 C，在开区间 (a,b) 上至少有一点 ξ 使得 $f(\xi)=C$。

可以用介值定理推导出零点定理。

达布定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(a)=A$ 与 $f'(b)=B$ （$A\neq B$）。

① 假设 $A>B$，那么对于满足 $B<C<A$ 的任意常数 C，在开区间 (a,b) 上至少有一点 ξ 使得 $f'(\xi)=C$。

② 假设 $A<B$，那么对于满足 $A<C<B$ 的任意常数 C，在开区间 (a,b) 上至少有一点 ξ 使得 $f'(\xi)=C$。

达布定理其实就是导函数的介值定理，但是没有“$f'(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续”这一使用条件。

罗尔定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)$，那么在开区间 (a,b) 上至少有一点 ξ 使得 $f'(\xi)=0$。

下面正式开始讲“证明零点问题”的题型的解题方法。

先来看方法 1。

方法 1 的适用题型：让证明的那个等式中不含有导数。

方法 1 如下。

要么就一上来直接使用零点定理来做。

要么就先使用反证法再使用零点定理的逆否命题来做。

要么就先设辅助函数（设辅助函数的方法是把要证明的那个等式右侧的所有东西都移到等式左侧，然后把“存在某常数使得……”中的“某常数”换为 x 即可），然后再使用零点定理来做。

要么就先设辅助函数（设辅助函数的方法是把要证明的那个等式右侧的所有东西都移到等式左侧，然后把“存在某常数使得……”中的“某常数”换为 x 即可），然后再使用反证法，最后使用零点定理的逆否命题来做。

例. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$。证明：对 $F(x)=x^2f(x)$，在 $(0,1)$ 上存在 c，使得 $F^{(3)}(c)=0$。

例. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$。证明：存在 $c\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f'(c)=0$。

以上两道题都是“证明零点问题”的题型。这两道题能用刚刚讲完的方法 1 来做吗？很明显不能，因为让证明的那个等式中含有导数（第一道题是三阶导数，第二道题是一阶导数）。

例. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上是非负连续函数，且 $f(0)=f(1)=0$。证明：对于任意实数 $r(0<r<1)$，必存在 $x_0\in[0,1]$，使得 $x_0+r\in[0,1]$，且 $f(x_0)=f(x_0+r)$。

例. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$。证明：存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $f(\xi)=f(\xi+\dfrac{1}{2})$。

例. 设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $f[f(x)]=x$。证明：在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内至少存在一点 x_0 使得 $f(x_0)=x_0$。

例. 已知函数 $y=f(x)$ 在区间 $[4,8]$ 上连续，$f(4)=2$，$f(8)=-1$。证明：在区间 $(4,8)$ 上至少存在一点 ξ 使得 $f(\xi)=0$。

以上四道题都是“证明零点问题”的题型，这四道题能用刚刚讲完的方法 1 来做吗？很明显能，因为让证明的那个等式中不含有导数。

下面来看例题。

例. 已知函数 $y=f(x)$ 在区间 $[4,8]$ 上连续，$f(4)=2$，$f(8)=-1$。证明：在区间 $(4,8)$ 上至少存在一点 ξ 使得 $f(\xi)=0$。

解： 先来判断一下本题是不是“证明零点问题”的题型。

首先，本题是证明题；其次，本题让证明的是一个等式；最后，题目的问题是“存在某常数使得……”的形式，并且让证明的那个等式中的函数法则后面的括号里出现了该常数。综上所述，本题是“证明零点问题”的题型。

再来看看本题应不应该用刚刚讲完的方法 1 来做。很明显能，因为让证明的那个等式中不含有导数。

现在正式用方法 1 做本题。

方法 1 其实又分为四个小方法。那么到底使用哪个小方法来做呢？这只能因题而异。

对于本题而言，很明显可以“一上来直接使用零点定理来做”。

由于函数 $y=f(x)$ 在区间 $[4,8]$ 上连续，且 $f(4)>0$，$f(8)<0$，所以根据零点定理可知，在区间 $(4,8)$ 上至少存在一点 ξ 使得 $f(\xi)=0$。

例. 设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $f[f(x)]=x$。证明：在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内至少存在一点 x_0 使得 $f(x_0)=x_0$。

解： 根据前面的内容可知，本题是“证明零点问题”的题型，且应该用刚刚讲完的方法 1 来做。

现在正式用方法 1 做本题。

对于本题而言，采用“先设辅助函数，然后再使用反证法，最后使用零点定理的逆否命题来做”。

由于本题让证明的是“在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内至少存在一点 x_0 使得 $f(x_0)=x_0$”，按照方法 1 中总结的设辅助函数的方法，将 $f(x_0)=x_0$ 变为 $f(x_0)-x_0=0$，然后设辅助函数 $F(x)=f(x)-x$。现在只要证明在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内至少存在一点 x_0 使得 $F(x_0)=0$ 就可以了，这是因为 $F(x_0)=0$ 就意味着 $f(x_0)-x_0=0$，即 $f(x_0)=x_0$。

然后用反证法。所谓反证法，指的是假设所证结论的否定形式成立，然后推矛盾。那么，对于本题而言，由于要证的结论是在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内至少存在一点 x_0 使得 $F(x_0)=0$，所以现在假设在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内没有点 x_0 可以使 $F(x_0)=0$。

最后用零点定理的逆否命题。由于在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内没有点 x_0 可以使 $F(x_0)=0$，且函数 $F(x)=f(x)-x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续[因为 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，x 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，所以 $F(x)=f(x)-x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续]，所以根据零点定理的逆否命题，得 $F(x)=f(x)-x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内恒正或恒负。

如果 $F(x)=f(x)-x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内恒正，即 $F(x)=f(x)-x>0$，那么就有 $f(x)>x$，从而有 $f[f(x)]>f(x)$，这两个不等式结合有 $f[f(x)]>x$，这与题中所给的已知条件 $f[f(x)]=x$ 矛盾。

如果 $F(x)=f(x)-x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内恒负，即 $F(x)=f(x)-x<0$，那么就有 $f(x)<x$，从而有 $f[f(x)]<x$，这两个不等式结合有 $f[f(x)]<x$，这与题中所给的已知条件 $f[f(x)]=x$ 矛盾。

综上所述，无论 $F(x)=f(x)-x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内恒正还是恒负，都与已知条件矛盾。所以这说明假设“在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内没有点 x_0 可以使 $F(x_0)=0$”是错误的，所以原结论正确，即在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内至少存在一点 x_0 使得 $F(x_0)=0$。

例. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$。证明：存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{2})$。

解： 根据前面的内容可知，本题是“证明零点问题”的题型，且应该用刚刚讲完的方法 1 来做。

现在正式用方法 1 做本题。

对于本题而言，采用“先设辅助函数，然后再使用零点定理来做”。

由于本题让证明的是“存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{2})$”，按照方法 1 中总结的设辅助函数的方法，将 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{2})$ 变为 $f(\xi)-f(\xi+\frac{1}{2})=0$，然后设辅助函数 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{2})$。现在只要证明存在 $\xi\in[0,1]$ 使得 $F(\xi)=0$ 就可以了，这是因为 $F(\xi)=0$ 就意味着 $f(\xi)-f(\xi+\frac{1}{2})=0$，即 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{2})$）。

然后使用零点定理。由于题中说函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，所以函数 $f(x+\frac{1}{2})$ 在区间 $[0,\frac{1}{2}]$ 上连续，则函数 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{2})$ 在区间 $[0,\frac{1}{2}]$ 上连续。现在来计算一下 $F(0)$ 和 $F(\frac{1}{2})$。

$$F(0)=f(0)-f(\frac{1}{2})$$

$$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-f(0)$$

由此可知，$F(0)\times F(\frac{1}{2})\leqslant 0$。

综上所述，由于函数 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{2})$ 在区间 $[0,\frac{1}{2}]$ 上连续，且 $F(0)\times F(\frac{1}{2})\leqslant 0$，所以由零点定理可知，在区间 $[0,\frac{1}{2}]$ 上至少存在一点 ξ 使得 $F(\xi)=0$。

既然在区间 $[0,\frac{1}{2}]$ 上都至少存在一点 ξ 使得 $F(\xi)=0$，那么存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $F(\xi)=0$。

例. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上是非负连续函数，且 $f(0)=f(1)=0$。证明：对于任意实数 $r(0<r<1)$，必存在 $x_0\in[0,1]$，使得 $x_0+r\in[0,1]$，且 $f(x_0)=f(x_0+r)$。

解： 根据前面的内容可知，本题是“证明零点问题”的题型，且应该用刚刚才讲完的方法 1 来做。

现在正式用方法 1 做本题。

对于本题而言，采用“先设辅助函数，然后再使用零点定理来做”。

由于本题让证明的是“存在 $x_0 \in [0,1]$，使得 $f(x_0)=f(x_0+r)$”，按照方法 1 中总结的设辅助函数的方法，将 $f(x_0)=f(x_0+r)$ 变为 $f(x_0)-f(x_0+r)=0$，然后设辅助函数 $F(x)=f(x)-f(x+r)$。现在只要证明存在 $x_0 \in [0,1]$，使得 $f(x_0)=0$ 就可以了，这是因为 $f(x_0)=0$ 就意味着 $f(x_0)-f(x_0+r)=0$，即 $f(x_0)=f(x_0+r)$。

然后使用零点定理。由于题中说函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，所以函数 $f(x+r)$ 在区间 $[0,1-r]$ 上连续，则函数 $F(x)=f(x)-f(x+r)$ 在区间 $[0,1-r]$ 上连续。

现在来计算一下 $F(0)$ 和 $F(1-r)$。

$F(0)=f(0)-f(r)=-f(r)$，由于题中说 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上是非负的，所以 $f(r)\geqslant 0$，则 $-f(r)\leqslant 0$，即 $F(0)\leqslant 0$。

$F(1-r)=f(1-r)-f(1)=f(1-r)$，由于题中说 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上是非负的，所以 $f(1-r)\geqslant 0$，即 $F(1-r)\geqslant 0$。

由此可知，$F(0)\times F(1-r)\leqslant 0$。

综上所述，由于函数 $F(x)=f(x)-f(x+r)$ 在区间 $[0,1-r]$ 上连续，且 $F(0)\times F(1-r)\leqslant 0$，所以由零点定理可知，在区间 $[0,1-r]$ 上至少存在一点 x_0 使得 $F(x_0)=0$。

既然在区间 $[0,1-r]$ 上都至少存在一点 x_0 使得 $F(x_0)=0$，那么存在 $x_0 \in [0,1]$，使得 $F(x_0)=0$。

再来看方法 2。

方法 2 的适用题型：大多数让证明的那个等式中含有导数时都用方法 2 来做。

方法 2 如下。

要么就一上来直接使用罗尔定理来做。

要么就先设辅助函数，然后再使用罗尔定理。设辅助函数的方法是：如果把要证明的那个等式右侧的所有东西都移到等式左侧后，再把“存在某常数使得……”中的“某常数”换为 x，要证明的等式的形式是 $f'(x)+g(x)f(x)-$，$q(x)=0$ 那么就设辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}f(x)-\int \mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x$；如果要证明的那个等式右侧的所有东西都移到等式左侧后，再把“存在某常数使得……”中的“某常数”换为 x，要证明的等式的形式是 $f''(x)+g(x)f'(x)-q(x)=0$，那么就设辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}f(x)-\int \mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x$；如果把要证明的那个等式右侧的所有东西都移到等式左侧后，得到的并不是前两种形式，那么就看谁求完导是它，就把辅助函数设成谁。

下面来看例题。

例. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$。证明：对 $F(x)=x^2f(x)$，在 $(0,1)$ 上存在 c，使得 $F^{(3)}(c)=0$。

解：根据前面的内容可知，本题属于“证明零点问题”的题型，又由于本题让证明的那个等式中含有导数，所以使用方法 2 来做。

现在正式用方法 2 做本题。

方法 2 其实又分为两个小方法。那么到底使用哪个小方法来做呢？这只能因题而异。

对于本题而言，采用方法 2 的第一个小方法（一上来直接使用罗尔定理）来做。

由于函数 $F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $F(0)=0\times f(0)=0\times 0=0$，$F(1)=1\times f(1)=1\times 0=0$，也就是说，$F(0)=F(1)$，所以根据罗尔定理可得，在开区间 $(0,1)$ 上存在一点 ξ_1，使得 $F'(\xi_1)=0$。

由于 $F(x)=x^2f(x)$，所以 $F'(x)=x^2f'(x)+2xf(x)$，$F'(0)=0f'(0)+2\times 0\times f(0)=0$。由于函数 $F'(x)$ 在区间 $[0,\xi_1]$ 上连续，在 $(0,\xi_1)$ 上可导，且 $F'(0)=F'(\xi_1)$，所以根据罗尔定理可得，在开区间 $(0,\xi_1)$ 上存在一点 ξ_2，使得 $F''(\xi_2)=0$。

由于 $F'(x)=x^2f'(x)+2xf(x)$，所以 $F''(x)=x^2f''(x)+4xf'(x)+2f(x)$，$F''(0)=0\times f''(0)+4\times 0\times f'(0)+2\times f(0)=0$。由于函数 $F''(x)$ 在区间 $[0,\xi_2]$ 上连续，在 $(0,\xi_2)$ 上可导，且 $F''(0)=F''(\xi_2)$，所以根据罗尔定理可得，在 $(0,\xi_2)$ 上存在一点 c，使得 $F^{(3)}(c)=0$。

例. 设 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上可导，$0<x_1<x_2$。证明：存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $\dfrac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$。

解：根据前面的内容可知，本题属于“证明零点问题”的题型，又由于本题让证明的那个等式中含有导数，所以使用方法 2 来做。

现在正式用方法 2 做本题。

对于本题而言，采用方法 2 的第二个小方法（先设辅助函数，再使用罗尔定理）来做。

把要证明的那个等式右侧的所有东西都移到等式左侧，得$\xi f'(\xi)-f(\xi)+\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=0$

然后再将$\xi f'(\xi)-f(\xi)+\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=0$中所有的$\xi$都换为$x$，得$xf'(x)-f(x)+\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=0$

将这个式子变形一下，变为$f'(x)-\frac{1}{x}f(x)+\frac{\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}}{x}=0$

此时发现这形式是$f'(x)+g(x)f(x)-q(x)=0$。其中，$g(x)=-\frac{1}{x}$，$q(x)=-\frac{\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}}{x}$（要注意，$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}$是常数）。那么，应该将辅助函数设为$F(x)=e^{\int g(x)dx}f(x)-\int e^{\int g(x)dx}q(x)dx$，对于本题而言，$g(x)=-\frac{1}{x}$，$q(x)=-\frac{\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}}{x}$，所以

$$F(x)=F(x)=e^{\int g(x)dx}f(x)-\int e^{\int -\frac{1}{x}dx}\times(\frac{\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_1)\end{vmatrix}}{x})dx$$

计算可得$F(x)=\frac{1}{x}f(x)-\frac{\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}}{x}$。这里要用到不定积分的算法，这会在后面讲解。

现在辅助函数已经设完了，接下来只要在$[x_1,x_2]$上用罗尔定理就可以了。通过计算可知

$$F(x_1)=\frac{1}{x_1}[f(x_1)-\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}]$$

$$F(x_2)=\frac{1}{x_2}[f(x_2)-\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}]$$

$$F(x_1)-F(x_2)=\frac{1}{x_1x_2}[f(x_1)x_2-f(x_2)x_1-\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}\times(x_2-x_1)]=0$$

也就是说，$F(x_1)=F(x_2)$。

由于函数$F(x)$在闭区间$[x_1,x_2]$上连续，在开区间(x_1,x_2)上可导，且$F(x_1)=F(x_2)$，所以根据罗尔定理可得，存在$\xi\in(x_1,x_2)$，使得$F'(\xi)=0$。

本题到此就证完了。有的同学不明白为何本题做到这儿就做完了，那就再详细说明一下。

由于$F(x)=\frac{1}{x}f(x)-\frac{\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}}{x}$，所以$F'(x)=\frac{1}{x}f'(x)-\frac{1}{x^2}f(x)+\frac{\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}}{x^2}=\frac{1}{x^2}[xf'(x)-$

$f(x)+\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}$

$F'(\xi)=0$展开写就是

$$\frac{1}{\xi^2}[\xi f'(\xi)-f(\xi)+\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}]=0$$

由于$\frac{1}{\xi^2}>0$，所以立刻有$\xi f'(\xi)-f(\xi)+\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=0$。

例. 设函数$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且$g''(x)\neq 0$，又$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$。证明：

（1）在(a,b)上$g(x)\neq 0$。

（2）在(a,b)上存在ξ，使得$\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$。

解： 先来做第（1）题。

这第（1）题让证明的是在区间(a,b)上，$g(x)$恒不等于 0。以前从没有给大家讲过如何证明“恒不等”问题，那么这该如何去做呢？

3.10 节中讲的是“证明恒等式”的四种方法，那么以后碰上本题这种让证明“恒不等”的题，就使用 3.10 节中讲的“证明恒等式”的四种方法中的方法 4（也就是反证法）来做。

现在正式开始做。

本题让证明的结论是在区间(a,b)上$g(x)$恒不等于 0，也就是让证明区间(a,b)上的任意一个点c都不能使得$g(c)=0$。现在用反证法，假设该结论的否定形式成立，也就是假设存在$c\in(a,b)$使得$g(c)=0$，然后推矛盾。

至于如何推矛盾这就因题而异了。

对于本题而言，由于函数$g(x)$在区间$[a,c]$上连续（题中既然都说$g(x)$在区间$[a,b]$上二阶可导，那$g(x)$必然在区间$[a,b]$上一阶可导，而可导必然连续，所以$g(x)$在区间$[a,b]$上连续。既然函数$g(x)$在区间$[a,b]$上都连续，那么必然在区间$[a,c]$上连续），在区间(a,c)上可导（既然函数$g(x)$在区间$[a,b]$上都可导，那么必然在区间$[a,c]$上可导），且$g(a)=g(c)=0$，所以根据罗尔定理可知，在区间(a,c)上存在一点x_1，使得$g'(x_1)=0$。

由于函数$g(x)$在区间$[c,b]$上连续（既然函数$g(x)$在区间$[a,b]$上都连续，那么必然在区间$[c,b]$上连续），在区间(c,b)上可导（既然函数$g(x)$在区间$[a,b]$上都可导，那么必然在区间$[c,b]$上可导），且$g(c)=g(b)=0$，所以根据罗尔定理可知，在区间(c,b)上存在一点x_2，使得$g'(x_2)=0$。

由于函数$g'(x)$在区间$[x_1,x_2]$上连续（题中既然都说$g(x)$在区间$[a,b]$上二阶可导了，那么这也就是说，$g'(x)$在区间$[a,b]$上可导，可导一定连续，所以$g'(x)$在区间$[a,b]$上连续。既然$g'(x)$在区间$[a,b]$上都连续，那么必然在区间$[x_1,x_2]$上连续），在区间(x_1,x_2)上可导（既然$g'(x)$在区间$[a,b]$上都可导，那么$g'(x)$必然在区间$[x_1,x_2]$上可导），且$g'(x_1)=g'(x_2)=0$，所以根据罗尔定理可知，在区间(x_1,x_2)上存在一点x_3使得$g''(x_3)=0$。

这与题中所说的$g''(x)\neq 0$矛盾，所以这说明之前的假设“存在$c\in(a,b)$使得$g(c)=0$”是错误的。那么这也就是说，原结论正确，即在(a,b)内$g(x)\neq 0$。

再来看第（2）题。

根据前面的内容可知，第（2）题属于“证明零点问题”的题型，又由于本题让证明的那个等式中含有导数，所以使用方法 2 来做。

现在正式用方法 2 做本题。

对于本题而言，采用方法 2 的第二个小方法（先设辅助函数，再使用罗尔定理）来做。

先把要证明的那个等式进行一下恒等变形，使得它不含有分数，也就是将$\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$变为$g(\xi)f''(\xi)=g''(\xi)f(\xi)$。

把右侧的所有东西都移到等式左侧，得$g(\xi)f''(\xi)-g''(\xi)f(\xi)=0$，然后再将其中所有的$\xi$都换为$x$，得$g(x)f''(x)-g''(x)f(x)=0$。此时发现这形式既非$f'(x)+g(x)f(x)-q(x)=0$也非$f''(x)+g(x)f'(x)-q(x)=0$，所以用眼睛看出谁求完导是$g(x)f''(x)-g''(x)f(x)$，就把辅助函数设成谁。

很明显，$g(x)f'(x)-g'(x)f(x)$的导数是$g(x)f''(x)-g''(x)f(x)$，所以应该将辅助函数设为$F(x)=g(x)f'(x)-g'(x)f(x)$。

现在辅助函数已经设完了，接下来只要在$[a,b]$上用罗尔定理就可以了。通过计算可知

$F(a)=g(a)f'(a)-g'(a)f(a)=0$

$F(b)=g(b)f'(b)-g'(b)f(b)=0$

也就是说，$F(a)=F(b)$。

由于函数$F(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)上可导，且$F(a)=F(b)$，所以根据罗尔定理可得，在开区间(a,b)上存在一点ξ，使得$F'(\xi)=0$。

本题到此就证完了。有的同学不明白为何本题做到这儿就做完了，那就再详细说明一下。

由于$F(x)=g(x)f'(x)-g'(x)f(x)$，所以$F'(x)=g(x)f''(x)-g''(x)f(x)$，$F'(\xi)=0$展开写就是$g(\xi)f''(\xi)-g''(\xi)f(\xi)=0$。

例. 设$f(x)$在$[0,1]$上可导，且$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}e^{1-x^2}f(x)dx$。证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=2\xi f(\xi)$。

解： 根据前面的内容可知，本题属于“证明零点问题”的题型，又由于本题让证明的那个等式中含有导数，所以使用方法 2 来做。

现在正式用方法 2 做本题。

对于本题而言，采用方法 2 的第二个小方法（先设辅助函数，再使用罗尔定理）来做。

把要证明的那个等式右侧的所有东西都移到等式左侧，得 $f'(\xi)-2\xi f(\xi)=0$，然后再将其中所有的 ξ 都换成为 x，得 $f'(x)-2xf(x)=0$。此时发现这形式是 $f'(x)+g(x)f(x)-q(x)=0$。其中，$g(x)=-2x$，$q(x)=0$。那么，应该将辅助函数设为 $F(x)=e^{\int g(x)dx}f(x)-\int e^{\int g(x)dx}q(x)dx$，对于本题而言，$g(x)=-2x$，$q(x)=0$，所以

$$F(x)=e^{\int -2dx}f(x)-\int e^{\int -2dx}0dx$$

计算可得 $F(x)=e^{-x^2}f(x)$。这里要用到不定积分的算法，这会在后面讲解。

现在辅助函数已经设完了，接下来自然想到在 $[0,1]$ 上使用罗尔定理。但通过计算可知

$F(0)=f(0)$

$F(1)=e^{-1}f(1)$

这时根本无法判断 $F(0)$ 和 $F(1)$ 是否相等，那怎么办？大家记住，如果遇到应该用方法 2 来做而且题中给的已知条件中含有积分的题，那么就应该用积分中值定理来找相等的点。

现在就来介绍一下积分中值定理。

积分中值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 (a,b) 上至少存在一点 ξ 使 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$。

对于本题而言，题中说 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}e^{1-x^2}f(x)dx$，所以根据积分中值定理可得，在区间 $(0,\frac{1}{2})$ 上存在一点 η，使得 $f(1)=2\times(\frac{1}{2}-0)\times e^{1-\eta^2}f(\eta)=e^{1-\eta^2}\times f(\eta)$。

刚才已经算完了 $F(1)=e^{-1}f(1)$，现在由于知道了 $f(1)=e^{1-\eta^2}\times f(\eta)$，所以 $F(1)=e^{-1}\times e^{1-\eta^2}\times f(\eta)=e^{-\eta^2}f(\eta)$。

现在来算一下 $F(\eta)$。由于 $F(x)=e^{-x^2}f(x)$，所以 $F(\eta)=e^{-\eta^2}f(\eta)$。

由于函数 $F(x)$ 在闭区间 $[\eta,1]$ 上连续，在开区间 $(\eta,1)$ 上可导，且 $F(\eta)=F(1)$，所以根据罗尔定理可得，存在 $\xi\in(\eta,1)$，使得 $F'(\xi)=0$。既然在区间 $(\eta,1)$ 上都存在 ξ 使得 $F'(\xi)=0$，那么在区间 $(0,1)$ 上就更存在 ξ 使得 $F'(\xi)=0$ 了。

本题到此就证完了。有的同学不明白为何本题做到这儿就做完了，那就再详细说明一下。

由于 $F(\eta)=e^{-x^2}f(x)$，所以 $F'(x)=e^{-x^2}\times(-2x)\times f(x)+e^{-x^2}\times f'(x)=e^{-x^2}[f'(x)-2xf(x)]$，$F'(\xi)=0$ 展开写就是 $e^{-\xi^2}[f'(\xi)-2\xi f(\xi)]=0$。

由于 $e^{-\xi^2}>0$，所以立刻有 $f'(\xi)-2\xi f(\xi)=0$。

方法 2 已经给大家讲完了。现在带大家回顾一下，方法 2 的适用题型：大多数让证明的那个等式中含有导数时都用方法 2 来做。

大家看见了吧，这里说的是“大多数”而不是“全部”，这说明什么？这就说明还有少部分让证明的那个等式中含有导数的题不能用方法 2 来做，而是得用别的方法来做。

那么，到底哪些让证明的那个等式中含有导数的题不能用方法 2 来做而是得用别的方法来做呢？以下三类让证明的那个等式中含有导数的题可能需要用别的方法来做。

第一类题：已知 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有最大、最小值，让证明在开区间 (a,b) 上存在 ξ 使得 $f'(\xi)=0$。

第二类题：选择题。

第三类题：题中说 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有 n 阶连续导数，并且说 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上有 $n+1$ 阶导数。

再来看方法 3。

方法 3 的适用题型：已知 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有最大、最小值，让证明在开区间 (a,b) 上存在 ξ，使得 $f'(\xi)=0$。

方法 3 如下。

第一步：最值要么是区间端点值，要么是极值，这第一步就是要证明最值取自极值而不是区间端点值，这样一来的话，由于已知有最值，那么就必有极值。

第二步：极值点又可以分为两类，另一类是驻点，另一类是一阶导数没有定义的点，这第二步就是要证明函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的所有点都可导，这样一来，极值点肯定是来自驻点的，既然必有极值点，所以就必然存在驻点 $x=\xi$，那么既然 $x=\xi$ 是驻点，所以就有 $f'(\xi)=0$。

下面来看例题。

例. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f'_+(a)\times f'_-(b)<0$。证明：$f'(x)$ 在 (a,b) 上有零点。

解：这道题要证明的内容可以翻译成“证明：在 (a,b) 上存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$”。因此，本题属于“证明零点问题”的题型。

那么到底该用哪种方法来做本题呢？

本题中说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，可导一定连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。若函数在某闭区间上连续，则该函数一定在该闭区间上存在最大、最小值。所以，本题所给的函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最大、最小值。由于本题所给的函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最大、最小值，并且本题是让证明在 (a,b) 上存在一点 ξ 使得 $f'(\xi)=0$，所以本题应该用方法 3 来做。

第一步：证明最值取自极值而不是区间端点值。

对于本题而言，题中说 $f'_+(a)\times f'_-(b)<0$，这句话的意思是，函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的右导数与函数 $f(x)$ 在点 $x=b$ 处的左导数异号，那么也就是说，一个大于 0 一个小于 0。不妨设 $f'_+(a)>0$，$f'_-(b)<0$。

由于 $f'_+(a)>0$，所以根据函数在某一点处左/右可导的等价定义可知

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$$

无论 x 趋于多少，常数的极限永远等于它本身，所以有

$$\lim_{x\to a^+}0=0$$

所以有

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>\lim_{x\to a^+}0$$

根据保号性可知，在 a 的右邻域 $(a,a+\varepsilon)$ 内，$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$。由于是在 a 的右邻域 $(a,a+\varepsilon)$ 内，所以 $x-a>0$，加上 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，所以在 a 的右邻域 $(a,a+\varepsilon)$ 内，$f(x)-f(a)>0$，即 $f(x)>f(a)$。既然在区间 $(a,a+\varepsilon)$ 内 $f(x)>f(a)$，那么也就是说，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值肯定不是在区间端点 $x=a$ 处取到。

由于 $f'_-(b)<0$，所以根据函数在某一点处左/右可导的等价定义可知

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$$

无论 x 趋于多少，常数的极限永远等于它本身，所以有

$$\lim_{x\to b^-}0=0$$

所以有

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<\lim_{x\to b^-}0$$

根据保号性可知，在 b 的左邻域 $(b-\varepsilon,b)$ 内，$\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$。由于是在 b 的左邻域 $(b-\varepsilon,b)$ 内，所以 $x-b<0$，加上 $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$，所以在 b 的左邻域 $(b-\varepsilon,b)$ 内，$f(x)-f(b)>0$，即 $f(x)>f(b)$。既然在区间 $(b-\varepsilon,b)$ 内 $f(x)>f(b)$，那么也就是说，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值肯定不是在区间端点 $x=b$ 处取到。

综上所述，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值肯定不是在区间端点 $x=a$、$x=b$ 处取到，而最值肯定来源于区间端点值或极值，所以现在可以判断出，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值是极值。因此，$f(x)$ 在区间 (a,b) 上必有极值点。

第二步：证明函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的所有点都可导。

对于本题而言，题中已经明确说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，这也就是说，$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的所有点都可导。所以，第一步证明出的极值点肯定是驻点。由于必有极值点，所以必存在驻点。驻点就是一阶导数为 0 的点。设驻点为 $x=\xi$，所以有 $f'(\xi)=0$。

例. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f'_+(a)>0$，$f'_-(b)>0$，$f(a)\geqslant f(b)$。证明：$f'(x)$ 在 (a,b) 上至少有两个零点。

解： 这道题要证明的内容可以翻译成“证明：在 (a,b) 上至少存在两点 ξ_1 和 ξ_2，使得 $f'(\xi_1)=0$，$f'(\xi_2)=0$”。因此，本题属于“证明零点问题”的题型。

那么到底该用哪种方法来做本题呢？

本题中说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，可导一定连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。若函数在某闭区间上连续，则该函数一定在该闭区间上存在最大、最小值。所以，本题所给的函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最大、最小值。由于本题所给的函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最大、最小值，并且本题是让证明在 (a,b) 上至少存在两点 ξ_1 和 ξ_2，使得 $f'(\xi_1)=0$，$f'(\xi_2)=0$，所以本题应该用方法 3 来做。

第一步：证明最值取自极值而不是区间端点值。

对于本题而言，题中说 $f'_+(a)>0$，这句话的意思是，函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的右导数大于 0。

由于 $f'_+(a)>0$，所以根据函数在某一点处左/右可导的等价定义可知

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$$

无论 x 趋于多少，常数的极限永远等于它本身，所以有

$$\lim_{x\to a^+}0=0$$

所以有

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>\lim_{x\to a^+}0$$

根据保号性可知，在 a 的右邻域 $(a,a+\varepsilon)$ 内，$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$。由于是在 a 的右邻域 $(a,a+\varepsilon)$ 内，所以 $x-a>0$，加上 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，所以在 a 的右邻域 $(a,a+\varepsilon)$ 内，$f(x)-f(a)>0$，即 $f(x)>f(a)$。既然在区间 $(a,a+\varepsilon)$ 内 $f(x)>f(a)$，那么也就是说，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值肯定不是在区间端点 $x=a$ 处取到。

题中说 $f(a)\geqslant f(b)$，那既然 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值都不是在区间端点 $x=a$ 处取到，就更不可能在区间端点 $x=b$ 处取到了。

综上所述，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值肯定不是在区间端点 $x=a$、$x=b$ 处取到，而最值肯定来源于区间端点值或极值，所以现在可以判断出，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值是极值。因此，$f(x)$ 在区间 (a,b) 上必有一个极值点作为最大值点。

由于 $f'_-(b)>0$，所以根据函数在某一点处左/右可导的等价定义可知

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$$

无论 x 趋于多少，常数的极限永远等于它本身，所以有

$$\lim_{x\to b^-}0=0$$

所以有

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>\lim_{x\to b^-}0$$

根据保号性可知，在 b 的左邻域 $(b-\varepsilon,b)$ 内，$\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$。由于是在 b 的左邻域 $(b-\varepsilon,b)$ 内，所以 $x-b<0$，加上 $\frac{f(a)\geqslant f(b)}{x-b}>0$，所以在 b 的左邻域 $(b-\varepsilon,b)$ 内，$f(x)-f(b)<0$，即 $f(x)<f(b)$。既然在区间 $(b-\varepsilon,b)$ 内 $f(x)<f(b)$，那么也就是说，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值肯定不是在区间端点 $x=b$ 处取到。

题中说 $f(a)\geqslant f(b)$，那既然 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值都不是在区间端点 $x=b$ 处取到，就更不可能在区间端点 $x=a$ 处取到了。

综上所述，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值肯定不是在区间端点 $x=a$、$x=b$ 处取到，而最值肯定来源于区间端点值或极值，所以现在可以判断出，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值是极值。因此，$f(x)$ 在区间 (a,b) 上必有一个极值点作为最小值点。

第二步：证明函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的所有点都可导。

对于本题而言，题中已经明确说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，这也就是说，$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的所有点都可导。所以，第一步证明出的极值点肯定是驻点。由于必有两个极值点，所以必存在两个驻点。驻点就是一阶导数为 0 的点。设这两个驻点为 $x=\xi_1$，$x=\xi_2$，所以有 $f'(\xi_1)=0$，$f'(\xi_2)=0$。

再来看方法 4。

方法 4 的适用题型：选择题。

方法 4 如下。

先说低阶，那就是：至少，越来越少。

先说高阶，那就是：至多，越来越多。

方法 4 已经给大家讲完了，不过大家可能没有明白方法 4 的意思，下面来举两个例子。

例如，已知函数 $f''(x)$ 在区间 (a,b) 内有两个零点，则函数 $f'''(x)$ 在区间 (a,b) 内至少有一个零点。

再例如，已知函数 $f''(x)$ 在区间 (a,b) 内有两个零点，则函数 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 内至多有三个零点。

下面来看例题。

例. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内存在一阶导数，下列论断正确的是（　　）。

（A）若 $f(x)$ 只有一个零点，则 $f'(x)$ 必定无零点。

（B）若 $f'(x)$ 至少有一个零点，则 $f(x)$ 必至少有两个零点。

（C）若 $f(x)$ 没有零点，则 $f'(x)$ 至多有一个零点。

（D）若 $f'(x)$ 没有零点，则 $f(x)$ 至多有一个零点。

解：本题必为“证明零点问题”的题型，因为题目的问题已经明确地在问零点了。而本题又是一道选择题，所以应该用方法 4 来做。

由方法 4 直接可得本题应该选择（D）选项。

最后来看方法 5。

方法 5 的适用题型：题中说 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内有 n 阶连续导数，并且说 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数。

方法 5 如下：使用带拉格朗日余项的泰勒公式（取暗示点为 x_0，取区间的两个端点为 x），可能会配合零点定理、零点定理的逆否命题、介值定理、达布定理一起使用。

下面讲带拉格朗日余项的泰勒公式。

带拉格朗日余项的泰勒公式：

设函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间 (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数，在 $[a,b]$ 内有 n 阶连续导数，则对于任意的 $x\in[a,b]$，有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!}+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

。其中，ξ 在 x 与 x_0 之间。

下面来看例题。

例. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内有二阶连续导数，在 (a,b) 内三阶可导。证明：存在一个 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)=f(a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{24}(b-a)^3f^{(3)}(\xi)\text{。}$$

解：根据前面的内容可知，本题是“证明零点问题”的题型。由于函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内有二阶连续导数，在 (a,b) 内三阶可导，所以本题应该用刚刚讲完的方法 5 来做。

现在正式用方法 5 做本题。

使用带拉格朗日余项的泰勒公式（取暗示点为 x_0，取区间的两个端点为 x），可能会配合零点定理、零点定理的逆否命题、介值定理、达布定理一起使用。

对于本题而言，使用带拉格朗日余项的泰勒公式有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!}+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\frac{f'''(\xi)(x-x_0)^3}{3!}$$

接下来要做的就是，把具体的 x_0 和 x 代入带拉格朗日余项的泰勒公式中。那么到底 x_0 应该取多少呢？x 应该取多少呢？方法 5 中说得很清楚，取暗示点为 x_0，取区间的两个端点为 x。大家都能理解“取区间的两个端点为 x”，所以大家肯定知道 x 要取两个值，分别是 $x=a$ 和 $x=b$（因为本题所给的区间的两个端点是 a 和 b）。但是大家可能不能理解“取暗示点为 x_0”，因为大家可能不知道什么叫暗示点。

所谓暗示点，指的是题目的已知条件或题目让证明的结论中，导函数法则后面的括号里出现的常数。但是注意，不能是题中说的“存在某常数使得……”中的那个常数。

对于本题而言，来看一下题目的已知条件和题目让证明的结论中，都有哪些常数出现在了导函数法则后面的括号里。

题目的已知条件和题目让证明的结论中出现的导函数法则一共有两个，分别是 f' 和 $f^{(3)}$。导函数法则 f' 后面括号里的常数是 $\frac{a+b}{2}$，导函数法则 $f^{(3)}$ 后面括号里的常数是 ξ。也就是说，本题的暗示点有两个，分别是 $\frac{a+b}{2}$ 和 ξ。

可 x_0 永远只能取一个，到底取谁？前面提到，x_0 不能是题中说的“存在某常数使得……”中的那个常数。所以，对于本题而言，x_0 不能取 ξ，x_0 应该取 $\frac{a+b}{2}$。

综上所述，将 $x_0=\frac{a+b}{2}$、$x=a$、$x=b$ 代入带拉格朗日余项的泰勒公式中，由于 x 取两个值，所以肯定得到的是两个式子，即

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(\xi_1)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3$$

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(\xi_2)\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3$$

有的同学可能会奇怪为何一个是 ξ_1 一个是 ξ_2，为什么不一样？这其实很好解释，因为 ξ 是在 x 与 x_0 之间的，

所以这两个式子中的 ξ 当然不一样。

方法 5 只管到这里，那么接下来该怎么做呢？就用第一个式子减去第二个式子即可，即

$$f(b)-f(a)=f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{1}{24}\times\frac{1}{2}\times[f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2)](b-a)^3$$

因为 $\frac{1}{2}\times[f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2)]$ 一定是介于 $f^{(3)}(\xi_1)$ 和 $f^{(3)}(\xi_2)$ 之间的，所以由达布定理可知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $f^{(3)}(\xi)=\frac{1}{2}\times[f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2)]$。将 $f^{(3)}(\xi)=\frac{1}{2}\times[f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2)]$ 代入上式，立刻有

$$f(b)-f(a)=f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{1}{24}f^{(3)}(\xi)(b-a)^3。$$

例. 设 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 内有一阶连续导数，在 $(-2,2)$ 内二阶可导，且 $|f(x)|\leqslant1$，$f'(0)>1$。证明：存在 $\xi\in(-2,2)$，使得 $f''(\xi)=0$。

解： 根据前面的内容可知，本题是“证明零点问题”的题型。由于函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 内有一阶连续导数，在 $(-2,2)$ 内二阶可导，所以本题应该用刚刚讲完的方法 5 来做。

现在正式用方法 5 做本题。

对于本题而言，使用带拉格朗日余项的泰勒公式有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!}+\frac{f''(\xi)(x-x_0)^2}{2!}$$

接下来要做的就是，把具体的 x_0 和 x 代入带拉格朗日余项的泰勒公式中。对于本题而言，将 $x_0=0$、$x=2$、$x=-2$ 代入带拉格朗日余项的泰勒公式中，由于 x 取两个值，所以肯定得到的是两个式子，即

$f(2)=f(0)+2f'(0)+2f''(\xi_1)$ （1）式

$f(-2)=f(0)-2f'(0)+2f''(\xi_2)$ （2）式

方法 5 只管到这里，那么接下来该怎么做呢？就用反证法结合零点定理的逆否命题。

先用反证法。假设不存在 $\xi\in(-2,2)$，使得 $f''(\xi)=0$，那么根据零点定理的逆否命题可知，函数 $f''(x)$ 在区间 $(-2,2)$ 内恒正或恒负。

如果是恒正[也就是说，$f''(x)>0$]，那么（1）式是无论如何也不会成立的。为什么呢？因为题中说 $|f(x)|\leqslant1$，这也就意味着（1）式的等式左侧的 $f(2)$ 肯定是 -1 到 $+1$ 之间的一个数。那么再来看等式右侧，$f(0)$ 肯定是 -1 到 $+1$ 之间的一个数；由于题中说 $f'(0)>1$，所以 $2f'(0)>2$；由于 $f''(x)>0$，所以 $2f''(\xi_1)>2$。因此，$f(2)$ 和 $f(0)+2f'(0)+2f''(\xi_1)$ 完全不可能相等，这就推出矛盾了。

如果是恒负[也就是说，$f''(x)<0$]，那么（2）式是无论如何也不会成立的。为什么呢？因为题中说 $|f(x)|\leqslant1$，这也就意味着（2）式的等式左侧的 $f(-2)$ 肯定是 -1 到 $+1$ 之间的一个数。那么再来看等式右侧，$f(0)$ 肯定是 -1 到 $+1$ 之间的一个数；由于题中说 $f'(0)>1$，所以 $2f'(0)>2$；由于 $f''(x)>0$，所以 $2f''(\xi_2)>2$。因此，$f(-2)$ 和 $f(0)-2f'(0)+2f''(\xi_2)$ 完全不可能相等，这就推出矛盾了。

由于推出了矛盾，所以说明假设“不存在 $\xi\in(-2,2)$，使得 $f''(\xi)=0$”不成立，所以原结论成立，即存在 $\xi\in(-2,2)$，使得 $f''(\xi)=0$。

第 4 章

一元函数积分学

4.1 原函数与不定积分

分两个小节来讲本节，第一小节给大家讲原函数，第二小节给大家讲不定积分。

4.1.1 原函数

如果在某区间上 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在该区间的原函数。

例. 在区间 $(0,+\infty)$ 内，$\ln x$ 就是 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数。

例. 在区间 $(-\infty,0)$ 内，$\ln(-x)$ 就是 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数。

例. 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内，x^3 就是 $3x^2$ 的一个原函数。

若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在某区间的一个原函数，则 $F(x)+C$ 为 $f(x)$ 在该区间的所有原函数（C 为任意常数）。

例. 由于在区间 $(0,+\infty)$ 内 $\ln x$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数，所以在区间 $(0,+\infty)$ 内 $\ln x+C$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的所有原函数（C 为任意常数）。

例. 由于在区间 $(-\infty,0)$ 内 $\ln(-x)$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数，所以在区间 $(-\infty,0)$ 内 $\ln(-x)+C$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的所有原函数（C 为任意常数）。

例. 由于在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内 x^3 是 $3x^2$ 的一个原函数，所以在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内 x^3+C 是 $3x^2$ 的所有原函数（C 为任意常数）。

原函数已经讲完了，接下来讲不定积分。

4.1.2 不定积分

若 $F(x)+C$（C 为任意常数）是 $f(x)$ 在某区间的所有原函数，则称 $F(x)+C$ 为 $f(x)$ 在该区间上的不定积分。

例. 由于在区间 $(0,+\infty)$ 内 $\ln x+C$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的所有原函数（C 为任意常数），所以 $\ln x+C$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的不定积分。

例. 由于在区间 $(-\infty,0)$ 内 $\ln(-x)+C$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的所有原函数（C 为任意常数），所以 $\ln(-x)+C$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内的不定积分。

例. 由于在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内 x^3+C 是 $3x^2$ 的所有原函数（C 为任意常数），所以 x^3+C 是 $3x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的不定积分。

4.2 不定积分长什么样

不定积分是什么意思已经知道了，本节来看看不定积分到底长什么样，也就是不定积分的数学符号是什么。

大家记住，以后一旦看见符号“$\int \mathrm{d}x$”，那么就是不定积分。

下面来看几个例子。

例. $\int 3x^2\mathrm{d}x$、$\int \sin x\mathrm{d}x$、$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$、$\int 5x+2\,\mathrm{d}x$、$\int 4x^3+\sin x\,\mathrm{d}x$，这五个都是不定积分。

有的同学可能会问：这怎么都没指定区间啊？例如，$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 是不定积分这我知道，不定积分指的是所有原函数这我也知道，但 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 指的到底是函数 $\frac{1}{x}$ 在哪个区间上的所有原函数？

现在来回答这个问题。$\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 指的是函数 $f(x)$ 在整个定义域上的不定积分。也就是说，$\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 指的是函数 $f(x)$ 在整个定义域上的所有原函数。

举例来说，$\frac{1}{x}$ 的定义域是什么？很明显是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$。所以，$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 指的是函数 $\frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的不定积分。也就是说，$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 指的就是函数 $\frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的所有原函数。

那么大家想想，函数 $\frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的所有原函数是谁？很明显是 $\ln|x|+C$，所以 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$。

4.3 定积分和反常积分长什么样

不定积分长什么样已经知道了，现在来看看定积分和反常积分长什么样。

大家记住，以后一旦看见符号“$\int_{\square}^{\square}\mathrm{d}x$”，那么要么是定积分，要么是反常积分。

大家发现了吧，其实定积分和反常积分与不定积分的区别仅仅在于“$\int$ ”的右上角和右下角写没写东西。没写就是不定积分，写了就是定积分或者反常积分。

例. $\int_1^2 3x^2\,\mathrm{d}x$、$\int_0^4 \sin x\,\mathrm{d}x$、$\int_6^3 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$、$\int_0^{+\infty} 3x^2\mathrm{d}x$、$\int_0^1 \frac{1}{x-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$、$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$、$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$，这七个中的每一个要么是定积分，要么是反常积分。

相信大家现在已经完全可以区分不定积分与定积分和反常积分了。接下来要给大家讲的是，如何区分定积分和反常积分。也就是说，接下来要给大家讲的是，针对某个“$\int_{\square}^{\square} f(x)\,\mathrm{d}x$”来说，如何判断它到底是定积分还是反常积分。

对于某个“$\int_{\square}^{\square} f(x)\mathrm{d}x$”来说，如果是以下两种情况之一，那么它就是反常积分。否则，它就是定积分。

情况 1：两个方框中的其中一个方框中是 ∞，或者两个方框中都是 ∞。

情况 2：两个方框中都是常数，$f(x)$ 在这两个方框所组成的闭区间中存在没有定义的点，并且 $\lim\limits_{x\to\text{此点}} f(x)=\infty$。

来看几个例子。

例. 请判断 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$ 是定积分还是反常积分。

解： 由于两个方框中都是 ∞，属于情况 1，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$ 是反常积分。

例. 请判断 $\int_0^{+\infty} 3x^2\mathrm{d}x$ 是定积分还是反常积分。

解： 由于两个方框中的其中一个方框中是 ∞，属于情况 1，所以 $\int_0^{+\infty} 3x^2\mathrm{d}x$ 是反常积分。

例. 请判断$\int_0^1 \frac{1}{x-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$是定积分还是反常积分。

解: 由于两个方框中都是常数，所以不属于情况 1。现在就先看看在这两个方框所组成的闭区间$[0,1]$内函数$\frac{1}{x-\frac{1}{2}}$存不存在没有定义的点。很明显存在，$x=\frac{1}{2}$就是$\frac{1}{x-\frac{1}{2}}$没有定义的点。那么再计算一下$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{x-\frac{1}{2}}$，计算可知$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{x-\frac{1}{2}}=\infty$。这属于情况 2，所以$\int_0^1 \frac{1}{x-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$是反常积分。

例. 请判断$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$是定积分还是反常积分。

解: 由于两个方框中都是常数，所以不属于情况 1。现在就先看看在这两个方框所组成的闭区间$[0,1]$内函数$\frac{1}{x}$存不存在没有定义的点。很明显存在，$x=0$就是$\frac{1}{x}$没有定义的点。那么再计算一下$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}$，计算可知$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$。这属于情况 2，所以$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$是反常积分。

例. 请判断$\int_3^6 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$是定积分还是反常积分。

解: 由于两个方框中都是常数，所以不属于情况 1。现在就先看看在这两个方框所组成的闭区间$[3,6]$内函数$\frac{1}{x}$存不存在没有定义的点。很明显不存在，所以也不属于情况 2。由于既不属于情况 1，也不属于情况 2，所以$\int_3^6 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$是定积分。

例. 请判断$\int_0^4 \sin x\,\mathrm{d}x$是定积分还是反常积分。

解: 由于两个方框中都是常数，所以不属于情况 1。现在就先看看在这两个方框所组成的闭区间$[0,4]$内函数$\sin x$存不存在没有定义的点。很明显不存在，所以也不属于情况 2。由于既不属于情况 1，也不属于情况 2，所以$\int_0^4 \sin x\,\mathrm{d}x$是定积分。

例. 请判断$\int_1^2 3x^2\mathrm{d}x$是定积分还是反常积分。

解: 由于两个方框中都是常数，所以不属于情况 1。现在就先看看在这两个方框所组成的闭区间$[1,2]$内函数$3x^2$存不存在没有定义的点。很明显不存在，所以也不属于情况 2。由于既不属于情况 1，也不属于情况 2，所以$\int_1^2 3x^2\mathrm{d}x$是定积分。

例. 请判断$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\times\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$是定积分还是反常积分。

解: 由于两个方框中都是常数，所以不属于情况 1。现在就先看看在这两个方框所组成的闭区间$[0,1]$内函数$\frac{1}{x^2}\times\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$存不存在没有定义的点。很明显存在，$x=0$就是$\frac{1}{x^2}\times\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$没有定义的点。那么再计算一下$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}\times\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)$，计算可知$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}\times\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)=0$，不是$\infty$，所以也不属于情况 2。由于既不属于情况 1，也不属于情况 2，所以$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\times\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$是定积分。

有的同学可能会问："为何算极限时算的是$\lim\limits_{x\to0^+}$而不是$\lim\limits_{x\to0}$？因为 0 是闭区间$[0,1]$的左端点，所以算的时候要算$\lim\limits_{x\to0^+}$。如果本题的函数在右端点1没有定义的话，那么算的时候就要算"$\lim\limits_{x\to1^-}$"。如果本题的函数没有定义的点不是闭区间$[0,1]$的端点而是区间内部的点的话，那么就不用分正负。

4.4 不定积分和定积分的计算方法

本节要给大家讲的是不定积分和定积分的计算方法。本节又分为两个小节，第一小节讲的是不定积分的计算方法，第二小节讲的是定积分的计算方法。

4.4.1 不定积分的计算方法

方法 1．公式法。

以下给出 17 个不定积分的计算公式。

（1）$\int e^x dx = e^x + C$

（2）$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \ (a>0, a\neq 1)$

（3）$\int k\, dx = kx + C$（k 为常数）

（4）$\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$

（5）$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

（6）$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

（7）$\int \cos x\, dx = \sin x + C$

（8）$\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C$

（9）$\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + C$

（10）$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

（11）$\int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

（12）$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

（13）$\int -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$

（14）$\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

（15）$\int -\dfrac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arc}\cot x + C$

（16）$\int f(x) \pm g(x)\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

（17）$\int kf(x)\, dx = k\int f(x)\, dx = \int f(x)\, d(kx)$（$k$ 为非零常数）

下面来看例题。

例．请计算 $\int \cos x + e^x dx$ 。

解：由公式（16）可知

$\int \cos x + e^x dx = \int \cos x dx + \int e^x dx$　　　（1）式

由公式（7）可知

$\int \cos x dx = \sin x + C$　　　（2）式

由公式（1）可知

$\int e^x dx = e^x + C$　　　（3）式

将（2）式、（3）式代入（1）式，得

$\int \cos x + e^x dx = \sin x + C + e^x + C$　　　（4）式

既然 C 为任意常数，所以（4）式中的两个 C 可以合并成一个 C，则有

$\int \cos x + e^x dx = \sin x + e^x + C$　　　（5）式

例. 请计算$\int \sin x + 4^x - x^3 \mathrm{d}x$。

解： 由公式（16）可知

$$\int \sin x + 4^x - x^3 \mathrm{d}x = \int \sin x \mathrm{d}x + \int 4^x \mathrm{d}x - \int x^3 \mathrm{d}x \qquad \text{（1）式}$$

由公式（6）可知

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C \qquad \text{（2）式}$$

由公式（2）可知

$$\int 4^x \mathrm{d}x = \frac{4^x}{\ln 4} + C \qquad \text{（3）式}$$

由公式（4）可知

$$\int x^3 \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + C \qquad \text{（4）式}$$

将（2）式、（3）式、（4）式代入（1）式，得

$$\int \sin x + 4^x - x^3 \mathrm{d}x = -\cos x + C + \frac{4^x}{\ln 4} + C - \frac{x^4}{4} - C \qquad \text{（5）式}$$

既然C为任意常数，所以（5）式中的三个C可以合并成一个C，则有

$$\int \sin x + 4^x - x^3 \mathrm{d}x = -\cos x + \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{x^4}{4} + C \qquad \text{（6）式}$$

例. 请计算$\int \tan x + \frac{1}{1+x^2} - 3x^2 \mathrm{d}x$。

解： 由公式（16）可知

$$\int \tan x + \frac{1}{1+x^2} - 3x^2 \mathrm{d}x = \int \tan x \mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x - \int 3x^2 \mathrm{d}x \qquad \text{（1）式}$$

由公式（8）可知

$$\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C \qquad \text{（2）式}$$

由公式（14）可知

$$\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan x + C \qquad \text{（3）式}$$

由公式（17）可知

$$\int 3x^2 \mathrm{d}x = 3\int x^2 \mathrm{d}x \qquad \text{（4）式}$$

由公式（4）可知

$$\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C \qquad \text{（5）式}$$

将（5）式代入（4）式，得

$$\int 3x^2 \mathrm{d}x = x^3 + 3C \qquad \text{（6）式}$$

既然C为任意常数，所以（6）式中的$3C$可以换成C，即

$$\int 3x^2 \mathrm{d}x = x^3 + C \qquad \text{（7）式}$$

将（2）式、（3）式、（7）式代入（1）式，得

$$\int \tan x + \frac{1}{1+x^2} - 3x^2 \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C + \arctan x + C - x^3 - C \qquad \text{（8）式}$$

既然C为任意常数，所以（8）式中的三个C可以合并成一个C，则有

$$\int \tan x + \frac{1}{1+x^2} - 3x^2 \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + \arctan x - x^3 + C \qquad \text{（9）式}$$

例. 请计算$\int \cot x - \frac{1}{1+x^2} + 2e^{2x} \mathrm{d}x$。

解： 由公式（16）可知

$$\int \cot x - \frac{1}{1+x^2} + 2e^{2x} \mathrm{d}x = \int \cot x \mathrm{d}x - \int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x + \int 2e^{2x} \mathrm{d}x \qquad \text{（1）式}$$

由公式（9）可知

$\int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$ （2）式

由公式（14）可知

$\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan x + C$ （3）式

由公式（17）可知

$\int 2\mathrm{e}^{2x} \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2x} \mathrm{d}(2x)$ （4）式

由公式（1）可知

$\int \mathrm{e}^{2x} \mathrm{d}(2x) = \mathrm{e}^{2x} + C$ （5）式

（4）式、（5）式相结合，得

$\int 2\mathrm{e}^{2x} \mathrm{d} = \mathrm{e}^{2x} + C$ （6）式

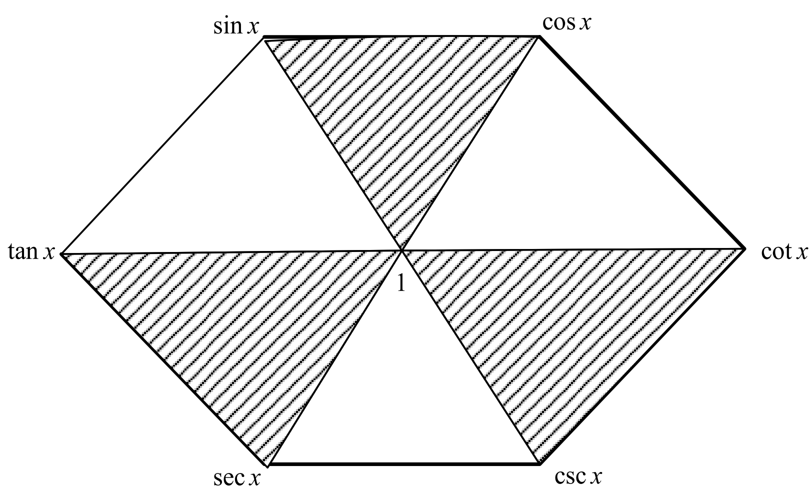
将（2）式、（3）式、（6）式代入（1）式，得

$\int \cos x - \frac{1}{1+x^2} + 2\mathrm{e}^{2x} \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C - \arctan x - C + \mathrm{e}^{2x} + C$ （7）式

既然 C 为任意常数，所以（7）式中的三个 C 可以合并成一个 C，则有

$\int \cos x - \frac{1}{1+x^2} + 2\mathrm{e}^{2x} \mathrm{d}x = \ln|\sin x| - \arctan x + \mathrm{e}^{2x} + C$ （8）式

除了以上这 17 个积分公式外，接下来再给出一个六边形，从这个六边形可以推出三组三角函数公式。



从六边形推出的第一组公式：就看三个涂上阴影的三角形，这三个涂上阴影的三角形都是倒着的，也就是尖在下面，阴影三角形中的上面两个点的平方和等于下面那个点的平方，即

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

(2) $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

(3) $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

从六边形推出的第二组公式：就看三条对角线，对角线的两个端点的乘积等于 **1**，即

(1) $\sin x \times \csc x = 1$

(2) $\cos x \times \sec x = 1$

(3) $\tan x \times \cot x = 1$

从六边形推出的第三组公式：就看六个顶点，某个顶点等于它相邻的两个顶点的乘积，即

(1) $\sin x = \tan x \times \cos x$

(2) $\cos x = \sin x \times \cot x$

(3) $\tan x = \sin x \times \sec x$

(4) $\cot x = \cos x \times \csc x$

(5) $\sec x = \tan x \times \csc x$

(6) $\csc x = \sec x \times \cot x$

下面来看例题。

例. 请计算 $\int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$ 。

解：由“从六边形推出的第三组公式中的公式（1）”可知，$\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$ 。所以

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x=\int \tan x\,\mathrm{d}x \qquad \text{（1）式}$$

由公式（8）可知

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C \qquad \text{（2）式}$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C \qquad \text{（3）式}$$

例. 请计算 $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ 。

解：由“从六边形推出的第三组公式中的公式（2）”可知，$\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$。所以

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\int \cot x\,\mathrm{d}x \qquad \text{（1）式}$$

由公式（9）可知

$$\int \cot x\,\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C \qquad \text{（2）式}$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C \qquad \text{（3）式}$$

方法 2. 硬凑法和挪法。

$\int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x$ 大家会算吗？相信可能有不少同学不会算。但是如果问大家 $\int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}(3x+1)$ 会不会算，那么可能100%的同学都会算，直接套用方法 1 中所讲的公式（5）就可以了，即 $\int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}(3x+1)=\ln|3x+1|+C$ 。

现在很明确地告诉大家，$\int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{3}\times\frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}(3x+1)$，那么这回大家会算 $\int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x$ 了吧？即

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x&=\int \frac{1}{3}\times\frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}(3x+1)=\frac{1}{3}\int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}(3x+1)\\&=\frac{1}{3}(\ln|3x+1|+C)=\frac{1}{3}\ln|3x+1|+\frac{1}{3}C=\frac{1}{3}\ln|3x+1|+C\end{aligned}$$

现在肯定有不少同学心里都在想：“为什么 $\int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{3}\times\frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}(3x+1)$？这个等式是怎么来的？”这就涉及下面要讲的硬凑法。

在开始正式给大家讲硬凑法和挪法之前，先来告诉大家一句话：下面**所讲的硬凑法和挪法的共同点就是，无论使用硬凑法还是使用挪法，达到的效果都是让 d 的后面发生改变**。例如，$\int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{3}\times\frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}(3x+1)$ 这个等式就是通过硬凑法得到的，d 的后面发生了改变，从 x 变为 $3x+1$ 。

先来讲硬凑法。

硬凑法分为三步。

第一步：将 d 的后面写成你希望写成的函数。

第二步：原来 d 后面的东西对 x 求导，记求导结果为 A，现在 d 后面的东西对 x 求导，记求导结果为 B，然后算出 $\frac{B}{A}$，记 $\frac{B}{A}=C$ 。

第三步：在第一步得到的那个积分的被积函数中乘以 $\frac{1}{C}$，然后就可以写等于号了。

下面来看例题。

例. 请计算$\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}x$。

解： 采用硬凑法来做本题，也就是对$\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}x$使用硬凑法。

第一步：将 d 的后面写成你希望写成的函数。

对于本题而言，将 d 的后面写为$3x+1$，也就是$\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x+1)$。

第二步：原来 d 后面的东西对 x 求导，记求导结果为 A，现在 d 后面的东西对 x 求导，记求导结果为 B，然后算出 $\frac{B}{A}$，记 $\frac{B}{A}=C$。

对于本题而言，原来 d 后面的东西是x，$(x)'=1$，所以$A=1$。现在 d 后面的东西是$3x+1$，$(3x+1)'=3$，所以$B=3$。由于$A=1$，$B=3$，所以$\frac{B}{A}=3$，即$C=3$。

第三步：在第一步得到的那个积分的被积函数中乘以 $\frac{1}{C}$，然后就可以写等于号了。

对于本题而言，第一步得到的那个积分是$\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x+1)$，在它的被积函数中乘以$\frac{1}{3}$，也就是$\int\frac{1}{3}\times\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x+1)$。现在就可以写等于号了。谁和谁写等于号？就是原题中给的不定积分与现在的不定积分写等于号，即

$$\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{3}\times\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x+1) \qquad \text{（1）式}$$

到此为止，硬凑法已经彻底完成了。 不过本题还没有做完，要继续做。

根据方法 1 中所讲的公式（17）得

$$\int\frac{1}{3}\times\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x+1)=\frac{1}{3}\times\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x+1) \qquad \text{（2）式}$$

根据方法 1 中所讲的公式（5）得

$$\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x+1)=\ln|3x+1|+C \qquad \text{（3）式}$$

（2）式、（3）式相结合，得

$$\int\frac{1}{3}\times\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x+1)=\frac{1}{3}\times(\ln|3x+1|+C)=\frac{1}{3}\ln|3x+1|+\frac{1}{3}C=\frac{1}{3}\ln|3x+1|+C \qquad \text{（4）式}$$

（1）式、（4）式相结合，得

$$\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln|3x+1|+C \qquad \text{（5）式}$$

本题就做完了。通过本题我们知道，方法 1（公式法）和方法 2（硬凑法和挪法）并不是孤立的，并不是说一道题用了方法 1 就不能用方法 2。本题就既用了方法 1，又用了方法 2。

有的同学可能会问：“对于本题而言，硬凑法为什么要把 d 后面凑成$3x+1$呢？怎么不凑成$\sin x$或者$\cos x$或者$100x$等呢?”

现在来回答一下这个问题。这 d 后面凑成什么都可以，但要保证能做出这道题来。例如，对于本题而言，要是把 d 后面凑成$\sin x$的话，那就是$\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos x}\times\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(\sin x)$，这没错，但是对解题没有帮助，不但没有帮助，还变得更难了。把 d 后面凑成 $\cos x$ 或者 $100x$ 是同样的效果。

这下大家明白了吧！d 后面可以任意凑，但是得以做出题目为目的，不能凑了半天，反而更难做了。

其实，本题还有另外一种做法，下面就给出另外一种做法。不过要事先声明：介绍另外一种做法是为了让大家学知识，但是到真正考试时，如果采用这种做法，那绝对是不可取的，太麻烦了！

另外一种做法也是采用硬凑法，但是要凑两次。

先来凑第一次，也就是对$\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}x$使用硬凑法。

第一步： 对于本题而言，将 d 的后面写为$3x$，也就是$\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x)$。

第二步：对于本题而言，原来 d 后面的东西是 x，$(x)'=1$，所以 $A=1$。现在 d 后面的东西是 $3x$，$(3x)'=3$，所以 $B=3$。由于 $A=1$，$B=3$，所以 $\frac{B}{A}=3$，即 $C=3$。

第三步：对于本题而言，第一步得到的那个积分是 $\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x)$，在它的被积函数中乘以 $\frac{1}{3}$，也就是 $\int\frac{1}{3}\times\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x)$。现在就可以写等于号了，即

$$\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{3}\times\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x) \quad （6）式$$

再来凑第二次，这次是对 $\int\frac{1}{3}\times\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x)$ 使用硬凑法。

第一步：对于本题而言，将 d 的后面写为 $3x+1$，也就是 $\int\frac{1}{3}\times\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x+1)$。

第二步：对于本题而言，原来 d 后面的东西是 $3x$，$(3x)'=3$，所以 A=3。现在 d 后面的东西是 $3x$+1，$(3x+1)'=3$，所以 $B=3$。由于 $A=3$，$B=3$，所以 $\frac{B}{A}=1$，即 $C=1$。

第三步：对于本题而言，第一步得到的那个积分是 $\int\frac{1}{3}\times\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x+1)$，在它的被积函数中乘以 1，也就是 $\int1\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x+1)$。现在就可以写等于号了，即

$$\int\frac{1}{3}\times\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x)=\int1\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x+1) \quad （7）式$$

到此为止，硬凑法已经彻底完成了。接着就可以按前面介绍的方法将本题继续做完。

这种做法凑了两次。首先是将 d 后面的 x 凑成 $3x$，然后又继续凑，将 d 后面的 $3x$ 凑成 $3x+1$。而原来的做法，是一步到位，就凑了一次，直接将 d 后面的 x 凑成 $3x+1$，很方便。所以考试时这种做法是不可取的（尽管也能做出来）。

本题还有第三种做法，下面给出第三种做法。不过要事先声明：介绍这第三种做法也是为了让大家学知识，但是到真正考试时，这种做法也是不可取的。

第三种做法如下。

首先，先将 $\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}x$ 改写为

$$\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\times3\times\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}x \quad （8）式$$

由方法 1 中的公式（17）可知

$$\frac{1}{3}\times3\times\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\times\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x) \quad （9）式$$

（8）式、（9）式相结合，得

$$\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\times\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x) \quad （10）式$$

然后采用硬凑法，也就是对 $\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x)$ 使用硬凑法。

第一步：对于本题而言，将 d 的后面写为 $3x+1$，也就是 $\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x+1)$。

第二步：对于本题而言，原来 d 后面的东西是 $3x$，$(3x)'=3$，所以 $A=3$。现在 d 后面的东西是 $3x+1$，$(3x+1)'=3$，所以 $B=3$。由于 $A=3$，$B=3$，所以 $\frac{B}{A}=1$，即 $C=1$。

第三步：对于本题而言，第一步得到的那个积分是 $\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x+1)$，在它的被积函数中乘以 1，也就是 $\int1\times\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x+1)$。现在就可以写等于号了，即

$$\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x)=\int1\times\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x+1) \quad （11）式$$

到此为止，硬凑法已经彻底完成了。接着就可以按前面介绍的方法将本题继续做完。

这种做法首先是用了方法 1 中的公式（17）把常数放在了 d 后面，使 dx 变为了 $d(3x)$，然后才用硬凑法，将 d 后面的 $3x$ 凑成了 $3x+1$。而原来的做法是一步到位，上来就凑，直接将 d 后面的 x 凑成 $3x+1$，很方便。所以，考试时这种做法也是不可取的（尽管也能做出来）。

例. 请计算 $\int e^{2x+3}dx$。

解： 采用硬凑法来做本题，也就是对 $\int e^{2x+3}dx$ 使用硬凑法。

第一步： 对于本题而言，将 d 的后面写为 $2x+3$，也就是 $\int e^{2x+3}d(2x+3)$。

第二步： 对于本题而言，原来 d 后面的东西是 x，$(x)'=1$，所以 $A=1$。现在 d 后面的东西是 $2x+3$，$(2x+3)'=2$，所以 $B=2$。由于 $A=1$，$B=2$，所以 $\frac{B}{A}=2$，即 $C=2$。

第三步： 对于本题而言，第一步得到的那个积分是 $\int e^{2x+3}d(2x+3)$，在它的被积函数中乘以 $\frac{1}{2}$，也就是 $\int \frac{1}{2}\times e^{2x+3}d(2x+3)$。现在就可以写等于号了。谁和谁写等于号？就是原题中给的不定积分与现在的不定积分写等于号，即

$$\int e^{2x+3}dx=\int \frac{1}{2}\times e^{2x+3}d(2x+3) \qquad （1）式$$

到此为止，硬凑法已经彻底完成了。 不过本题还没有做完，要继续做。

根据方法 1 中所讲的公式（17）得

$$\int \frac{1}{2}\times e^{2x+3}d(2x+3)=\frac{1}{2}\times\int e^{2x+3}d(2x+3) \qquad （2）式$$

根据方法 1 中所讲的公式（1）得

$$\int e^{2x+3}d(2x+3)=\int e^{2x+3}+C \qquad （3）式$$

（2）式、（3）式相结合，得

$$\int \frac{1}{2}\times e^{2x+3}d(2x+3)=\frac{1}{2}\times(e^{2x+3}+C)=\frac{1}{2}e^{2x+3}+\frac{1}{2}C=\frac{1}{2}e^{2x+3}+C \qquad （4）式$$

（1）式、（4）式相结合，得

$$\int e^{2x+3}dx=\frac{1}{2}e^{2x+3}+C \qquad （5）式$$

再来讲挪法。

挪法的意思是：设有不定积分 $\int \square\, dx$，其中 $\square$ 中为若干个函数相乘的形式，那么可以将这若干个函数中的一个函数挪到 d 的后面。具体地说，谁求完导是该函数，该函数挪到 d 的后面就变成谁。

下面来看例题。

例. 请计算 $\int \sin x\times\cos x\, dx$。

解： 本题的 $\square$ 中是 $\sin x\times\cos x$，也就是说，本题的 $\square$ 中是两项相乘的形式。本题就采用刚刚讲完的挪法来做，可以将这两个函数中的一个函数挪到 d 的后面。

第一种做法如下。

可以将 $\cos x$ 挪到 d 的后面，$\cos x$ 挪到 d 的后面变成什么呢？那就想想谁求完导是 $\cos x$，很明显 $\sin x$ 求完导是 $\cos x$，所以 $\cos x$ 挪到 d 的后面变成 $\sin x$，则有

$$\int \sin x\times\cos x\, dx=\int \sin x\, d(\sin x) \qquad （1）式$$

此时，$\square$ 中的 $\cos x$ 没有了（因为 $\square$ 中的 $\cos x$ 挪到 d 的后面，变成了 $\sin x$）。

由方法 1 中所讲的公式（4）可知

$$\int \sin x\, d(\sin x)=\frac{\sin^2 x}{2}+C \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\int \sin x\times\cos x\, dx=\frac{\sin^2 x}{2}+C \qquad （3）式$$

第二种做法如下。

可以将 $\sin x$ 挪到 d 的后面，$\sin x$ 挪到 d 的后面变成什么呢？那就想想谁求完导是 $\sin x$，很明显 $-\cos x$ 求完导是 $\sin x$，所以 $\sin x$ 挪到 d 的后面变成 $-\cos x$，则有

$$\int \sin x \times \cos x \,\mathrm{d}x = \int \cos x \,\mathrm{d}(-\cos x) \qquad （4）式$$

此时，$\square$ 中的 $\sin x$ 没有了（因为 $\square$ 中的 $\sin x$ 挪到 d 的后面，变成了 $-\cos x$）。

由方法 1 中所讲的公式（17）可知

$$\int \cos x \,\mathrm{d}(-\cos x) = -\int \cos x \,\mathrm{d}(\cos x) \qquad （5）式$$

由方法 1 中所讲的公式（4）可知

$$\int \cos x \,\mathrm{d}(\cos x) = \frac{\cos^2 x}{2} + C \qquad （6）式$$

（5）式、（6）式相结合，得

$$\int \cos x \,\mathrm{d}(-\cos x) = -(\frac{\cos^2 x}{2} + C) = -\frac{\cos^2 x}{2} - C = -\frac{\cos^2 x}{2} + C \qquad （7）式$$

（4）式、（7）式相结合，得

$$\int \sin x \times \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{\cos^2 x}{2} + C \qquad （8）式$$

不难发现，按第一种做法做出来的结果和按第二种做法做出来的结果不一样（按第一种做法做出来的答案是 $\frac{\sin^2 x}{2} + C$，按第二种做法做出来的答案是 $-\frac{\cos^2 x}{2} + C$），但是它们都是正确的。这说明什么？说明不定积分题的答案形式根本就不是唯一的。那有的同学就问了："怎么知道我做没做对？"这很简单，将所求得的答案对 x 求导，然后看一下求导的结果是不是被积函数就可以了。如果是，说明做对了；如果不是，说明做错了。

拿本题来举例。本题按照第一种做法做出的答案是 $\frac{\sin^2 x}{2} + C$，现在验证一下做出的这个答案对不对。$(\frac{\sin^2 x}{2} + C)' = \frac{1}{2} \times 2\sin x \times \cos x = \sin x \times \cos x$，而 $\sin x \times \cos x$ 正是题中所给的被积函数，所以说明做对了。本题按照第二种做法做出的答案是 $-\frac{\cos^2 x}{2} + C$，现在验证一下做出的这个答案对不对。$(-\frac{\cos^2 x}{2} + C)' = -\frac{1}{2} \times 2 \times \cos x \times (-\sin x) = \sin x \times \cos x$，而 $\sin x \times \cos x$ 正是题中所给的被积函数，所以说明做对了。

由上述内容可知，无论是硬凑法还是挪法，它们最终都是将 d 的后面给改变了。

其实，上一道题用硬凑法也是可以做的。

例. 请计算 $\int \sin x \times \cos x \,\mathrm{d}x$。

解： 刚才是用挪法来做的这道题，现在用硬凑法做一下，也就是对 $\int \sin x \times \cos x \,\mathrm{d}x$ 使用硬凑法。

第一步： 对于本题而言，将 d 的后面写为 $\sin x$，也就是 $\int \sin x \times \cos x \,\mathrm{d}(\sin x)$。

第二步： 对于本题而言，原来 d 后面的东西是 x，$(x)' = 1$，所以 $A = 1$。现在 d 后面的东西是 $\sin x$，$(\sin x)' = \cos x$，所以 $B = \cos x$。由于 $A = 1$，$B = \cos x$，所以 $\frac{B}{A} = \cos x$，即 $C = \cos x$。

第三步： 对于本题而言，第一步得到的那个积分是 $\int \sin x \times \cos x \,\mathrm{d}(\sin x)$，在它的被积函数中乘以 $\frac{1}{\cos x}$，也就是 $\int \frac{1}{\cos x} \times \sin x \times \cos x \,\mathrm{d}(\sin x)$，化简得 $\int \sin x \,\mathrm{d}(\sin x)$。现在就可以写等于号了。谁和谁写等于号？就是原题中给的不定积分与现在的不定积分写等于号，即

$$\int \sin x \times \cos x \,\mathrm{d}x = \int \sin x \,\mathrm{d}(\sin x) \qquad （1）式$$

由方法 1 中所讲的公式（4）可知

$$\int \sin x \,\mathrm{d}(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2} + C \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\int \sin x \times \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{\sin^2 x}{2} + C \qquad （3）式$$

例. 请计算$\int\frac{6x+20x+\mathrm{e}^x}{3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$。

解： $\int\frac{6x+20x^4+\mathrm{e}^x}{3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x}\times(6x+20x^4+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$ （1）式

本题的□中是$\int\frac{1}{3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x}\times(6x+20x^4+\mathrm{e}^x)$，也就是说，本题的□中是两项相乘的形式。本题就采用刚刚讲完的挪法来做，可以将这两个函数中的一个函数挪到 d 的后面。

可以将$6x+20x^4+\mathrm{e}^x$挪到 d 的后面，$6x+20x^4+\mathrm{e}^x$挪到 d 的后面变成什么呢？那就想想谁求完导是$6x+20x^4+\mathrm{e}^x$，很明显$3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x$求完导是$6x+20x^4+\mathrm{e}^x$，所以$6x+20x^4+\mathrm{e}^x$挪到 d 的后面变成$3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x$，则有

$\int\frac{1}{3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x}\times(6x+20x^4+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}(3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x)$ （2）式

（1）式、（2）式相结合，得

$\int\frac{6x+20x^4+\mathrm{e}^x}{3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}(3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x)$ （3）式

由方法 1 中所讲的公式（5）可知

$\int\frac{1}{3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}(3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x)=\ln\left|3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x\right|+C$ （4）式

（3）式、（4）式相结合，得

$\int\frac{6x+20x^4+\mathrm{e}^x}{3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\ln\left|3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x\right|+C$ （5）式

有的同学会问："挪法我是会了，但是怎么想出来的$3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x$求完导是$6x+20x^4+\mathrm{e}^x$？我想不出来谁求完导是$6x+20x^4+\mathrm{e}^x$，那怎么办？我的回答是：导数练得太熟了，所以就想得出来。要是想不出来的话，那也完全没关系，那么就计算一下$\int(6x+20x^4+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$，计算结果为$\int(6x+20x^4+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x+C$，这就说明$3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x$求完导是$6x+20x^4+\mathrm{e}^x$，所以将$6x+20x^4+\mathrm{e}^x$挪到 d 的后面，d 的后面就变成$3x^2+4x^5+\mathrm{e}^x$。

其实不光是这道题，而是所有用挪法做的题都一样。要想挪某个函数，要么就用脑子想出来谁求完导是该函数，该函数挪到 d 的后面就变成谁，要么就用积分算出来谁求完导是该函数，该函数挪到 d 的后面就变成谁。

例如，之前做的题$\int\sin x\times\cos x\,\mathrm{d}x$，如果要把$\cos x$挪到 d 的后面，大家都能想出来$\sin x$求完导是$\cos x$，所以$\cos x$挪到 d 的后面就会变成$\sin x$，即$\int\sin x\times\cos x\,\mathrm{d}x=\int\sin x\,\mathrm{d}(\sin x)$；但如果有人想不出来谁求完导是$\cos x$，那么就算一下$\int\cos x\,\mathrm{d}x$，由方法 1 中所讲的公式（7）可知，$\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$，由此可知$\sin x$求完导是$\cos x$，所以$\cos x$挪到 d 的后面就会变成$\sin x$，即$\int\sin x\times\cos x\,\mathrm{d}x=\int\sin x\,\mathrm{d}(\sin x)$。

例. 请计算$\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$。

解： $\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+x^2}\times\arctan x\,\mathrm{d}x$ （1）式

本题的□中是$\frac{1}{1+x^2}\times\arctan x$，也就是说，本题的□中是两项相乘的形式。本题就采用刚刚讲完的挪法来做，可以将这两个函数中的一个函数挪到 d 的后面。

可以将$\frac{1}{1+x^2}$挪到 d 的后面，$\frac{1}{1+x^2}$挪到 d 的后面变成什么呢？那就想想谁求完导是$\frac{1}{1+x^2}$，很明显$\arctan x$求完导是$\frac{1}{1+x^2}$，所以$\frac{1}{1+x^2}$挪到 d 的后面变成$\arctan x$（要是想不出来谁求完导是$\frac{1}{1+x^2}$的话，那么就计算一下$\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$，由方法 1 中的公式（14）可知，$\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan x+C$，所以$\arctan x$求完导是$\frac{1}{1+x^2}$），则有

$\int\frac{1}{1+x^2}\times\arctan x\mathrm{d}x=\int\arctan x\,\mathrm{d}(\arctan x)$ （2）式

（1）式、（2）式相结合，得

$\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\arctan x\,\mathrm{d}(\arctan x)$ （3）式

由方法 1 中所讲的公式（4）可知

$\int \arctan x \mathrm{d}(\arctan x) = \dfrac{\arctan^2 x}{2} + C$　　（4）式

（3）式、（4）式相结合，得

$\int \dfrac{\arctan x}{1+x^2} \mathrm{d}x = \dfrac{\arctan^2 x}{2} + C$　　（5）式

下面再讲一个知识点。

既然被积函数中的内容可以挪到 d 之后，那么 d 之后的内容自然也可以挪到被积函数中（然后把 d 之后恢复成 x），挪的方法就是直接求导，非常简单。

下面来看例题。

例． 请计算 $\int \dfrac{1}{\cos x} \mathrm{d}(\sin x)$。

解： 把 d 之后的 $\sin x$ 挪到被积函数中，挪到被积函数中以后变成什么了呢？很简单，直接让 $\sin x$ 对 x 求导。$(\sin x)' = \cos x$，所以 d 之后的 $\sin x$ 挪到被积函数中以后会变成 $\cos x$，即

$\int \dfrac{1}{\cos x} \mathrm{d}(\sin x) = \int \cos x \times \dfrac{1}{\cos x} \mathrm{d}x$　　（1）式

大家注意，当把 d 之后的东西挪到被积函数中以后，d 之后要恢复成 x。

现在继续做。化简 $\int \cos x \times \dfrac{1}{\cos x} \mathrm{d}x$ 得

$\int \cos x \times \dfrac{1}{\cos x} \mathrm{d}x = \int 1 \mathrm{d}x$　　（2）式

（1）式、（2）式相结合，得

$\int \dfrac{1}{\cos x} \mathrm{d}(\sin x) = \int 1 \mathrm{d}x$　　（3）式

由方法 1 中的公式（3）可知

$\int 1 \mathrm{d}x = x + C$　　（4）式

（3）式、（4）式相结合，得

$\int \dfrac{1}{\cos x} \mathrm{d}(\sin x) = x + C$　　（5）式

方法 3．分部积分法。

从方法 3 开始，每种方法都对应一种题型。意思就是说，方法 1 和方法 2 不管什么题可能都会用得上，所以在之前讲方法 1 和方法 2 时，并没有特别指明方法 1 用于什么题型，方法 2 用于什么题型；但是，从方法 3 开始，每讲一种方法都会告诉大家该方法用于什么样的题型。

方法 3 的适用题型：被积函数是两项相乘的形式，并且这两项是指数函数、三角函数、幂函数、对数函数、反三角函数这五类函数中的两类。

例． 请计算 $\int (\mathrm{e}^x \times x) \mathrm{d}x$。

例． 请计算 $\int (x \times \sin x) \mathrm{d}x$。

例． 请计算 $\int (x \times \cos x) \mathrm{d}x$。

例． 请计算 $\int (x \times \ln x) \mathrm{d}x$。

例． 请计算 $\int (\mathrm{e}^x \times \sin x) \mathrm{d}x$。

以上五道题都应该用方法 3（分部积分法）来做。可能有一部分同学还不太明白，下面就详细地解释一下。

先来看第一题 $\int (\mathrm{e}^x \times x) \mathrm{d}x$，被积函数是 $\mathrm{e}^x \times x$，是两项相乘的形式，并且这两项分别是指数函数和幂函数，是指数函数、三角函数、幂函数、对数函数、反三角函数这五类函数中的两类，所以本题应该用方法 3 来做。第二题 $\int (x \times \sin x) \mathrm{d}x$ 中，x 是幂函数，$\sin x$ 是三角函数。第三题 $\int (x \times \cos x) \mathrm{d}x$ 中，x 是幂函数，$\cos x$ 是三角函数。第四题

$\int(x\times\ln x)\mathrm{d}x$ 中，x 是幂函数，$\ln x$ 是对数函数。第五题 $\int(\mathrm{e}^x\times\sin x)\,\mathrm{d}x$ 中，e^x 是指数函数，$\sin x$ 是三角函数。因此，第二至五题也应该用方法 3 来做。

相信大家现在已经清楚了什么样的题应该用方法 3 来做。那么方法 3 到底怎么用呢？接下来就要讲。

当确定某道题应该用方法 3（分部积分法）来做之后，就需要进行以下两步。

第一步：将两项中的其中一项挪到 d 的后面。到底把哪一项挪到 d 的后面？告诉大家一个口诀：指三幂对反。按此顺序，哪个在前面就挪哪个。

第二步：使用分部积分公式 $\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$ 。

下面来看例题。

例. 请计算 $\int(\mathrm{e}^x\times x)\,\mathrm{d}x$ 。

解： 根据前面的内容可知，本题应该用方法 3 来做。

第一步：将两项中的其中一项挪到 d 的后面。

对于本题而言，本题中有指数函数、幂函数。由于在口诀“指三幂对反”中，“指”字位于“幂”字的前面，哪个在前面就挪哪个，所以应该将指数函数 e^x 挪到 d 的后面。

怎么挪就不用再讲了，方法 2 中已经详细地讲过了。所以有

$$\int(\mathrm{e}^x\times x)\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) \qquad （1）式$$

第二步：使用分部积分公式 $\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$ 。

对于本题而言，那就是

$$\int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=x\times\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \qquad （2）式$$

方法 3 只管到这里，接下来要继续做。

由方法 1 中的公式（1）可知

$$\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C \qquad （3）式$$

（2）式、（3）式相结合，得

$$\int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=x\times\mathrm{e}^x-(\mathrm{e}^x+C)=x\times\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-C=x\times\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C \qquad （4）式$$

（1）式、（4）式相结合，得

$$\int(\mathrm{e}^x\times x)\mathrm{d}x=x\times\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C \qquad （5）式$$

例. 请计算 $\int(x\times\sin x)\,\mathrm{d}x$ 。

解： 根据前面的内容可知，本题应该用方法 3 来做。

第一步：将两项中的其中一项挪到 d 的后面。

对于本题而言，本题中有幂函数、三角函数。由于在口诀“指三幂对反”中，“三”字位于“幂”字的前面，哪个在前面就挪哪个，所以应该将三角函数 $\sin x$ 挪到 d 的后面。

怎么挪就不用再讲了，方法 2 中已经详细地讲过了。所以有

$$\int(x\times\sin x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}(-\cos x) \qquad （1）式$$

第二步：使用分部积分公式 $\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$ 。

对于本题而言，那就是

$$\int x\mathrm{d}(-\cos x)=-\cos x\times x-\int-\cos x\mathrm{d}x \qquad （2）式$$

方法 3 只管到这里，接下来要继续做。

由方法 1 中的公式（17）可知

$$\int-\cos x\mathrm{d}x=-\int\cos x\mathrm{d}x \qquad （3）式$$

（2）式、（3）式相结合，得

$$\int x\mathrm{d}(-\cos x)=-\cos x\times x+\int\cos x\mathrm{d}x \qquad （4）式$$

由方法 1 中的公式（7）可知

$$\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C \qquad （5）式$$

（4）式、（5）式相结合，得

$\int x\mathrm{d}(-\cos x) = -\cos x \times x + \sin x + C$　　（6）式

（1）式、（6）式相结合，得

$\int (x \times \sin x)\mathrm{d}x = -\cos x \times x + \sin x + C$　　（7）式

例. 请计算 $\int (x \times -\cos x)\mathrm{d}x$。

解： 根据前面的内容可知，本题应该用方法 3 来做。

第一步：将两项中的其中一项挪到 d 的后面。

对于本题而言，本题中有幂函数、三角函数。由于在口诀“指三幂对反”中，“三”字位于“幂”字的前面，哪个在前面就挪哪个，所以应该将三角函数 $\cos x$ 挪到 d 的后面。

怎么挪就不用再讲了，方法 2 中已经详细地讲过了。所以有

$\int (x \times \cos x)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(\sin x)$　　（1）式

第二步：使用分部积分公式 $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$。

对于本题而言，那就是

$\int x\mathrm{d}(\sin x) = \sin x \times x - \int \sin x\mathrm{d}x$　　（2）式

方法 3 只管到这里，接下来要继续做。

由方法 1 中的公式（6）可知

$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$　　（3）式

（2）式、（3）式相结合，得

$\int x\,\mathrm{d}(\sin x) = \sin x \times x - (-\cos x + C) = \sin x \times x + \cos x + C$　　（4）式

（1）式、（4）式相结合，得

$\int (x \times \cos x)\mathrm{d}x = \sin x \times x + \cos x + C$　　（5）式

例. 请计算 $\int (x \times \ln x)\,\mathrm{d}x$。

解： 根据前面的内容可知，本题应该用方法 3 来做。

第一步：将两项中的其中一项挪到 d 的后面。

对于本题而言，本题中有幂函数、对数函数。由于在口诀“指三幂对反”中，“幂”字位于“对”字的前面，哪个在前面就挪哪个，所以应该将幂函数 x 挪到 d 的后面。

怎么挪就不用再讲了，方法 2 中已经详细地讲过了。所以有

$\int (x \times \ln x)\,\mathrm{d}x = \int \ln x\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$　　（1）式

第二步：使用分部积分公式 $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$。

对于本题而言，那就是

$\int \ln x\mathrm{d}(\frac{x^2}{2}) = \frac{x^2}{2} \times \ln x - \int \frac{x^2}{2}\mathrm{d}(\ln x)$　　（2）式

方法 3 只管到这里，接下来要继续做。

在讲方法 2 时，曾讲过，d 之后的内容也可以挪到被积函数中（d 之后恢复成 x），直接求导就行了。对于 $\int \frac{x^2}{2}\mathrm{d}(\ln x)$ 来说，由于 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$，所以

$\int \frac{x^2}{2}\mathrm{d}(\ln x) = \int \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{2}\mathrm{d}x$　　（3）式

由方法 1 中的公式（17）可知

$\int \frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x$　　（4）式

（3）式、（4）式相结合，得

$\int \frac{x^2}{2}\mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x$　　（5）式

由方法 1 中的公式（4）可知

$\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C$ （6）式

（5）式、（6）式相结合，得

$\int\frac{x^2}{2}d(\ln x)=\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}+C)=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}C=\frac{x^2}{4}+C$ （7）式

（2）式、（7）式相结合，得

$\int\ln x\,d(\frac{x^2}{2})=\frac{x^2}{2}\times\ln x-(\frac{x^2}{4}+C)=\frac{x^2}{2}\times\ln x-\frac{x^2}{4}+C$ （8）式

（1）式、（8）式相结合，得

$\int(x\times\ln x)\,dx=\frac{x^2}{2}\times\ln x-\frac{x^2}{4}+C$ （9）式

例. 请计算 $\int(e^x\times\sin x)\,dx$。

解： 根据前面的内容可知，本题应该用方法 3 来做。

第一步：将两项中的其中一项挪到 d 的后面。

对于本题而言，本题中有指数函数、三角函数。由于在口诀“指三幂对反”中，“指”字位于“三”字的前面，哪个在前面就挪哪个，所以应该将指数函数 e^x 挪到 d 的后面。

怎么挪就不用再讲了，方法 2 中已经详细地讲过了。所以有

$\int(e^x\times\sin x)\,dx=\int\sin x\,d(e^x)$ （1）式

第二步：使用分部积分公式 $\int u\,dv=uv-\int v\,du$。

对于本题而言，那就是

$\int\sin x\,d(e^x)=\sin x\times e^x-\int e^x d(\sin x)$ （2）式

方法 3 只管到这里，接下来要继续做。

在讲方法2时，曾讲过，d之后的内容也可以挪到被积函数中（d之后恢复成 x），直接求导就行了。对于 $\int e^x d(\sin x)$ 来说，由于 $(\sin x)'=\cos x$，所以

$\int e^x d(\sin x)=\int(e^x\times\cos x)\,dx$ （3）式

（2）式、（3）式相结合，得

$\int\sin x\,d(e^x)=\sin x\times e^x-\int e^x\times\cos x\,dx$ （4）式

（1）式、（4）式相结合，得

$\int(e^x\times\sin x)\,dx=\sin x\times e^x-\int(e^x\times\cos x)dx$ （5）式

现在来算一下 $\int(e^x\times\cos x)\,dx$，这就又得用到方法 3。

第一步：将两项中的其中一项挪到 d 的后面。

上面不定积分的被积函数中有指数函数、三角函数。由于在口诀“指三幂对反”中，“指”字位于“三”字的前面，哪个在前面就挪哪个，所以应该将指数函数 e^x 挪到 d 的后面。所以有

$\int(e^x\times\cos x)\,dx=\int\cos x\,d(e^x)$ （6）式

第二步：使用分部积分公式 $\int u\,dv=uv-\int v\,du$。

对于本题而言，那就是

$\int\cos x\,d(e^x)=\cos x\times e^x-\int e^x d(\cos x)$ （7）式

方法 3 只管到这里，接下来要继续做。

（7）式可以整理为

$\int\cos x\,d(e^x)=\cos x\times e^x+\int(e^x\times\sin x)\,dx$ （8）式

（6）式、（8）式相结合，得

$\int(e^x\times\cos x)dx=\cos x\times e^x+\int(e^x\times\sin x)dx$ （9）式

（5）式、（9）式相结合，得

$\int(e^x\times\sin x)\,dx=\sin x\times e^x-[\cos x\times e^x+\int(e^x\times\sin x)\,dx]$ （10）式

（10）式可以整理为

$$\int (e^x \times \sin x)\,dx = \sin x \times e^x - \cos x \times e^x - \int (e^x \times \sin x)\,dx \qquad \text{（11）式}$$

即

$$2\int (e^x \times \sin x)\,dx = \sin x \times e^x - \cos x \times e^x \qquad \text{（12）式}$$

解得

$$\int (e^x \times \sin x)\,dx = \frac{\sin x \times e^x - \cos x \times e^x}{2} + C \qquad \text{（13）式}$$

方法 4. 凑分母法。

方法 4 的适用题型：被积函数是一个分数，分母是几项相加减的形式，且分子是分母的其中一项（但并非所有的这种题都能用方法 4）。

下面来看例题。

例. 请计算$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$。

解： 本题中的被积函数是一个分数，分母是两项相加的形式（一项是 1，一项是x^2），且分子是分母的其中一项，所以考虑用方法 4 来做，即

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx \qquad \text{（1）式}$$

由方法 1 中的公式（16）可知

$$\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2+1}{1+x^2}\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad \text{（2）式}$$

$\int \frac{x^2+1}{1+x^2}\,dx$ 可以化简为

$$\int \frac{x^2+1}{1+x^2}\,dx = \int 1\,dx \qquad \text{（3）式}$$

由方法 1 中的公式（3）可知

$$\int 1\,dx = x + C \qquad \text{（4）式}$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\int \frac{x^2+1}{1+x^2}\,dx = x + C \qquad \text{（5）式}$$

由方法 1 中的公式（14）可知

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C \qquad \text{（6）式}$$

将（5）式、（6）式代入（2）式，得

$$\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = x + C - (\arctan x + C) = x - \arctan x + C \qquad \text{（7）式}$$

（1）式、（7）式相结合，得

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = x - \arctan x + C \qquad \text{（8）式}$$

例. 请计算$\int \frac{1}{1-e^x}dx$。

解： 本题中的被积函数是一个分数，分母是两项相减的形式（一项是 1，一项是e^x），且分子是分母的其中一项，所以考虑用方法 4 来做，即

$$\int \frac{1}{1-e^x}dx = \int \frac{1-e^x+e^x}{1-e^x}dx \qquad \text{（1）式}$$

由方法 1 中的公式（16）可知

$$\int \frac{1-e^x+e^x}{1-e^x}dx = \int \frac{1-e^x}{1-e^x}dx + \int \frac{e^x}{1-e^x}dx \qquad \text{（2）式}$$

$\int \frac{1-e^x}{1-e^x}dx$ 可以化简为

$\int \frac{1-e^x}{1-e^x}dx = \int 1\,dx$　　（3）式

由方法 1 中的公式（3）可知

$\int 1\,dx = x + C$　　（4）式

（3）式、（4）式相结合，得

$\int \frac{1-e^x}{1-e^x}dx = x + C$　　（5）式

由方法 2 中的挪法可知

$\int \frac{e^x}{1-e^x}dx = \int \frac{1}{1-e^x}d(e^x)$　　（6）式

由方法 2 中的硬凑法可知

$\int \frac{1}{1-e^x}d(e^x) = -\int \frac{1}{1-e^x}d(1-e^x)$　　（7）式

（6）式、（7）式相结合，得

$\int \frac{e^x}{1-e^x}dx = -\int \frac{1}{1-e^x}d(1-e^x)$　　（8）式

由方法 1 中的公式（5）可知

$-\int \frac{1}{1-e^x}d(1-e^x) = -\ln\left|1-e^x\right| + C$　　（9）式

（8）式、（9）式相结合，得

$\int \frac{e^x}{1-e^x}dx = -\ln\left|1-e^x\right| + C$　　（10）式

将（5）式、（10）式代入（2）式，得

$\int \frac{1-e^x+e^x}{1-e^x}dx = x + C - \ln\left|1-e^x\right| + C = x - \ln\left|1-e^x\right| + C$　　（11）式

（1）式、（11）式相结合，得

$\int \frac{1}{1-e^x}dx = x - \ln\left|1-e^x\right| + C$　　（12）式

方法 5．换元法。

方法 5 的适用题型：含根号的题。

例． 请计算 $\int \frac{1}{\sqrt{e^x}+1}dx$。

例． 请计算 $\int \sqrt{x+1}\,dx$。

例． 请计算 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x}-1}dx$。

例． 请计算 $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$。

例． 请计算 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx\ (a>0)$。

由于以上五道题都含有根号，所以以上五道题都应该用方法 5（换元法）来做。

相信大家现在已经清楚了什么样的题应该用方法 5 来做。那么方法 5 到底怎么用呢？接下来就要讲。

方法 5（换元法）的使用。

情况1：若根号的形式是 $\sqrt{a^2-x^2}$，则进行这样的换元：$x = a\sin t$。

情况2：若根号的形式是 $\sqrt{x^2-a^2}$，则进行这样的换元：$x = a\sec t$。

情况3：若根号的形式是$\sqrt{a^2+x^2}$，则进行这样的换元：$x=a\tan t$。

情况4：若根号的形式既不是$\sqrt{a^2-x^2}$，也不是$\sqrt{x^2-a^2}$，也不是$\sqrt{a^2+x^2}$，则将整个根号换元为t。

无论是情况几，都别忘了把 $\mathrm{d}x$ 也换了。

下面来看例题。

例. 请计算$\int\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x$。

解： 由于本题含有根号，所以应该用方法 5 来做。本题所含根号的形式是$\sqrt{\mathrm{e}^x+1}$，这形式既不是$\sqrt{a^2-x^2}$，也不是$\sqrt{x^2-a^2}$，也不是$\sqrt{a^2+x^2}$，属于情况 4，所以应该将整个根号换元为t，即

设$t=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}$，则$\int\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x$变为

$$\int\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{t}\mathrm{d}x \qquad (1)\text{式}$$

接下来要把 $\mathrm{d}x$ 也换了。$\mathrm{d}x$ 怎么换？由于$t=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}$，所以$t^2=\mathrm{e}^x+1$，则$t^2-1=\mathrm{e}^x$，$x=\ln(t^2-1)$，因此$\mathrm{d}x=\mathrm{d}[\ln(t^2-1)]$。

在讲方法 2 时给大家讲过 d 之后的内容可以挪到被积函数中，求导就可以了。由于$[\ln(t^2-1)]'=\frac{2t}{t^2-1}$，所以$\mathrm{d}[\ln(t^2-1)]=\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t$。

由于$\mathrm{d}x=\mathrm{d}[\ln(t^2-1)]$，$\mathrm{d}[\ln(t^2-1)]=\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t$，所以$\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t$。因此

$$\int\frac{1}{t}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{t}\times\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t=\int\frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t \qquad (2)\text{式}$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\int\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t \qquad (3)\text{式}$$

到此为止，换元已经完成了。方法 5 只管到这里，接下来要继续做。

$$\int\frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t=\int\frac{2}{(t+1)(t-1)}\mathrm{d}t \qquad (4)\text{式}$$

大家上高中时应该都学过这样一个公式：$\frac{1}{(t+1)(t-1)}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})$。现在就要用这个公式，$\frac{2}{(t+1)(t-1)}=2\times\frac{1}{2}\times(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})=(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})$，所以（4）式可以变为

$$\int\frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t=\int(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})\mathrm{d}t \qquad (5)\text{式}$$

由方法 1 中的公式（16）可得

$$\int(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t-1}\mathrm{d}t-\int\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t \qquad (6)\text{式}$$

（5）式、（6）式相结合，得

$$\int\frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t-1}\mathrm{d}t-\int\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t \qquad (7)\text{式}$$

由方法 2 中的硬凑法可得

$$\int\frac{1}{t-1}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t-1}\mathrm{d}(t-1) \qquad (8)\text{式}$$

由方法 1 中的公式（5）可得

$$\int\frac{1}{t-1}\mathrm{d}(t-1)=\ln|t-1|+C \qquad (9)\text{式}$$

（8）式、（9）式相结合，得

$\int \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t = \ln|t-1| + C$ （10）式

由方法 2 中的硬凑法可得

$\int \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t+1}\mathrm{d}(t+1)$ （11）式

由方法 1 中的公式（5）可得

$\int \frac{1}{t+1}\mathrm{d}(t+1) = \ln|t+1| + C$ （12）式

（11）式、（12）式相结合，得

$\int \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t = \ln|t+1| + C$ （13）式

将（10）式、（13）式代入（7）式，得

$\int \frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t = \ln|t-1| + C - (\ln|t+1| + C) = \ln|t-1| + C - \ln|t+1| - C = \ln|t-1| - \ln|t+1| + C$ （14）式

（3）式、（14）式相结合，得

$\int \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x = \ln|t-1| - \ln|t+1| + C$ （15）式

这是最终的答案吗？不是。因为 t 是自己设的，得还原成 x 才行。由于 $t = \sqrt{\mathrm{e}^x+1}$，所以本题最终的答案为

$\int \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x = \ln\left|\sqrt{\mathrm{e}^x+1}-1\right| - \ln\left|\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+1\right| + C$ （16）式

例. 请计算 $\int \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$。

解： 由于本题含有根号，所以应该用方法 5 来做。本题所含根号的形式是 $\sqrt{x+1}$，这形式既不是 $\sqrt{a^2-x^2}$，也不是 $\sqrt{x^2-a^2}$，也不是 $\sqrt{a^2+x^2}$，属于情况 4，所以应该将整个根号换元为 t，即

设 $t = \sqrt{x+1}$，则 $\int \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$ 变为

$\int \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \int t\,\mathrm{d}x$ （1）式

接下来要把 $\mathrm{d}x$ 也换了。$\mathrm{d}x$ 怎么换？由于 $t = \sqrt{x+1}$，所以 $t^2 = x+1$，则 $t^2 - 1 = x$，因此 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}(t^2-1)$。

在讲方法 2 时给大家讲过 d 之后的内容可以挪到被积函数中，求导就可以了。由于 $(t^2-1)' = 2t$，所以 $\mathrm{d}(t^2-1) = 2t\,\mathrm{d}t$。

由于 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}(t^2-1)$，$\mathrm{d}(t^2-1) = 2t\,\mathrm{d}t$，所以 $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$。因此

$\int t\,\mathrm{d}x = \int t \times 2t\,\mathrm{d}t = \int 2t^2\,\mathrm{d}t$ （2）式

（1）式、（2）式相结合，得

$\int \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \int 2t^2\,\mathrm{d}t$ （3）式

到此为止，换元已经完成了。方法 5 只管到这里，接下来要继续做。

由方法 1 中所讲的公式（17）可得

$\int 2t^2\,\mathrm{d}t = 2\int t^2\,\mathrm{d}t$ （4）式

由方法 1 中所讲的公式（4）可得

$\int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + C$ （5）式

（4）式、（5）式相结合，得

$\int 2t^2\,\mathrm{d}t = 2(\frac{t^3}{3} + C) = \frac{2}{3}t^3 + 2C = \frac{2}{3}t^3 + C$ （6）式

（3）式、（6）式相结合，得

$\int \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}t^3 + C$ （7）式

这是最终的答案吗？不是。因为 t 是自己设的，得还原成 x 才行。由于 $t = \sqrt{x+1}$，所以本题最终的答案为

$\int \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 + C = \frac{2}{3} \times (x+1)^{\frac{3}{2}} + C$ （8）式

例. 请计算$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$。

解: 由于本题含有根号，所以应该用方法 5 来做。本题所含根号的形式是$\sqrt{e^x-1}$，这形式既不是$\sqrt{a^2-x^2}$，也不是$\sqrt{x^2-a^2}$，也不是$\sqrt{a^2+x^2}$，属于情况 4，所以应该将整个根号换元为t，即

设$t=\sqrt{e^x-1}$，则$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$变为

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=\int \frac{xe^x}{t}dx \qquad \text{（1）式}$$

大家注意，换元还没有完成。什么才叫换元完成了？不含字母x了才叫换元完成。所以，接下来要把x、e^x、dx也换了。由于$t=\sqrt{e^x-1}$，所以$t^2=e^x-1$，所以$t^2+1=e^x$，则$x=\ln(t^2+1)$，因此

$$\int \frac{xe^x}{t}dx=\int \frac{\ln(t^2+1)(t^2+1)}{t}dx \qquad \text{（2）式}$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=\int \frac{\ln(t^2+1)(t^2+1)}{t}dx \qquad \text{（3）式}$$

接下来把dx也换了。dx怎么换？由于$x=\ln(t^2+1)$，所以$dx=d[\ln(t^2+1)]$。

在讲方法 2 时给大家讲过 d 之后的内容可以挪到被积函数中，求导就可以了。由于$[\ln(t^2+1)]'=\frac{2t}{t^2+1}$，所以$d[\ln(t^2+1)]=\frac{2t}{t^2+1}dt$。

由于$dx=d[\ln(t^2+1)]$，$d[\ln(t^2+1)]=\frac{2t}{t^2+1}dt$，所以$dx=\frac{2t}{t^2+1}dt$。因此

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=\int \frac{\ln(t^2+1)(t^2+1)}{t}\times\frac{2t}{t^2+1}dt \qquad \text{（4）式}$$

（4）式可以化简为

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=2\int \ln(t^2+1)\,dt \qquad \text{（5）式}$$

到此为止，换元已经完成了。方法 5 只管到这里，接下来要继续做。

接下来就是要算$\int \ln(t^2+1)\ dt$，那么$\int \ln(t^2+1)\ dt$该如何算呢？大家注意

$$\int \ln(t^2+1)\ dt=\int \ln(t^2+1)\times 1\ dt=\int \ln(t^2+1)\times t^0\ dt \qquad \text{（6）式}$$

现在应该用之前讲的方法 3 来做。为什么呢？因为被积函数是$\ln(t^2+1)\times t^0$，是两项相乘的形式，并且这两项分别是对数函数和幂函数，是指数函数、三角函数、幂函数、对数函数、反三角函数这五类函数中的两类，所以本题应该用方法 3 来做。

第一步：将两项中的其中一项挪到 d 的后面。

对于本题而言，本题中有对数函数、幂函数。由于在口诀“指三幂对反”中，“幂”字位于“对”字的前面，哪个在前面就挪哪个，所以应该将幂函数t^0挪到 d 的后面。

怎么挪就不用再讲了，方法 2 中已经详细地讲过了。所以有

$$\int \ln(t^2+1)\times t^0\,dt=\int \ln(t^2+1)\,dt \qquad \text{（7）式}$$

第二步：使用分部积分公式$\int u\,dv=uv-\int v du$。

对于本题而言，那就是

$$\int \ln(t^2+1)\,dt=\ln(t^2+1)\times t-\int t\,d[\ln(t^2+1)] \qquad \text{（8）式}$$

方法 3 只管到这里，接下来要继续做。在讲方法 2 时给大家讲过 d 之后的内容可以挪到被积函数中，求导就可以了。所以

$$\int t\,d(\ln(t^2+1))=\int \frac{2t^2}{t^2+1}dt \qquad \text{（9）式}$$

（8）式、（9）式相结合，得

$\int \ln(t^2+1)\ \mathrm{d}t = \ln(t^2+1)\times t - \int \frac{2t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t$ （10）式

接下来要算一下 $\int \frac{2t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t$ 。

由方法 1 中的公式（17）可知

$\int \frac{2t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t$ （11）式

现在采用方法 4 算 $\int \frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t$ 。

$\int \frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\mathrm{d}t = \int \frac{t^2+1}{t^2+1}\mathrm{d}t - \int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$ （12）式

$\int \frac{t^2+1}{t^2+1}\mathrm{d}t = \int 1\mathrm{d}t$ （13）式

由方法 1 中的公式（3）可知

$\int 1\mathrm{d}t = t + C$ （14）式

由方法 1 中的公式（14）可知

$\int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t = \arctan t + C$ （15）式

将（14）式、（15）式代入（12）式，得

$\int \frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t = t - \arctan t + C$ （16）式

（11）式、（16）式相结合，得

$\int \frac{2t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t = 2t - 2\arctan t + C$ （17）式

（10）式、（17）式相结合，得

$\int \ln(t^2+1)\ \mathrm{d}t = \ln(t^2+1)\times t - 2t + 2\arctan t + C$ （18）式

（5）式、（18）式相结合，得

$\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x = 2t\ln(t^2+1) - 4t + 4\arctan t + C$ （19）式

这是最终的答案吗？不是。因为 t 是自己设的，得还原成 x 才行。由于 $t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$，所以本题最终的答案为

$\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x = 2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - 4\sqrt{\mathrm{e}^x-1} + 4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1} + C$ （20）式

例. 请计算 $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x$ 。

解： 由于本题含有根号，所以应该用方法 5 来做。本题所含根号的形式是 $\sqrt{x^2-1}$，这形式是 $\sqrt{x^2-a^2}$ ，属于情况 2，所以应该进行这样的换元： $x = a\sec t$ 。

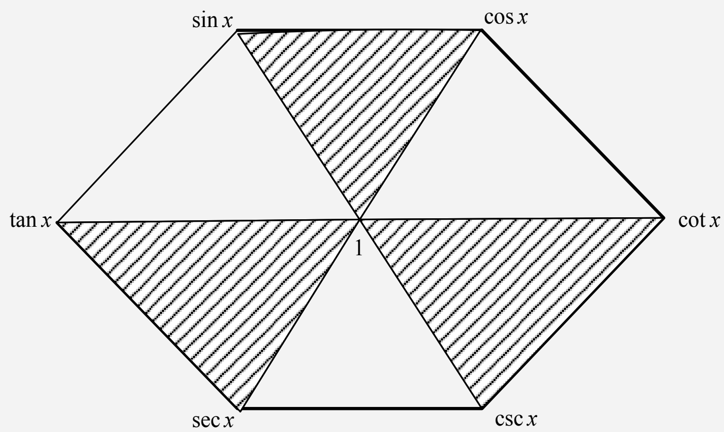
在本题中，由于 $a=1$，所以 $x = 1\times\sec t = \sec t$ 。这时，可能会有不少同学问：“ a 为什么不是 -1 ？”大家以后就记住， a 就当成正的。

由于 $x=\sec t$，所以 $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x$ 变为

$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{\sec^2 t-1}}{\sec^4 t}\mathrm{d}x$ （1）式

接下来要把 $\mathrm{d}x$ 也换了。由于 $x=\sec t$，所以 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sec t)$。

在讲方法 2 时给大家讲过 d 之后的内容可以挪到被积函数中，求导就可以了。可是有的同学不知道 $\sec t$ 的导数是什么？这其实也好办，大家还记得下面这个六边形吗？



由“从六边形推出的第二组公式中的公式（2）”可知，$\sec t=\dfrac{1}{\cos t}$，所以 $\mathrm{d}(\sec t)=\mathrm{d}(\dfrac{1}{\cos t})$。由于 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sec t)$，$\mathrm{d}(\sec t)=\mathrm{d}(\dfrac{1}{\cos t})$，所以 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\dfrac{1}{\cos t})$。由于 $(\dfrac{1}{\cos t})'=\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}$，所以 $\mathrm{d}(\dfrac{1}{\cos t})=\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$，则 $\mathrm{d}x=\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$。

将 $\mathrm{d}x=\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$ 代入（1）式，得

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{\sec^2 t-1}}{\sec^4 t}\times\frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t \qquad （2）式$$

到此为止，换元已经完成了。方法 5 只管到这里，接下来要继续做。

由“从六边形推出的第一组公式中的公式（2）”可知，$\sec^2 t-1=\tan^2 t$，所以

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{\tan^2 t}}{\sec^4 t}\times\frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t \qquad （3）式$$

由于 $\sqrt{\tan^2 t}=\tan t$，所以

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{\tan t}{\sec^4 t}\times\frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t \qquad （4）式$$

这时，可能会有同学问：“为什么 $\sqrt{\tan^2 t}=\tan t$？为什么不等于 $-\tan t$？”大家就记住，以后不管是情况几，根号开出来都当成正的。

由“从六边形推出的第二组公式中的公式（2）”可知，$\sec t\times\cos t=1$，所以（4）式可以化简为

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x=\int\tan t\times\sin t\times\cos^2 t\,\mathrm{d}t \qquad （5）式$$

由“从六边形推出的第三组公式中的公式（1）”可知，$\tan t=\dfrac{\sin t}{\cos t}$，所以（5）式可以变为

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x=\int\sin^2 t\times\cos t\,\mathrm{d}t \qquad （6）式$$

用方法 2 中的挪法，将 $\cos t$ 挪到 d 之后，即

$$\int\sin^2 t\times\cos t\,\mathrm{d}t=\int\sin^2 t\,\mathrm{d}(\sin t) \qquad （7）式$$

（6）式、（7）式相结合，得

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x=\int\sin^2 t\,\mathrm{d}(\sin t) \qquad （8）式$$

由方法 1 中的公式（4）可知

$$\int\sin^2 t\,\mathrm{d}(\sin t)=\frac{\sin^3 t}{3}+C \qquad （9）式$$

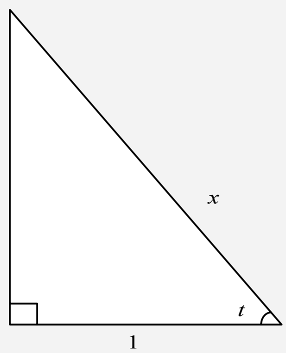
（8）式、（9）式相结合，得

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x=\frac{\sin^3 t}{3}+C \qquad （10）式$$

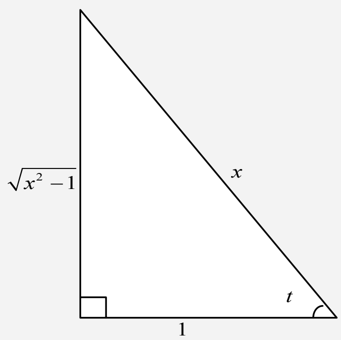
这是最终的答案吗？不是。因为 t 是自己设的，得还原成 x 才行。那么来看看究竟如何还原。本题中设的是 $x=\sec t$，现在要把最后答案里的 $\sin t$ 表示出来。这怎么表示？有的同学这样做：由于 $x=\sec t$，所以 $t=\operatorname{arcsec} x$，则 $\sin t=\sin(\operatorname{arcsec} x)$。这种做法错是没错，但是很可能不给分。那么，到底应该怎么表示 $\sin t$ 呢？很简单，就采用

画图法。具体做法如下。

由于 $x=\sec t$，所以 $\frac{x}{1}=\sec t$，我们知道，三角函数 sec 指的是斜边比邻边，所以有



由勾股定理可知



我们知道，三角函数 sin 指的是对边比斜边。由上图可知，角 t 的对边是 $\sqrt{x^2-1}$，斜边是 x，所以 $\sin t=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$。因此

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^3+C \qquad \text{（11）式}$$

本题就做完了。大家一定要注意一点，那就是：本题的（10）式是 $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x=\frac{\sin^3 t}{3}+C$，需要用 x 把 $\sin t$ 表示出来，所以才画的图。

例如，假设本题的（10）式是 $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x=\frac{\sec^3 t}{3}+C$，那还用画图吗？当然就不用了，因为设的是 $x=\sec t$，所以直接得出 $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+C$ 就可以了。

再例如，假设本题的（10）式是 $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x=\frac{\sec^3 t}{3}-2t+C$，那还用画图吗？当然也不用，因为设的是 $x=\sec t$，所以直接得出 $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-2\operatorname{arcsec}x+C$ 就可以了。

现在给大家总结一下：当用换元法做到最后一步需要将 t 用 x 表示时，只有当要表示的是其他三角函数时，才需要画图。

就拿本题来说，设的是 $x=\sec t$，对于 $x=\sec t$ 而言，sin、cos、tan、cot、csc 属于其他三角函数。因此，最后要表示的 $\sin t$ 属于其他三角函数，所以才要画图。

例. 请计算 $\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x\ (a>0)$。

解： 由于本题含有根号，所以应该用方法 5 来做。本题所含根号的形式是 $\sqrt{a^2+x^2}$，属于情况 3，所以应该进行这样的换元：$x=a\tan t$。

由于 $x = a\tan t$，所以 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x$ 变为

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{a^2+a^2\tan^2 t}}\mathrm{d}x \qquad (1)式$$

接下来要把 dx 也换了。由于 $x = a\tan t$，所以 dx=d(a tan$t$)。

在讲方法 2 时给大家讲过 d 之后的内容可以挪到被积函数中，求导就可以了。由于 $(a\tan t)' = \frac{a}{\cos^2 t}$，所以 $\mathrm{d}(a\tan t) = \frac{a}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$。

由于 dx=d(a tan$t$)，$\mathrm{d}(a\tan t) = \frac{a}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$，所以 $\mathrm{d}x = \frac{a}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$。

将 $\mathrm{d}x = \frac{a}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$ 代入（1）式，得

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{a^2+a^2\tan^2 t}} \times \frac{a}{\cos^2 t}\mathrm{d}t \qquad (2)式$$

到此为止，换元已经完成了。方法 5 只管到这里，接下来要继续做。

（2）式可以化简为

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{a^2(1+\tan^2 t)}} \times \frac{a}{\cos^2 t}\mathrm{d}t \qquad (3)式$$

由“从六边形推出的第一组公式中的公式（2）”可知，$1+\tan^2 t = \sec^2 t$，所以

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{a^2\sec^2 t}} \times \frac{a}{\cos^2 t}\mathrm{d}t \qquad (4)式$$

由于 $\sqrt{a^2\sec^2 t} = a\sec t$，所以

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a\sec t} \times \frac{a}{\cos^2 t}\mathrm{d}t \qquad (5)式$$

（5）式可以化简为

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sec t} \times \frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t \qquad (6)式$$

由“从六边形推出的第二组公式中的公式（2）”可知，$\sec t \times \cos t = 1$，所以（6）式可以化简为

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x = \int \sec t\,\mathrm{d}t \qquad (7)式$$

由方法 1 中的公式（10）可知

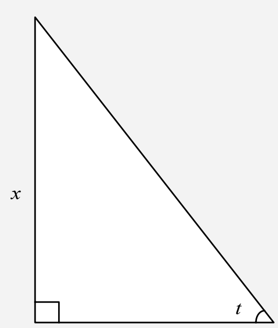
$$\int \sec t\,\mathrm{d}t = \ln|\sec t + \tan t| + C \qquad (8)式$$

（7）式、（8）式相结合，得

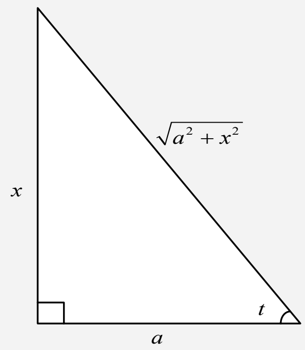
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x = \ln|\sec t + \tan t| + C \qquad (9)式$$

这是最终的答案吗？不是。因为 t 是自己设的，得还原成 x 才行。那么来看看究竟如何还原。本题中设的是 $x = a\tan t$，现在要把最后答案里的 tan$t$、sec$t$ 表示出来。用画图吗？肯定用。因为如果最后答案里只有 tan$t$，那么是不用画图的，可是最后答案里除了 tan$t$ 以外，还有 sec$t$，这属于其他三角函数，所以就得画图了。具体做法如下。

由于 $x = a\tan t$，所以 $\frac{x}{a} = \tan t$，我们知道，三角函数 tan$t$ 指的是对边比邻边，所以有



由勾股定理可知



我们知道，三角函数 sec 指的是斜边比邻边。由上图可知，斜边是 $\sqrt{a^2+x^2}$ ，角 t 的邻边是 a ，所以 $\sec t=\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$ 。因此

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C \qquad \text{（10）式}$$

方法 6. 万能公式法。

方法 6 的适用题型：被积函数只含常数和三角函数。

例. 请计算 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x+\tan x}\mathrm{d}x$ 。

例. 请计算 $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$ 。

例. 请计算 $\displaystyle\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x$ 。

以上三道题都可以用方法 6（万能公式法）来做，因为它们的被积函数只含常数和三角函数。

相信大家现在已经清楚了什么样的题可以用万能公式来做。那么万能公式是什么呢？接下来就要讲。

万能公式。

设 $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ 。

设 $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ 。

设 $\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$ 。

设 $\cot x=\dfrac{1-t^2}{2t}$ 。

设 $\sec x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ 。

设 $\csc x=\dfrac{1+t^2}{2t}$ 。

设 $\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$ 。

然后做完之后，把所有的 t 都换成 $\tan\dfrac{x}{2}$ 即可。

下面来看例题。

例. 请计算 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x+\tan x}\mathrm{d}x$ 。

解：由于被积函数只含常数和三角函数，所以本题可以用方法 6 来做。

设 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，设 $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$，设 $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则

$$\int\frac{1}{\sin x+\tan x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2t}{1-t^2}}\times\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad （1）式$$

$$\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2t}{1-t^2}}\times\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)(1-t^2)}+\frac{2t(1+t^2)}{(1+t^2)(1-t^2)}}\mathrm{d}t=\int\frac{1-t^2}{2t}\mathrm{d}t \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\int\frac{1}{\sin x+\tan x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1-\mathrm{t}^2}{2t}\mathrm{d}t \qquad （3）式$$

$$\int\frac{1-t^2}{2t}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{2t}\mathrm{d}t-\int\frac{t^2}{2t}\mathrm{d}t \qquad （4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\int\frac{1}{\sin x+\tan x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2t}\mathrm{d}t-\int\frac{t^2}{2t}\mathrm{d}t \qquad （5）式$$

先后使用方法 1 中的公式（17）和公式（5）可得

$$\int\frac{1}{2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(\ln|t|+C)=\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{1}{2}C=\frac{1}{2}\ln|t|+C \qquad （6）式$$

$$\int\frac{t^2}{2t}\mathrm{d}t=\int\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \qquad （7）式$$

先后使用方法 1 中的公式（17）和公式（4）可得

$$\int\frac{t}{2t}\mathrm{d}t=\frac{t^2}{4}+C \qquad （8）式$$

（7）式、（8）式相结合，得

$$\int\frac{t^2}{2t}\mathrm{d}t=\frac{t^2}{4}+C \qquad （9）式$$

将（6）式、（9）式代入（5）式，得

$$\int\frac{1}{\sin x+\tan x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{t^2}{4}+C \qquad （10）式$$

这是最终的答案吗？不是。因为 t 是自己设的，得还原成 x 才行。方法 6 中已经说得很明白了，把所有的 t 都换成 $\tan\frac{x}{2}$ 即可，所以本题最终的答案为

$$\int\frac{1}{\sin x+\tan x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{\tan^2\frac{x}{2}}{4}+C \qquad （11）式$$

例. 请计算 $\int\frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$。

解：由于被积函数只含常数和三角函数，所以本题可以用方法 6 来做。

设 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，设 $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则

$$\int\frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\times\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad （1）式$$

$$\int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\times\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1+t^2}{1+t^2+2t}\times\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int\frac{2}{(1+t)^2}\mathrm{d}t \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\int\frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2}{(1+t)^2}\mathrm{d}t \qquad （3）式$$

由方法 1 中的公式（17）可知

$$\int\frac{2}{(1+t)^2}\mathrm{d}t=2\int\frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t \qquad （4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\int\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x=2\int\frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t=2\int(1+t)^{-2}\mathrm{d}t \qquad （5）式$$

现在对$2\int(1+t)^{-2}\mathrm{d}t$使用方法 2 中的硬凑法，把 d 的后面硬凑成$t+1$，所以有

$$2\int(1+t)^{-2}\mathrm{d}t=2\int(1+t)^{-2}\mathrm{d}(t+1) \qquad （6）式$$

（5）式、（6）式相结合，得

$$\int\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x=2\int(1+t)^{-2}\mathrm{d}(t+1) \qquad （7）式$$

由方法 1 中的公式（4）可知

$$2\int(1+t)^{-2}\mathrm{d}(t+1)=-\frac{2}{1+t}+C \qquad （8）式$$

（7）式、（8）式相结合，得

$$\int\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x=-\frac{2}{1+t}+C \qquad （9）式$$

这是最终的答案吗？不是。因为t是自己设的，得还原成x才行。方法 6 中已经说得很明白了，把所有的t都换成$\tan\frac{x}{2}$即可，所以本题最终的答案为

$$\int\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C \qquad （10）式$$

例. 请计算$\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x$。

解： 由于被积函数只含常数和三角函数，所以本题可以用方法 6 来做。但是，如果一上来就用万能公式来做的话，计算量会比较大。可以先拆一下，即

$$\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{2}{2+\cos x}\mathrm{d}x-\int\frac{\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x \qquad （1）式$$

现在对$\int\frac{\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x$使用方法 2 中的挪法，把$\sin x$挪到 d 的后面，所以有

$$\int\frac{\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}(\cos x) \qquad （2）式$$

现在对$-\int\frac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}(\cos x)$使用方法 2 中的硬凑法，把 d 的后面硬凑成$\cos x+2$，所以有

$$-\int\frac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}(\cos x)=-\int\frac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}(\cos x+2) \qquad （3）式$$

（2）式、（3）式相结合，得

$$\int\frac{\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}(\cos x+2) \qquad （4）式$$

由方法 1 中的公式（5）可得

$$-\int\frac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}(\cos x+2)=-\ln|\cos x+2|+C \qquad （5）式$$

（4）式、（5）式相结合，得

$$\int\frac{\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x=-\ln|\cos x+2|+C \qquad （6）式$$

（1）式、（6）式相结合，得

$$\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{2}{2+\cos x}\mathrm{d}x+\ln|\cos x+2|+C \qquad （7）式$$

也就是说，接下来只要算出$\int\frac{2}{2+\cos x}\mathrm{d}x$就可以了，下面用万能公式来算。

设$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，设$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则

$$\int\frac{2}{2+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{2}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\times\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \qquad (8)\text{式}$$

$$\int\frac{2}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\times\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=4\int\frac{1}{\frac{2+2t^2+1-t^2}{1+t^2}}\times\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=4\int\frac{1}{3+t^2}\mathrm{d}t \qquad (9)\text{式}$$

（8）式、（9）式相结合，得

$$\int\frac{2}{2+\cos x}\mathrm{d}x=4\int\frac{1}{3+t^2}\mathrm{d}t \qquad (10)\text{式}$$

$$4\int\frac{1}{3+t^2}\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\int\frac{1}{1+\frac{t^2}{3}}\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\int\frac{1}{1+(\frac{t}{\sqrt{3}})^2}\mathrm{d}t \qquad (11)\text{式}$$

（10）式、（11）式相结合，得

$$\int\frac{2}{2+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\int\frac{1}{1+(\frac{t}{\sqrt{3}})^2}\mathrm{d}t \qquad (12)\text{式}$$

现在对$\frac{4}{3}\int\frac{1}{1+(\frac{t}{\sqrt{3}})^2}\mathrm{d}t$使用方法 2 中的硬凑法，把 d 的后面硬凑成$\frac{t}{\sqrt{3}}$，所以有

$$\frac{4}{3}\int\frac{1}{1+(\frac{t}{\sqrt{3}})^2}\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\int\sqrt{3}\times\frac{1}{1+(\frac{t}{\sqrt{3}})^2}\mathrm{d}(\frac{t}{\sqrt{3}}) \qquad (13)\text{式}$$

（12）式、（13）式相结合，得

$$\int\frac{2}{2+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\int\sqrt{3}\times\frac{1}{1+(\frac{t}{\sqrt{3}})^2}\mathrm{d}(\frac{t}{\sqrt{3}}) \qquad (14)\text{式}$$

由方法 1 中的公式（13）可得

$$\frac{4}{3}\int\sqrt{3}\times\frac{1}{1+(\frac{t}{\sqrt{3}})^2}\mathrm{d}(\frac{t}{\sqrt{3}})=\frac{4}{3}\sqrt{3}\int\frac{1}{1+(\frac{t}{\sqrt{3}})^2}\mathrm{d}(\frac{t}{\sqrt{3}}) \qquad (15)\text{式}$$

（14）式、（15）式相结合，得

$$\int\frac{2}{2+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\sqrt{3}\int\frac{1}{1+(\frac{t}{\sqrt{3}})^2}\mathrm{d}(\frac{t}{\sqrt{3}}) \qquad (16)\text{式}$$

由方法 1 中的公式（14）可得

$$\frac{4}{3}\sqrt{3}\int\frac{1}{1+(\frac{t}{\sqrt{3}})^2}\mathrm{d}(\frac{t}{\sqrt{3}})=\frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+C \qquad (17)\text{式}$$

（16）式、（17）式相结合，得

$$\int\frac{2}{2+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+C \qquad (18)\text{式}$$

（17）式、（18）式相结合，得

$$\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+\ln|\cos x+2|+C \qquad (19)\text{式}$$

这是最终的答案吗？不是。因为 t 是自己设的，得还原成 x 才行。方法 6 中已经说得很明白了，把所有的 t 都换成$\tan\frac{x}{2}$即可，所以本题最终的答案为

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+\ln\left|\cos x+2\right|+C \qquad \text{（20）式}$$

方法 7.

方法 7 的适用题型：不定积分的形式是$\int \frac{Dx+E}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$。

例. 请计算$\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x$。

例. 请计算$\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

以上两道题都应该用方法 7 来做，因为不定积分的形式是$\int \frac{Dx+E}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$。

相信大家现在已经清楚了什么样的题应该用方法 7 来做。那么方法 7 是什么呢？接下来就要讲。

方法 7 分为两步。

第一步：把被积函数变为$\int \frac{D}{2A}\times\frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x+\int \frac{E-\frac{DB}{2A}}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$。

第二步：分别计算$\int \frac{D}{2A}\times\frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$ **和** $\int \frac{E-\frac{DB}{2A}}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$ **（其中，**$\int \frac{D}{2A}\times\frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$ **的计算方法一定是先把常数**$\frac{D}{2A}$**放到积分号之外，然后用挪法，把分子** $2Ax+B$ **挪到 d 的后面，d 的后面肯定变成了分母，所以**$\int \frac{D}{2A}\times\frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$ **的计算结果肯定是**$\frac{D}{2A}\ln\left|\text{分母}\right|+C$**）。**

下面来看例题。

例. 请计算$\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x$。

解： 由于本题所给的不定积分的形式是$\int \frac{Dx+E}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$，所以本题应该用方法 7 来做。

第一步：把被积函数变为$\int \frac{D}{2A}\times\frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x+\int \frac{E-\frac{DB}{2A}}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$。

对于本题而言，$A=1$，$B=-6$，$C=13$，$D=1$，$E=5$，所以$2A=2$，$E-\frac{DB}{2A}=8$。

因此

$$\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{2}\times\frac{2x-6}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x+\int \frac{8}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x \qquad \text{（1）式}$$

第二步：分别计算$\int \frac{D}{2A}\times\frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$ **和** $\int \frac{E-\frac{DB}{2A}}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$。

对于本题而言，先来算$\int \frac{1}{2}\times\frac{2x-6}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x$。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2}\times\frac{2x-6}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-6x+13}\mathrm{d}(x^2-6x+13)\\&=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x+13\right|+C \qquad \text{（2）式}\end{aligned}$$

再来算$\int \frac{8}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x$。

$$\int\frac{8}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x=8\int\frac{1}{(x-3)^2+4}\mathrm{d}x=2\int\frac{1}{(\frac{x-3}{2})^2+1}\mathrm{d}x$$ （3）式

现在对 $2\int\frac{1}{(\frac{x-3}{2})^2+1}\mathrm{d}x$ 使用方法 2 中的硬凑法，把 d 的后面硬凑为 $\frac{x-3}{2}$，所以有

$$2\int\frac{1}{(\frac{x-3}{2})^2+1}\mathrm{d}x=4\int\frac{1}{(\frac{x-3}{2})^2+1}\mathrm{d}(\frac{x-3}{2})$$ （4）式

（3）式、（4）式相结合，有

$$\int\frac{8}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x=4\int\frac{1}{(\frac{x-3}{2})^2+1}\mathrm{d}(\frac{x-3}{2})$$ （5）式

由方法 1 中的公式（14）可得

$$4\int\frac{1}{(\frac{x-3}{2})^2+1}\mathrm{d}(\frac{x-3}{2})=4\arctan\frac{x-3}{2}+C$$ （6）式

（5）式、（6）式相结合，得

$$\int\frac{8}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x=4\arctan\frac{x-3}{2}+C$$ （7）式

将（2）式、（7）式代入（1）式，可得

$$\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x+13\right|+4\arctan\frac{x-3}{2}+C$$ （8）式

例. 请计算 $\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

解： 由于本题所给的不定积分的形式是 $\int\frac{Dx+E}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$，所以本题应该用方法 7 来做。

第一步：把被积函数变为 $\int\frac{D}{2A}\times\frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x+\int\frac{E-\frac{DB}{2A}}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$。

对于本题而言，$A=1$，$B=0$，$C=1$，$D=1$，$E=0$，所以 $2A=2$，$E-\frac{DB}{2A}=0$。

因此

$$\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}\times\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$ （1）式

第二步：分别计算 $\int\frac{D}{2A}\times\frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$ **和** $\int\frac{E-\frac{DB}{2A}}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$。

对于本题而言，只需计算 $\int\frac{1}{2}\times\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 即可。

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{2}\times\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(x^2+1)\\&=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C\end{aligned}$$ （2）式

（1）式、（2）式相结合，得

$$\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C$$ （3）式

方法 8.

方法 **8** 的适用题型：不定积分的形式是 $\int \frac{C\sin x + D\cos x}{A\sin x + B\cos x}\mathrm{d}x$。

例. 请计算 $\int \frac{3\sin x + 4\cos x}{\sin x + 2\cos x}\mathrm{d}x$。

例. 请计算 $\int \frac{7\sin x + 8\cos x}{5\sin x + 6\cos x}\mathrm{d}x$。

以上两道题都应该用方法 8 来做，因为不定积分的形式是 $\int \frac{C\sin x + D\cos x}{A\sin x + B\cos x}\mathrm{d}x$。

相信大家现在已经清楚了什么样的题应该用方法 8 来做。那么方法 8 是什么呢？接下来就要讲。

方法 8 分为三步。

第一步：将 $\frac{C\sin x + D\cos x}{A\sin x + B\cos x}$ **写为** $\frac{C\sin x + D\cos x}{A\sin x + B\cos x} = \frac{h(A\cos x - B\sin x)}{A\sin x + B\cos x} + \frac{k(A\sin x + B\cos x)}{A\sin x + B\cos x}$**，然后解出** h **和** k**。**

第二步：将 $\int \frac{C\sin x + D\cos x}{A\sin x + B\cos x}\mathrm{d}x$ **写为** $\int \frac{C\sin x + D\cos x}{A\sin x + B\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{h(A\cos x - B\sin x)}{A\sin x + B\cos x}\mathrm{d}x + \int \frac{k(A\sin x + B\cos x)}{A\sin x + B\cos x}\mathrm{d}x$**。**

第三步：分别计算 $\int \frac{h(A\cos x - B\sin x)}{A\sin x + B\cos x}\mathrm{d}x$ **和** $\int \frac{k(A\sin x + B\cos x)}{A\sin x + B\cos x}\mathrm{d}x$**。[** $\int \frac{k(A\sin x + B\cos x)}{A\sin x + B\cos x}\mathrm{d}x$ **的计算结果一定是** $kx + C$**；** $\int \frac{h(A\cos x - B\sin x)}{A\sin x + B\cos x}\mathrm{d}x$ **的计算方法一定是先把** h **放到积分号之外，然后把分子** $A\cos x - B\sin x$ **挪到 d 的后面，d 的后面肯定变成了分母，所以** $\int \frac{h(A\cos x - B\sin x)}{A\sin x + B\cos x}\mathrm{d}x$ **的计算结果一定是** $h\ln|A\sin x + B\cos x| + C$ **]。**

下面来看例题。

例. 请计算 $\int \frac{3\sin x + 4\cos x}{\sin x + 2\cos x}\mathrm{d}x$。

解： 由于本题所给的不定积分的形式是 $\int \frac{C\sin x + D\cos x}{A\sin x + B\cos x}\mathrm{d}x$，所以本题应该用方法 8 来做。

第一步：将 $\frac{C\sin x + D\cos x}{A\sin x + B\cos x}$ **写为** $\frac{C\sin x + D\cos x}{A\sin x + B\cos x} = \frac{h(A\cos x - B\sin x)}{A\sin x + B\cos x} + \frac{k(A\sin x + B\cos x)}{A\sin x + B\cos x}$ **，然后解出** h **和** k**。**

对于本题而言

$$\frac{3\sin x + 4\cos x}{\sin x + 2\cos x} = \frac{h(\cos x - 2\sin x)}{\sin x + 2\cos x} + \frac{k(\sin x + 2\cos x)}{\sin x + 2\cos x} \qquad （1）式$$

接下来要解出 h 和 k。

将（1）式的等号右侧合并成一个分数，得

$$\frac{3\sin x + 4\cos x}{\sin x + 2\cos x} = \frac{h(\cos x - 2\sin x) + k(\sin x + 2\cos x)}{\sin x + 2\cos x} \qquad （2）式$$

（2）式等号左右两侧的分母一样，所以分子肯定一样，则

$$3\sin x + 4\cos x = h(\cos x - 2\sin x) + k(\sin x + 2\cos x) \qquad （3）式$$

即有

$$\begin{cases} h + 2k = 4 \\ -2h + k = 3 \end{cases} \qquad （4）式$$

解得 $h = -\frac{2}{5}$， $k = \frac{11}{5}$。

所以

$$\frac{3\sin x + 4\cos x}{\sin x + 2\cos x} = \frac{-\frac{2}{5}(\cos x - 2\sin x)}{\sin x + 2\cos x} + \frac{\frac{11}{5}(\sin x + 2\cos x)}{\sin x + 2\cos x} \qquad （5）式$$

第二步：将 $\int \frac{C\sin x + D\cos x}{A\sin x + B\cos x}\mathrm{d}x$ **写为** $\int \frac{C\sin x + D\cos x}{A\sin x + B\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{h(A\cos x - B\sin x)}{A\sin x + B\cos x}\mathrm{d}x + \int \frac{k(A\sin x + B\cos x)}{A\sin x + B\cos x}\mathrm{d}x$。

对于本题而言

$$\int\frac{3\sin x+4\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{-\frac{2}{5}(\cos x-2\sin x)}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x+\int\frac{\frac{11}{5}(\sin x+2\cos x)}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x \qquad \text{（6）式}$$

第三步：分别计算 $\int\frac{h(A\cos x-B\sin x)}{A\sin x+B\cos x}\mathrm{d}x$ **和** $\int\frac{k(A\sin x+B\cos x)}{A\sin x+B\cos x}\mathrm{d}x$ 。

先来算 $\int\frac{\frac{11}{5}(\sin x+2\cos x)}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x$ 。

$$\int\frac{\frac{11}{5}(\sin x+2\cos x)}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x=\frac{11}{5}x+C \qquad \text{（7）式}$$

再来算 $\int\frac{-\frac{2}{5}(\cos x-2\sin x)}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x$ 。

$$\begin{aligned}\int\frac{-\frac{2}{5}(\cos x-2\sin x)}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x&=-\frac{2}{5}\int\frac{(\cos x-2\sin x)}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x\\&=-\frac{2}{5}\int\frac{1}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}(\sin x+2\cos x)\\&=-\frac{2}{5}\ln\left|\sin x+2\cos x\right|+C \qquad \text{（8）式}\end{aligned}$$

将（7）式、（8）式代入（6）式，可得

$$\int\frac{3\sin x+4\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x=\frac{11}{5}x-\frac{2}{5}\ln\left|\sin x+2\cos x\right|+C \qquad \text{（9）式}$$

例. 请计算 $\int\frac{7\sin x+8\cos x}{5\sin x+6\cos x}\mathrm{d}x$ 。

解： 由于本题所给的不定积分的形式是 $\int\frac{C\sin x+D\cos x}{A\sin x+B\cos x}\mathrm{d}x$ ，所以本题应该用方法 8 来做。

第一步：将 $\frac{C\sin x+D\cos x}{A\sin x+B\cos x}$ **写为** $\frac{C\sin x+D\cos x}{A\sin x+B\cos x}=\frac{h(A\cos x-B\sin x)}{A\sin x+B\cos x}+\frac{k(A\sin x+B\cos x)}{A\sin x+B\cos x}$ **，然后解出** h **和** k **。**

对于本题而言

$$\frac{7\sin x+8\cos x}{5\sin x+6\cos x}=\frac{h(5\cos x-6\sin x)}{5\sin x+6\cos x}+\frac{k(5\sin x+6\cos x)}{5\sin x+6\cos x} \qquad \text{（1）式}$$

接下来要解出 h 和 k 。

将（1）式的等号右侧合并成一个分数，得

$$\frac{7\sin x+8\cos x}{5\sin x+6\cos x}=\frac{h(5\cos x-6\sin x)+k(5\sin x+6\cos x)}{5\sin x+6\cos x} \qquad \text{（2）式}$$

（2）式等号左右两侧的分母一样，所以分子肯定一样，则

$$7\sin x+8\cos x=h(5\cos x-6\sin x)+k(5\sin x+6\cos x) \qquad \text{（3）式}$$

即有

$$\begin{cases}5h+6k=8\\-6h+5k=7\end{cases} \qquad \text{（4）式}$$

解得 $h=-\frac{2}{61}$， $k=\frac{83}{61}$ 。

所以

$$\frac{7\sin x+8\cos x}{5\sin x+6\cos x}=\frac{-\frac{2}{61}(5\cos x-6\sin x)}{5\sin x+6\cos x}+\frac{\frac{83}{61}(5\cos x+6\sin x)}{5\sin x+6\cos x} \qquad \text{（5）式}$$

第二步：将 $\int\frac{C\sin x+D\cos x}{A\sin x+B\cos x}\mathrm{d}x$ **写为** $\int\frac{C\sin x+D\cos x}{A\sin x+B\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{h(A\cos x-B\sin x)}{A\sin x+B\cos x}\mathrm{d}x+\int\frac{k(A\sin x+B\cos x)}{A\sin x+B\cos x}\mathrm{d}x$ 。

对于本题而言

$$\int\frac{7\sin x+8\cos x}{5\sin x+6\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{-\frac{2}{61}(5\cos x-6\sin x)}{5\sin x+6\cos x}\mathrm{d}x+\int\frac{\frac{83}{61}(5\sin x+6\cos x)}{5\sin x+6\cos x}\mathrm{d}x \quad （6）式$$

第三步：分别计算$\int\frac{h(A\cos x-B\sin x)}{A\sin x+B\cos x}\mathrm{d}x$和$\int\frac{k(A\sin x+B\cos x)}{A\sin x+B\cos x}\mathrm{d}x$。

先来算$\int\frac{\frac{83}{61}(5\sin x+6\cos x)}{5\sin x+6\cos x}\mathrm{d}x$。

$$\int\frac{\frac{83}{61}(5\sin x+6\cos x)}{5\sin x+6\cos x}\mathrm{d}x=\frac{83}{61}x+C \quad （7）式$$

再来算$\int\frac{-\frac{2}{61}(5\cos x-6\sin x)}{5\sin x+6\cos x}\mathrm{d}x$。

$$\begin{aligned}\int\frac{-\frac{2}{61}(5\cos x-6\sin x)}{5\sin x+6\cos x}\mathrm{d}x&=-\frac{2}{61}\int\frac{(5\cos x-6\sin x)}{5\sin x+6\cos x}\mathrm{d}x\\&=-\frac{2}{61}\int\frac{1}{5\sin x+6\cos x}\mathrm{d}(5\sin x+6\cos x)\\&=-\frac{2}{61}\ln\left|5\sin x+6\cos x\right|+C \quad （8）式\end{aligned}$$

将（7）式、（8）式代入（6）式，可得

$$\int\frac{7\sin x+8\cos x}{5\sin x+6\cos x}\mathrm{d}x==\frac{83}{61}x-\frac{2}{61}\ln\left|5\sin x+6\cos x\right|+C \quad （9）式$$

方法 9.

方法 9 的适用题型：

不定积分的形式是$\int\frac{分子要保证使这个分数是真分数}{(Ax+B)^m}\mathrm{d}x$或$\int\frac{分子要保证使这个分数是真分数}{(Cx^2+Dx+E\ )^n}\mathrm{d}x$或$\int\frac{分子要保证使这个分数是真分数}{(Ax+B)^m(Cx^2+Dx+E\ )^n}\mathrm{d}x$。

例. 请计算$\int\frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x$。

例. 请计算$\int\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x$。

以上两道题都应该用方法 9 来做，为什么呢？

先来看第一道题。首先本题的被积函数是一个真分数（因为分子的最高次是 0 次，而分母的最高次为 3 次，也就是说，分子的最高次小于分母的最高次，所以它是真分数），并且本题的被积函数的分母可以整理为$x(x^2-2x+1)$，这是$(Ax+B)^m(Cx^2+Dx+E\ )^n$的形式（其中，$A=1$，$B=0$，$m=1$，$C=1$，$D=-2$，$E=1$，$n=1$），所以本题应该用方法 9 来做。再来看第二道题。首先本题的被积函数是一个真分数（因为分子的最高次是 0 次，而分母的最高次为 3 次，也就是说，分子的最高次小于分母的最高次，所以它是真分数），并且本题的被积函数的分母是$(1+2x)(1+x^2)$，这是$(Ax+B)^m(Cx^2+Dx+E\ )^n$的形式（其中，$A=2$，$B=1$，$m=1$，$C=1$，$D=0$，$E=1$，$n=1$），所以本题应该用方法 9 来做。

相信大家现在已经清楚了什么样的题应该用方法 9 来做，那么方法 9 到底怎么用呢？接下来就要讲。

方法 9 的使用。

情况 1：如果不定积分的形式是$\int\frac{分子要保证使这个分数是真分数}{(Ax+B)^m}\mathrm{d}x$**，那么就设**$\frac{分子要保证使这个分数是真分数}{(Ax+B)^m}$

$$=\frac{A_1}{Ax+B}+\frac{A_2}{(Ax+B)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(Ax+B)^m}$$

其中，A_1、A_2、…、A_m 为常数，然后解出 A_1、A_2、…、A_m；接着，把 $\int \frac{\text{分子要保证使这个分数是真分数}}{(Ax+B)^m}\mathrm{d}x$ 拆为 $\int \frac{\text{分子要保证使这个分数是真分数}}{(Ax+B)^m}\mathrm{d}x = \int \frac{A_1}{(Ax+B)}\mathrm{d}x + \int \frac{A_2}{(Ax+B)^2}\mathrm{d}x + \cdots + \int \frac{A_m}{(Ax+B)^m}\mathrm{d}x$

最后，计算出这 m 个不定积分再相加就可以了。

情况 2：如果不定积分的形式是 $\int \frac{\text{分子要保证使这个分数是真分数}}{(Cx^2+Dx+E)^n}\mathrm{d}x$，那么就设 $\frac{\text{分子要保证使这个分数是真分数}}{(Cx^2+Dx+E)^n}$ $= \frac{B_1x+C_1}{Cx^2+Dx+E} + \frac{B_2x+C_2}{(Cx^2+Dx+E)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(Cx^2+Dx+E)^n}$

其中，B_1、B_2、…、B_n、C_1、C_2、…、C_n 为常数，然后解出 B_1、B_2、…、B_n、C_1、C_2、…、C_n；接着，把 $\int \frac{\text{分子要保证使这个分数是真分数}}{(Cx^2+Dx+E)^n}\mathrm{d}x$ 拆为

$$\frac{\text{分子要保证使这个分数是真分数}}{(Cx^2+Dx+E)^n}\mathrm{d}x = \int \frac{B_1x+C_1}{Cx^2+Dx+E}\mathrm{d}x + \int \frac{B_2x+C_2}{(Cx^2+Dx+E)^2}\mathrm{d}x + \cdots + \int \frac{B_nx+C_n}{(Cx^2+Dx+E)^n}\mathrm{d}x$$

最后，计算出这 n 个不定积分再相加就可以了。

情况 3：如果不定积分的形式是 $\int \frac{\text{分子要保证使这个分数是真分数}}{(Ax+B)^m(Cx^2+Dx+E)^n}\mathrm{d}x$，那么就设 $\int \frac{\text{分子要保证使这个分数是真分数}}{(Ax+B)^m(Cx^2+Dx+E)^n}\mathrm{d}x$ $= \frac{A_1}{Ax+B} + \frac{A_2}{(Ax+B)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(Ax+B)^m} + \frac{B_1x+C_1}{Cx^2+Dx+E} + \frac{B_2x+C_2}{(Cx^2+Dx+E)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(Cx^2+Dx+E)^n}$

其中，A_1、A_2、…、A_m、B_1、B_2、…、B_n、C_1、C_2、…、C_n 为常数，然后解出 A_1、A_2、…、A_m、B_1、B_2、…、B_n、C_1、C_2、…、C_n；接着，把 $\int \frac{\text{分子要保证使这个分数是真分数}}{(Ax+B)^m(Cx^2+Dx+E)^n}\mathrm{d}x$ 拆为

$$\int \frac{\text{分子要保证使这个分数是真分数}}{(Ax+B)^m(Cx^2+Dx+E)^n}\mathrm{d}x = \int \frac{A_1}{(Ax+B)}\mathrm{d}x + \int \frac{A_2}{(Ax+B)^2}\mathrm{d}x + \cdots$$
$$+ \int \frac{A_m}{(Ax+B)^m}\mathrm{d}x + \int \frac{B_1x+C_1}{(Cx^2+Dx+E)}\mathrm{d}x +$$
$$\int \frac{B_2x+C_2}{(Cx^2+Dx+E)^2}\mathrm{d}x + \cdots + \int \frac{B_nx+C_n}{(Cx^2+Dx+E)}\mathrm{d}x$$

最后，计算出这 n 个不定积分再相加就可以了。

下面来看例题。

例. 请计算 $\int \frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x$。

解： 根据前面的内容可知，本题应该用方法 9 来做，并且很明显本题属于情况 3。

对于本题而言，就是设

$$\frac{1}{x(x^2-2x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{B_1x+C_1}{x^2-2x+1} \qquad \text{（1）式}$$

接下来要算出 A_1、B_1、C_1。

$$\frac{A_1}{x} + \frac{B_1x+C_1}{x^2-2x+1} = \frac{A_1(x^2-2x+1)}{x(x^2-2x+1)} + \frac{x(B_1x+C_1)}{x(x^2-2x+1)} = \frac{A_1(x^2-2x+1)+x(B_1x+C_1)}{x(x^2-2x+1)} \qquad \text{（2）式}$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\frac{1}{x(x^2-2x+1)} = \frac{A_1(x^2-2x+1)+x(B_1x+C_1)}{x(x^2-2x+1)} \qquad \text{（3）式}$$

由于分母相等，所以分子肯定也相等，则

$$A_1(x^2-2x+1)+x(B_1x+C_1)=1 \qquad \text{（4）式}$$

（4）式可以整理为

$$A_1x^2-2A_1x+A_1+B_1x^2+C_1x=1 \qquad \text{（5）式}$$

（5）式可以整理为

$$(A_1+B_1)x^2+(C_1-2A_1)x+A_1=1 \qquad \text{（6）式}$$

由（6）式可得

$$\begin{cases} A_1+B_1=0 \\ C_1-2A_1=0 \\ A_1=1 \end{cases} \quad （7）式$$

解得$\begin{cases} A_1=1 \\ B_1=-1 \\ C_1=2 \end{cases}$

将$\begin{cases} A_1=1 \\ B_1=-1 \\ C_1=2 \end{cases}$代入（1）式，得

$$\frac{1}{x(x^2-2x+1)}=\frac{1}{x}+\frac{-x+2}{x^2-2x+1} \quad （8）式$$

所以

$$\int\frac{1}{x(x^2-2x+1)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int\frac{-x+2}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x \quad （9）式$$

现在的任务就是计算$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$和$\int\frac{-x+2}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x$。

先来算$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$。

由方法 1 中的公式（5）可得

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C \quad （10）式$$

再来算$\int\frac{-x+2}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x$。

由于$\int\frac{-x+2}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x$的形式属于$\int\frac{Dx+E}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$，所以应该用方法 7 来计算$\int\frac{-x+2}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x$。

第一步：把被积函数变为$\int\frac{D}{2A}\times\frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x+\int\frac{E-\frac{DB}{2A}}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$。

对于本题而言

$$\int\frac{-x+2}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x=\int-\frac{1}{2}\times\frac{2x-2}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x \quad （11）式$$

第二步：分别计算$\int\frac{D}{2A}\times\frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$**和**$\int\frac{E-\frac{DB}{2A}}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$。

对于本题而言，先来算$\int-\frac{1}{2}\times\frac{2x-2}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x$。

$$\begin{aligned}\int-\frac{1}{2}\times\frac{2x-2}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\times\int\frac{2x-2}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\times\int\frac{1}{x^2-2x+1}\mathrm{d}(x^2-2x+1)\\&=-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+1\right|+C\end{aligned} \quad （12）式$$

再来算$\int\frac{1}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x$。

$$\int\frac{1}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x \quad （13）式$$

由方法 2 中的硬凑法可得

$$\int\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}(x-1) \quad （14）式$$

由方法 1 中的公式（4）可得

$$\int\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}(x-1)=-\frac{1}{x-1}+C \qquad \text{（15）式}$$

（13）式、（15）式相结合，得

$$\int\frac{1}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x-1}+C \qquad \text{（16）式}$$

将（12）式、（16）式代入（11）式，得

$$\int\frac{-x+2}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+1\right|-\frac{1}{x-1}+C \qquad \text{（17）式}$$

将（10）式、（17）式代入（9）式，得

$$\int\frac{1}{x(x^2-2x+1)}\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+1\right|-\frac{1}{x-1}+C \qquad \text{（18）式}$$

例. 请计算 $\int\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x$。

解： 根据前面的内容可知，本题应该用方法 9 来做，并且很明显本题属于情况 3。

对于本题而言，就是设

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A_1}{1+2x}+\frac{B_1x+C_1}{1+x^2} \qquad \text{（1）式}$$

接下来要算出 A_1、B_1、C_1。

$$\frac{A_1}{1+2x}+\frac{B_1x+C_1}{1+x^2}=\frac{A_1(1+x^2)}{(1+2x)(1+x^2)}+\frac{(1+2x)(B_1x+C_1)}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A_1(1+x^2)+(1+2x)(B_1x+C_1)}{(1+2x)(1+x^2)} \qquad \text{（2）式}$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A_1(1+x^2)+(1+2x)(B_1x+C_1)}{(1+2x)(1+x^2)} \qquad \text{（3）式}$$

由于分母相等，所以分子肯定也相等，则

$$A_1(1+x^2)+(1+2x)(B_1x+C_1)=1 \qquad \text{（4）式}$$

（4）式可以整理为

$$A_1+A_1x^2+B_1x+C_1+2B_1x^2+2C_1x=1 \qquad \text{（5）式}$$

（5）式可以整理为

$$(A_1+C_1)+(A_1+2B_1)x^2+(B_1+2C_1)x=1 \qquad \text{（6）式}$$

由（6）式可得

$$\begin{cases}A_1+C_1=1\\A_1+2B_1=0\\B_1+2C_1=0\end{cases} \qquad \text{（7）式}$$

解得 $\begin{cases}A_1=\frac{4}{5}\\B_1=-\frac{2}{5}\\C_1=\frac{1}{5}\end{cases}$

将 $\begin{cases}A_1=\frac{4}{5}\\B_1=-\frac{2}{5}\\C_1=\frac{1}{5}\end{cases}$ 代入（1）式，得

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}+\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2} \qquad \text{（8）式}$$

所以

$$\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int \frac{\frac{4}{5}}{1+2x}\mathrm{d}x+\int \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x \qquad \text{（9）式}$$

现在的任务就是计算$\int \frac{\frac{4}{5}}{1+2x}\mathrm{d}x$和$\int \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

先来算$\int \frac{\frac{4}{5}}{1+2x}\mathrm{d}x$。

由方法 1 中的公式（17）可得

$$\int \frac{\frac{4}{5}}{1+2x}\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\int \frac{1}{1+2x}\mathrm{d}x \qquad \text{（10）式}$$

现在对$\frac{4}{5}\int \frac{1}{1+2x}\mathrm{d}x$使用方法 2 中的硬凑法，把 d 的后面凑成$2x+1$，所以有

$$\frac{4}{5}\int \frac{1}{1+2x}\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\int \frac{1}{1+2x}\mathrm{d}(1+2x) \qquad \text{（11）式}$$

（10）式、（11）式相结合，得

$$\int \frac{\frac{4}{5}}{1+2x}\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\int \frac{1}{1+2x}\mathrm{d}(1+2x) \qquad \text{（12）式}$$

由方法 1 中的公式（5）可得

$$\frac{2}{5}\int \frac{1}{1+2x}\mathrm{d}(1+2x)=\frac{2}{5}\ln|1+2x|+C \qquad \text{（13）式}$$

（12）式、（13）式相结合，得

$$\int \frac{\frac{4}{5}}{1+2x}\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\ln|1+2x|+C \qquad \text{（14）式}$$

再来算$\int \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

由于$\int \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x$的形式属于$\int \frac{Dx+E}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$，所以应该用方法 7 来计算$\int \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

第一步：把被积函数变为$\int \frac{D}{2A}\times\frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x+\int \frac{E-\frac{DB}{2A}}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$。

对于本题而言

$$\int \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int -\frac{1}{5}\times\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int \frac{\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x \qquad \text{（15）式}$$

第二步：分别计算$\int \frac{D}{2A}\times\frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$和$\int \frac{E-\frac{DB}{2A}}{Ax^2+Bx+C}\mathrm{d}x$。

对于本题而言，先来算$\int -\frac{1}{5}\times\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

$$\begin{aligned}\int -\frac{1}{5}\times\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x&=-\frac{1}{5}\times\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{5}\times\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)\\&=-\frac{1}{5}\ln|1+x^2|+C \qquad \text{（16）式}\end{aligned}$$

再来算$\int \frac{\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

由方法 1 中的公式（17）可得

$$\int \frac{\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \quad \text{（17）式}$$

由方法 1 中的公式（14）可得

$$\frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\arctan x + C \quad \text{（18）式}$$

（17）式、（18）式相结合，得

$$\int \frac{\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\arctan x + C \quad \text{（19）式}$$

将（16）式、（19）式代入（15）式，得

$$\int \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\ln\left|1+x^2\right| + \frac{1}{5}\arctan x + C \quad \text{（20）式}$$

将（14）式、（20）式代入（9）式，得

$$\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln\left|1+x^2\right| + \frac{1}{5}\arctan x + C \quad \text{（21）式}$$

4.4.2 定积分的计算方法

本小节讲定积分的计算方法。如果不定积分的计算方法大家掌握得非常好了的话，那么定积分的计算方法对大家来说就很简单了。

不过在正式讲定积分的计算方法之前，要先问一下大家，你们还记得定积分长什么样吗？下面带大家复习一下吧。

大家记住，以后一旦看见符号“$\int_{\square}^{\square}\ \mathrm{d}x$”，那么要么是定积分，要么是反常积分。

大家发现了吧，其实定积分和反常积分与不定积分的区别仅仅在于$\int$的右上角和右下角写没写东西。没写就是不定积分，写了就是定积分或者反常积分。

对于某个“$\int_{\square}^{\square} f(x)\,\mathrm{d}x$”来说，如果是以下两种情况之一，那么它就是反常积分；否则，它就是定积分。

情况 1：两个方框中的其中一个方框中是∞，或者两个方框中都是∞。

情况 2：两个方框中都是常数，$f(x)$在这两个方框所组成的闭区间中存在没有定义的点，并且$\lim\limits_{x\to\text{此点}} f(x)=\infty$。

以上框中的东西都是之前讲过的，现在不过是帮大家复习了一下而已。通过以上的复习，大家应该已经想起来定积分长什么样了。

那么现在就要给大家讲定积分的计算方法了。

定积分的计算方法是：先计算定积分对应的不定积分，但是到了最后一步（也就是消去积分号“$\int$”加C的那一步），不加C了，而是在右侧加一条竖线，竖线的右上角写上限，竖线的右下角写下限，然后用代入上限后的值减去代入下限后的值即可。

下面来看例题。

例. 请计算定积分$\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$。

解： $\int_1^2 x^2\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{7}{3}$。

例. 请计算定积分$\int_1^2 \cos x\mathrm{d}x$。

解： $\int_1^2 \cos x\mathrm{d}x = \sin x\Big|_1^2 = \sin 2-\sin 1$。

例. 请计算定积分$\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$。

解： $\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln|2|-\ln|1| = \ln|2|-0=\ln|2|=\ln 2$。

例. 请计算定积分 $\int_1^2 \sin x \times \cos x \, dx$ 。

解： $\int_1^2 \sin x \times \cos x \, dx = \int_1^2 \sin x \, d(\sin x) = \left.\frac{\sin^2 x}{2}\right|_1^2 = \frac{\sin^2 2}{2} - \frac{\sin^2 1}{2}$ 。

例. 请计算定积分 $\int_1^2 \cot x - \frac{1}{1+x^2} + 2e^{2x} dx$ 。

解：
$$\begin{aligned}\int_1^2 \cot x - \frac{1}{1+x^2} + 2e^{2x} dx &= \int_1^2 \cot x dx - \int_1^2 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_1^2 2e^{2x} dx \\ &= \ln|\sin x|\Big|_1^2 - \arctan x\Big|_1^2 + e^{2x}\Big|_1^2 \\ &= \ln|\sin 2| - \ln|\sin 1| - (\arctan 2 - \arctan 1) + e^4 - e^2 \\ &= \ln|\sin 2| - \ln|\sin 1| - \arctan 2 + \frac{\pi}{4} + e^4 - e^2\end{aligned}$$

如果大家认为定积分的计算方法已经讲完了的话，那么可就大错特错了，因为还有三点需要注意的地方没有讲。

第一点需要注意的地方：当计算定积分对应的不定积分时，如果用到了方法 3（分部积分法）的话，那么用分部积分公式 $\int u dv = uv - \int v du$ 分解出的 uv 也要写为 $uv\Big|_{\text{下限}}^{\text{上限}}$ 。

例. 请计算定积分 $\int_2^3 (x \times \cos x) dx$ 。

解： 采用方法 3 来做本题。

$$\begin{aligned}&\int_2^3 (x \times \cos x) dx \\ &= \int_2^3 x d(\sin x) dx \\ &= (\sin x \times x)\Big|_2^3 - \int_2^3 \sin x dx \\ &= (\sin x \times x)\Big|_2^3 - (-\cos x)\Big|_2^3 \\ &= 3\sin 3 - 2\sin 2 - [-\cos 3 - (-\cos 2)] \\ &= 3\sin 3 - 2\sin 2 + \cos 3 - \cos 2\end{aligned}$$

$\sin x \times x$ 虽然不是消去积分号“$\int$”时得出的（而是用分部积分公式得出来的），但是也要写为 $(\sin x \times x)\Big|_2^3$ 。

例. 请计算定积分 $\int_1^2 (x \times \ln x) dx$。

解： 采用方法 3 来做本题。

$$\begin{aligned}&\int_1^2 (x \times \ln x) dx \\ &= \int_1^2 \ln x d(\frac{x^2}{2}) \\ &= (\ln x \times (\frac{x^2}{2})\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} d(\ln x) \\ &= \ln 2 \times (\frac{2^2}{2}) - \ln 1 \times (\frac{1^2}{2}) - \int_1^2 \frac{x^2}{2} d(\ln x) \\ &= 2\ln 2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} d(\ln x) \\ &= 2\ln 2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} dx \\ &= 2\ln 2 - \int_1^2 \frac{x}{2} dx \\ &= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x dx\end{aligned}$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2} \times (\frac{x^2}{2})\Big|_1^2$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2} \times (2 - \frac{1}{2})$$

$$= 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

$\ln x \times \frac{x^2}{2}$虽然不是消去积分号“$\int$”时得出的（而是用分部积分公式得出来的），但是也要写为 $(\ln x \times \frac{x^2}{2})\Big|_1^2$。

第二点需要注意的地方：当计算定积分对应的不定积分时，如果用到了方法 6（万能公式法）的话，那么换元的时候，上下限也要跟着一起换，也就是通过原来 x 的上下限写出现在 t 的上下限，并且做到最后的时候就不用像不定积分一样把 t 再还原成 x 了。

例. 请计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$ 。

解： 我们采用方法 6 来做本题。

设 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ，设 $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$ ，则上下限也要相应改变。怎么改变呢？就是由 x 的上限及 x 和 t 之间的关系式确定 t 的上限，由 x 的下限及 x 和 t 之间的关系式确定 t 的下限。

由于 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ，把 x 的上限 $\frac{\pi}{2}$ 代入 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ 中，得 $\sin\frac{\pi}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$ ，通过这个式子解出 t 就可以了。大家都知道 $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ ，所以 $\frac{2t}{1+t^2} = 1$ ，即 $1+t^2 = 2t$ ，则 $1-2t+t^2 = 0$ ，得 $(t-1)^2 = 0$ ，解得 $t = 1$。因此，t 的上限是 1。

由于 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ，把 x 的下限 0 代入 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ 中，得 $\sin 0 = \frac{2t}{1+t^2}$ ，通过这个式子解出 t 就可以了。大家都知道 $\sin 0 = 0$，所以 $\frac{2t}{1+t^2} = 0$，解得 $t = 0$ 。因此，t 的下限是 0 。

所以有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^2+2t} \times \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_0^1 (1+t)^{-2}\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_0^1 (1+t)^{-2}\mathrm{d}(t+1)$$

$$= 2 \times \left[\frac{(1+t)^{-1}}{-1}\right]\Bigg|_0^1$$

$$= 2 \times (-\frac{1}{1+t})\Big|_0^1$$

$$= 2 \times [-\frac{1}{1+1} - (-\frac{1}{1+0})]$$

$$= 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 1$$

第三点需要注意的地方：当计算定积分对应的不定积分时，如果用到了方法 5（换元法）的话，那么换元的时候，上下限也要跟着一起换，也就是通过原来 x 的上下限写出现在 t 的上下限，并且做到最后的时候就不用像不定积分一样把 t 再还原成 x 了。

例. 请计算定积分 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 。

解： 由于本题含有根号，所以采用方法 5 来做。

设 $x=a\sin t$ ，对于本题而言， $a=1$ ，所以设 $x=\sin t$ 。大家注意，这时候上下限一定也要改变。怎么改变呢？这其实在上一道题中已经给大家讲过了。就是由 x 的上限及 x 和 t 之间的关系式确定 t 的上限，由 x 的下限及 x 和 t 之间的关系式确定 t 的下限。

由于 $x=\sin t$ ，把 x 的上限 1 代入 $x=\sin t$ 中，得 $1=\sin t$ ，通过这个式子解出 t 就可以了。可是现在问题来了，大家知道正弦函数 $\sin x$ 是一个周期函数（以 2π 为周期）， $\sin\frac{\pi}{2}$、$\sin(\frac{\pi}{2}+2\pi)$、$\sin(\frac{\pi}{2}+4\pi)$ 等都等于 1，那么到底通过 $1=\sin t$ 解出的 t 是多少呢？这就涉及一个很重要的知识点。下面详细地讲一下。

当初，在给大家讲不定积分的计算方法中的方法 3 时，是这样讲的。

凡是含根号的题就用换元法，并且换元法的具体用法如下。

情况 1. 若根号的形式是 $\sqrt{a^2-x^2}$ ，则进行这样的换元，$x=a\sin t$。

情况 2. 若根号的形式是 $\sqrt{x^2-a^2}$ ，则进行这样的换元，$x=a\sec t$。

情况 3. 若根号的形式是 $\sqrt{a^2+x^2}$ ，则进行这样的换元，$x=a\tan t$。

情况 4. 若根号的形式既不是 $\sqrt{a^2-x^2}$ ，也不是 $\sqrt{x^2-a^2}$ ，也不是 $\sqrt{a^2+x^2}$ ，则将整个根号换元为 t。

无论是情况几，都别忘了把 dx 也换了。

那么现在给大家补充一下，补充完如下。

凡是含根号的题就用换元法，并且换元法的具体用法如下。

情况 1. 若根号的形式是 $\sqrt{a^2-x^2}$ ，则进行这样的换元，$x=a\sin t\,(t\ni[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}])$ 。

情况 2. 若根号的形式是 $\sqrt{x^2-a^2}$ ，则进行这样的换元，$x=a\sec t\,[t\ni(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})]$ 。

情况 3. 若根号的形式是 $\sqrt{a^2+x^2}$ ，则进行这样的换元，$x=a\tan t\,(t\ni[0,\pi])$ 。

情况 4. 若根号的形式既不是 $\sqrt{a^2-x^2}$ ，也不是 $\sqrt{x^2-a^2}$ ，也不是 $\sqrt{a^2+x^2}$ ，则将整个根号换元为 t。

无论是情况几，都别忘了把 dx 也换了。

大家看见了吧， t 是有范围限制的。当初没给大家讲是因为当初讲的是不定积分，根本不用考虑 t 的范围限制，可现在是定积分，这个知识点就必须给大家讲了。

现在继续来看本题。本题中设的是 $x=\sin t$ ，这属于情况 1，所以 t 的范围是 $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，所以由 $1=\sin t$ 解得的 t 只能是 $\frac{\pi}{2}$ 。因此， t 的上限是 $\frac{\pi}{2}$ 。

再来看下限。由于 $x=\sin t$，把 x 的下限 0 代入 $x=\sin t$ 中，得 $0=\sin t$，通过这个式子解出 t 就可以了。解得 $t=0$ 。因此， t 的下限是 0 。

然后再换 dx。由于 $x=\sin t$ ，所以 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin t)$ 。由于 $\mathrm{d}(\sin t)=\cos t\mathrm{d}t$ ，所以 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$ 。

所以有

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\times\cos t\,\mathrm{d}t \qquad （1）式$$

由“从六边形推出的第一组公式中的公式（1）”可知， $1-\sin^2 t=\cos^2 t$ 。想必大家现在一定要将被积函数 $\sqrt{1-\sin^2 t}\times\cos t$ 中的 $\sqrt{1-\sin^2 t}$ 改写为 $\cos t$ 。的确，如果是不定积分的话，确实直接改写就行了，因为之前在讲不定积分时跟大家说过这种换元的题开出根号就当正的。可现在不是不定积分，而是定积分，那么就必须判断一下 $\sqrt{1-\sin^2 t}$ 到底是应该改写为 $\cos t$ 还是应该改写为 $-\cos t$ 了。下面开始判断。

首先， $\sqrt{1-\sin^2 t}=|\cos t|$ ，这是毫无疑问的。那么现在就要看看 $\cos t$ 到底是正数还是负数。如果是正数的话，那么 $|\cos t|=\cos t$ 。如果是负数的话，那么 $|\cos t|=-\cos t$ 。那么现在就来判断一下。由于下限是 0 ，上限是 $\frac{\pi}{2}$，所以只需要看一下在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内 $\cos t$ 是正是负就可以了。大家会画 $\cos t$ 的图吧？高中就学过，很简单，画出它的图之

后就可以很明显地看出在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内 $\cos t$ 是正的。所以，对于本题来说，$\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t$ 。

所以有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\times\cos t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t \qquad \text{（2）式}$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t \qquad \text{（3）式}$$

根据高中学过的三角函数降幂公式，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{（4）式}$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{（5）式}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,\mathrm{d}t \qquad \text{（6）式}$$

（5）式、（6）式相结合，得

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,\mathrm{d}t \qquad \text{（7）式}$$

也就是说，现在只要计算出 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$ 和 $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,\mathrm{d}t$ 就可以了。

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}\times t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{1}{2}\times(\frac{\pi}{2}-0)\\
&=\frac{\pi}{4}\end{aligned} \qquad \text{（8）式}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,\mathrm{d}(2t)\\
&=\frac{1}{4}\times(\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{1}{4}\times(\sin\pi-\sin 0)\\
&=\frac{1}{4}\times 0\\
&=0\end{aligned} \qquad \text{（9）式}$$

将（8）式、（9）式代入（7）式，得

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{4} \qquad \text{（10）式}$$

定积分的计算方法已经给大家讲完了。最后告诉大家两个很常用的公式。

（1）无论被积函数 $f(x)$ 是什么，总有 $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 。也就是说，当上下限相等时，定积分为 0。

（2）无论被积函数 $f(x)$ 是什么，总有 $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x$ 。也就是说，若上下限互换，则前面要加一个负号。

（3）无论被积函数 $f(x)$ 是什么，总有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ，其中 c 可以是任意常数，不一定非要在 a 和 b 之间。

4.5 反常积分的计算方法

本节来看反常积分的计算方法。先来带大家回顾一下什么叫反常积分。

大家记住，以后一旦看见符号“$\int_{\square}^{\square}\mathrm{d}x$”，那么要么是定积分，要么是反常积分。

大家发现了吧，其实定积分和反常积分与不定积分的区别仅仅在于“$\int$”的右上角和右下角写没写东西。没写就是不定积分，写了就是定积分或反常积分。

对于某个“$\int_{\square}^{\square}f(x)\,\mathrm{d}x$”来说，如果是以下两种情况之一，那么它就是反常积分。否则，它就是定积分。

情况 1：两个方框中的其中一个方框中是∞，或者两个方框中都是∞。

情况 2：两个方框中都是常数，$f(x)$在这两个方框所组成的闭区间中存在没有定义的点，并且$\lim\limits_{x\to\text{此点}}f(x)=\infty$。

例. 请计算$\int_1^2\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$。

例. 请计算$\int_3^{+\infty}x\,\mathrm{d}x$。

例. 请计算$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$。

例. 请计算$\int_0^1\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$。

例. 请计算$\int_1^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$。

例. 请计算$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(x+1)}\mathrm{d}x$。

以上六个例子都是反常积分。

现在来给反常积分分一下类。要注意，现在要讲的反常积分的分类并非是判断$\int_{\square}^{\square}f(x)\,\mathrm{d}x$是否为反常积分的方法，判断$\int_{\square}^{\square}f(x)\,\mathrm{d}x$是否为反常积分的方法在之前给大家讲过了。换句话说，将反常积分的分类是在已经判断出了$\int_{\square}^{\square}f(x)\,\mathrm{d}x$是反常积分之后需要做的工作。

反常积分可以分为三类。先来看第一类反常积分。

第一类反常积分：如果反常积分$\int_{\square}^{\square}f(x)\,\mathrm{d}x$中的$f(x)$在积分上限处没有定义或者在积分下限处没有定义（要注意，这里用的词是“或者”，也就是上限和下限二选一），并且在开区间(上限，下限)内的任意一点都有定义，那么称这样的反常积分为第一类反常积分。

下面来看例题。

例. 请判断$\int_1^2\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$是不是第一类反常积分。

解： 首先，判断一下$\int_1^2\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$是不是反常积分，如果它连反常积分都不是的话，那么就更不可能是第一类反常积分了。

那么应该如何判断它是不是反常积分呢？之前给大家讲过方法。

对于某个“$\int_{\square}^{\square}f(x)\,\mathrm{d}x$”来说，如果是以下两种情况之一，那么它就是反常积分。否则，它就是定积分。

情况 1：两个方框中的其中一个方框中是∞，或者两个方框中都是∞。

情况 2：两个方框中都是常数，$f(x)$在这两个方框所组成的闭区间中存在没有定义的点，并且$\lim\limits_{x\to\text{此点}}f(x)=\infty$。

很明显本题不属于情况 1。

那么来看看本题属不属于情况 2。来看看函数 $\frac{1}{x-1}$ 在闭区间 $[1,2]$ 内存不存在没有定义的点，很明显存在，函数 $\frac{1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处无定义。然后算一下 $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}$（由于1是左端点，所以要算右极限；如果是右端点的话，那么就要算左极限；如果是中间的点的话，那么算极限时就不用分左右）。由画图法可知，$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$，所以本题属于情况 2。

因此，$\int_1^2\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$ 是反常积分。

现在已经判断出 $\int_1^2\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$ 是反常积分，接下来，根据前述第一类反常积分的定义判断一下这个反常积分是不是第一类反常积分。

对于本题而言，很明显，反常积分 $\int_1^2\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$ 中的 $\frac{1}{x-1}$ 在下限 1 处没有定义，而在上限 2 处有定义，符合二选一，并且在开区间(1,2)内的任意一点都有定义，所以反常积分 $\int_1^2\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$ 为第一类反常积分。

例. 请判断 $\int_3^{+\infty}x\,\mathrm{d}x$ 是不是第一类反常积分。

解： 首先，判断一下 $\int_3^{+\infty}x\,\mathrm{d}x$ 是不是反常积分。

根据之前讲过的判断反常积分的方法可知，本题属于情况 1，所以 $\int_3^{+\infty}x\,\mathrm{d}x$ 是反常积分。

接下来，根据前述第一类反常积分的定义来判断这个反常积分是不是第一类反常积分。

对于本题而言，很明显，反常积分 $\int_3^{+\infty}x\,\mathrm{d}x$ 中的 x 在上限 $+\infty$ 处没有定义（大家记住，任何一个函数在 ∞ 处都是没有定义的），而在下限 3 处有定义，符合二选一，并且在开区间 $(3,+\infty)$ 内的任意一点都有定义，所以反常积分 $\int_3^{+\infty}x\,\mathrm{d}x$ 为第一类反常积分。

例. 请判断 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 是不是第一类反常积分。

解： 首先，判断一下 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 是不是反常积分。

根据之前讲过的判断反常积分的方法可知，本题属于情况 1，所以 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 是反常积分。

接下来，根据前述第一类反常积分的定义判断这个反常积分是不是第一类反常积分。

对于本题而言，很明显，反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 中的 $\frac{1}{x}$ 在上限 $+\infty$ 处没有定义，在下限 0 处也没有定义，不符合二选一，所以反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 不是第一类反常积分。

接下来看第二类反常积分。

第二类反常积分：如果反常积分 $\int_{\square}^{\square}f(x)\,\mathrm{d}x$ 中的 $f(x)$ 在积分上限处没有定义并且在积分下限处没有定义（要注意，这里用的词是“并且”，也就是上限和下限都没有定义），并且在开区间(上限，下限)内的任意一点都有定义，那么称这样的反常积分为第二类反常积分。

下面来看例题。

例. 请判断 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 是不是第二类反常积分。

解： 根据前面的内容可知，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 是反常积分。

接下来，根据前述第期二类反常积分的定义判断这个反常积分是不是第二类反常积分。

对于本题而言，很明显，反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 中的 $\frac{1}{x}$ 在上限 $+\infty$ 处没有定义，在下限 0 处也没有定义，并且在开

区间 $(0,+\infty)$ 内的任意一点都有定义，所以反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 是第二类反常积分。

例. 请判断 $\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\mathrm{d}x$ 是不是第二类反常积分。

解： 首先，判断一下 $\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\mathrm{d}x$ 是不是反常积分。

根据之前讲过的判断反常积分的方法可知，本题属于情况 1，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\mathrm{d}x$ 是反常积分。

接下来，根据前述第二类反常积分的定义判断这个反常积分是不是第二类反常积分。

对于本题而言，很明显，反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\mathrm{d}x$ 中的 x 在上限 $+\infty$ 处没有定义，在下限 $-\infty$ 处也没有定义，并且在开区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的任意一点都有定义，所以反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\mathrm{d}x$ 是第二类反常积分。

最后看第三类反常积分。

第三类反常积分：如果反常积分 $\int_{\square}^{\square}f(x)\,\mathrm{d}x$ 中的 $f(x)$ 在开区间(上限，下限)内的一点没有定义，那么称这样的反常积分为第三类反常积分。

下面来看例题。

例. 请判断 $\int_0^1\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$ 是不是第三类反常积分。

解： 首先，判断一下 $\int_0^1\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$ 是不是反常积分。

根据之前讲过的判断反常积分的方法可知，本题不属于情况 1。

那么来看看本题属不属于情况 2。来看看函数 $\frac{1}{x-\frac{1}{2}}$ 在闭区间 $[0,1]$ 内存不存在没有定义的点，很明显存在，函数 $\frac{1}{x-\frac{1}{2}}$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处无定义。然后算一下 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{x-\frac{1}{2}}$。由画图法可知，$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{x-\frac{1}{2}}=\infty$，所以本题属于情况 2。

因此，$\int_0^1\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$ 是反常积分。

接下来，根据前述第三类反常积分的定义来判断这个反常积分是不是第三类反常积分。

对于本题而言，很明显反常积分 $\int_0^1\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$ 中的 $\frac{1}{x-\frac{1}{2}}$ 在开区间 $(0,1)$ 内的 $\frac{1}{2}$ 这点没有定义，所以反常积分 $\int_0^1\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$ 是第三类反常积分。

反常积分的分类已经给大家讲完了。那么，反常积分的计算方法是什么呢？下面就要给大家讲反常积分的计算方法。

第一类反常积分的计算方法：就按照定积分的方法做就行了，但最终上下限里面有一个值是直接代入不了的，只能算极限［如果是下限代入不了的话，那么就算下限的右极限（若是无穷，那就不用分左右）；如果是上限代入不了的话，那么就算上限的左极限（若是无穷，那就不用分左右）］。

下面来看例题。

例. 请计算 $\int_1^2\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$。

解： 之前已经判断出了本题所给的积分 $\int_1^2\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$ 是一个反常积分，并且是第一类反常积分。

因此，应该按照第一类反常积分的计算方法来做。所以，本题的做法为

$$\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}(x-1)$$
$$=\ln|x-1|\Big|_1^2$$
$$=\ln(x-1)\Big|_1^2$$
$$=\ln(2-1)-\lim_{x\to 1^+}\ln(x-1)$$
$$=0-(-\infty)$$
$$=+\infty$$

本题中的 $\ln|x-1|\Big|_1^2=\ln(x-1)\Big|_1^2$ 是因为，由于下限是 1，上限是 2，说明 x 是在 1 到 2 之间取值，那么 $|x-1|$ 与 $x-1$ 必然是相等的，所以可以把绝对值去掉。这与反常积分的计算方法没有一点儿关系。

例. 请计算 $\int_3^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$ 。

解： 之前已经判断出了本题所给的积分 $\int_1^2 x\mathrm{d}x$ 是一个反常积分，并且是第一类反常积分。

因此，应该按照第一类反常积分的计算方法来做。

所以，本题的做法为

$$\int_3^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^2}{2}\Big|_3^{+\infty}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}-\frac{3^2}{2}$$
$$=+\infty-\frac{9}{2}$$
$$=+\infty$$

例. 请计算 $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+(\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$ 。

解： 首先，判断一下 $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+(\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$ 是不是反常积分。

根据之前讲过的判断反常积分的方法可知，本题属于情况 1，所以 $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+(\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$ 是反常积分。

接下来根据前述第一类反常积分的定义判断一下这个反常积分是不是第一类反常积分。

对于本题而言，很明显，反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+(\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$ 中的 $\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+(\mathrm{e}^{-x})^2}$ 在上限 $+\infty$ 处没有定义，在下限 0 处有定义，符合二选一，并且在开区间 $(0,+\infty)$ 内的任意一点都有定义，所以反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+(\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$ 是第一类反常积分。

因此，应按照第一类反常积分的计算方法来做。

所以本题的做法为

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x \overset{\text{分子分母同时乘以}\mathrm{e}^{2x}}{=} \int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{+\infty} x\times\frac{\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{x})^2}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}\left(-\frac{1}{(1+\mathrm{e}^{x})^2}\right)$$
$$=\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\right)$$

$$\overset{\text{用的分部积分公式}}{=} -[x\times\frac{1}{1+e^x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^x}dx$$

$$=-[\lim_{x\to\infty}(x\times\frac{1}{1+e^x})-(0\times\frac{1}{1+e^0})-\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^x})dx]$$

$$=-(\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^x}dx)$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1\times e^{-x}}{(1+e^x)e^{-x}}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}d(e^{-x})$$

$$=-\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}d(e^{-x}+1)$$

$$=(\ln|1+e^{-x}|\Big|_0^{+\infty})$$

$$=-[\ln(1+e^{-x})\Big|_0^{+\infty}]$$

$$=-[\lim_{x\to\infty}\ln(1+e^{-x})-\ln(1+e^0)]$$

$$=-(0-\ln 2)$$

$$=\ln 2$$

例. 请计算 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(x+1)^2}dx$。

解： 首先，判断一下 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(x+1)^2}dx$ 是不是反常积分。

根据之前讲过的判断反常积分的方法可知，本题属于情况 1，所以 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(x+1)}dx$ 是反常积分。

接下来，根据前述第一类反常积分的定义判断这个反常积分是不是第一类反常积分。

对于本题而言，很明显，反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(x+1)^2}dx$ 中的 $\frac{1}{x^2(x+1)^2}$ 在上限 $+\infty$ 处没有定义，在下限 1 处有定义，符合二选一，并且在开区间 $(1,+\infty)$ 内的任意一点都有定义，所以反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(x+1)^2}dx$ 是第一类反常积分。

因此，应该按照第一类反常积分的计算方法来做。

所以，本题的做法为

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(x+1)}dx$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3(1+\frac{1}{x})}dx$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x}}dx$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{\frac{1}{x}\times\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}dx$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}d(-\frac{1}{x})$$

$$=-\int_1^{+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{(1+\frac{1}{x})}\mathrm{d}(\frac{1}{x})$$

$$=-\int_1^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-1}{(1+\frac{1}{x})}\mathrm{d}(\frac{1}{x})$$

$$=-\int_1^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-1}{(1+\frac{1}{x})}\mathrm{d}(\frac{1}{x}+1)$$

令 $\frac{1}{x}+1=t$，则上下限也要换。当 x 取上限 $+\infty$ 时，$t=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}+1)=1$。当 x 取下限 1 时，$t=\frac{1}{1}+1=2$。所以，换元之后 t 的上限是 1，下限是 2。

所以有 $-\int_1^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-1}{(1+\frac{1}{x})}\mathrm{d}(\frac{1}{x}+1)=-\int_2^1\frac{t-1}{t}\mathrm{d}t$

大家看，这么一换，就不是反常积分了，就成定积分了。也就是说，最后可以直接代入上下限了（不用算极限了）。

$$-\int_2^1\frac{t-1}{t}\mathrm{d}t$$

$$=-(-\int_2^1\frac{t}{t}\mathrm{d}t-\int_2^1\frac{1}{t}\mathrm{d}t)$$

$$=-(-\int_2^1 1\,\mathrm{d}t-\int_2^1\frac{1}{t}\mathrm{d}t)$$

$$=-[t\big|_2^1-(\ln|t|)\big|_2^1]$$

$$=-[1-2-(\ln t)\big|_2^1]$$

$$=-[-1-(\ln 1-\ln 2)]$$

$$=-[-1-(0-\ln 2)]$$

$$=-(-1+\ln 2)$$

$$=1-\ln 2$$

第二类反常积分的计算方法：如果要计算的是第二类反常积分，那么用如下两种方法之一就肯定能做出来（还有可能用如下两种方法都能做出来）。

方法 1：和第一类反常积分的计算方法一样。也就是说，就按照定积分的方法做就行了，但最终上下限都直接代入不了，只能两个算极限[算下限的极限的时候是算下限的右极限（若是无穷，那就不用分左右），算上限的极限的时候是算上限的左极限（若是无穷，那就不用分左右）]。

方法 2：利用之前讲的公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_d^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$，将一个积分拆解成两个积分。这样，每个积分就都是第一类反常积分了。

下面来看例题。

例. 请计算 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$。

解：之前已经判断出了本题所给的积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 是一个反常积分，并且是第二类反常积分。

因此，应该按照第二类反常积分的计算方法来做。先用方法 1 来做。

对于本题而言，就是

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}t$$

$$=\ln|x|\big|_0^{+\infty}$$

$$=\ln x\big|_0^{+\infty}$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-\lim\limits_{x\to0^+}\ln x$

$=+\infty-(-\infty)$

$=+\infty+(+\infty)$

$=+\infty$

本题也可以用方法 2 来做（但是注意，并不是说每道第二类反常积分的题都既能用方法 1 做也能用方法 2 做）。

对于本题而言，找一个点，如找3，那么有

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_0^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_3^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

现在只需算出$\int_0^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x$和$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$就可以了。$\int_0^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x$和$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$这两者都是第一类反常积分，所以用第一类反常积分的计算方法来计算这两者。

对于$\int_0^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x$而言，就是

$$\int_0^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|\Big|_0^3=\ln x\Big|_0^3=\ln3-\lim_{x\to0^+}\ln x=\ln3-(-\infty)=\ln3+(+\infty)=+\infty$$

对于$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$而言，就是

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|\Big|_3^{+\infty}=\ln x\Big|_3^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\ln x-\ln3=+\infty-\ln3=+\infty$$

现在$\int_0^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x$和$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$都算完了，所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_0^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_3^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=+\infty+(+\infty)=+\infty$$

第三类反常积分的计算方法：利用之前讲的公式$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$，将一个积分拆解成两个积分。这样，每个积分就都是第一类或第二类反常积分了。但是注意，此处c不能随便找，找的是那个没有定义的点。

下面来看例题。

例. 请计算$\int_{-1}^1\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$。

解：首先，判断一下$\int_{-1}^1\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$是不是反常积分。

根据之前讲过的判断反常积分的方法可知，本题不属于情况 1。

那么来看看本题属不属于情况 2。来看看函数$\frac{1}{\sin x}$在闭区间$[-1,1]$内存不存在没有定义的点，很明显存在，函数$\frac{1}{\sin x}$在$x=0$处无定义。然后算一下$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sin x}$。通过计算可知，$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sin x}=\infty$，所以本题属于情况 2。

因此，$\int_{-1}^1\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$是反常积分。

接下来，根据前述第三类反常积分的定义判断这个反常积分是不是第三类反常积分。

对于本题而言，很明显，反常积分$\int_{-1}^1\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$中的$\frac{1}{\sin x}$在开区间$(-1,1)$内的 0 这点没有定义，所以反常积分$\int_{-1}^1\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$是第三类反常积分。

因此，应该按照第三类反常积分的计算方法来做。

对于本题而言，c找的是0。所以有

$$\int_{-1}^1\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^0\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$$

现在只需算出$\int_{-1}^0\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$和$\int_0^1\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$就可以了。$\int_{-1}^0\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$和$\int_0^1\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$这两者都是第一类反常积分，所以用第一类反常积分的计算方法来计算这两者。

对于 $\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ 而言，就是

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{0}\csc x\,\mathrm{d}x$$

$$=\ln|\csc x-\cot x|\Big|_{-1}^{0}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\ln|\csc x-\cot x|-\ln|\csc(-1)-\cot(-1)|$$

$$=-\ln|\csc(-1)-\cot(-1)|$$

$$\overset{\csc x、\cot x\text{都是奇函数}}{=}-\ln|-\csc 1+\cot 1|$$

$$=-\ln|\cot 1-\csc 1|$$

$\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ 已经算完了。不过可能有些同学不会算极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}\ln|\csc x-\cot x|$，现在就来给大家做一下。

以前给大家讲过，像 $\lim\limits_{x\to 0^-}\ln|\csc x-\cot x|$ 这种复合的函数求极限就直接把 lim 带入，所以有

$$\lim_{x\to 0^-}\ln|\csc x-\cot x|=\ln\left|\lim_{x\to 0^-}(\csc x-\cot x)\right| \qquad （1）式$$

$$\ln\left|\lim_{x\to 0^-}(\csc x-\cot x)\right|=\ln\left|\lim_{x\to 0^-}(\frac{1}{\sin x}-\cot x)\right| \qquad （2）式$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{\sin x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\cot x=-\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}(\frac{1}{\sin x}-\cot x)$ 属于同号无穷相减，这时通分来做。

$$\lim_{x\to 0^-}(\frac{1}{\sin x}-\cot x)=\lim_{x\to 0^-}(\frac{1-\sin x\cot x}{\sin x}) \qquad （3）式$$

$$\lim_{x\to 0^-}(\frac{1-\sin x\cot x}{\sin x})=\lim_{x\to 0^-}(\frac{1-\sin x\cot x}{x}) \qquad （4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0^-}(\frac{1}{\sin x}-\cot x)=\lim_{x\to 0^-}(\frac{1-\sin x\cot x}{x}) \qquad （5）式$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}(1-\sin x\cot x)=0$，所以用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0^-}(\frac{1-\sin x\cot x}{x})\overset{?}{=}\lim_{x\to 0^-}(\frac{0-\frac{1}{\cos x}}{1})=\frac{0-1}{1}=-1 \qquad （6）式$$

（5）式、（6）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0^-}(\frac{1}{\sin x}-\cot x)=-1 \qquad （7）式$$

将（7）式代入（2）式，得

$$\ln\left|\lim_{x\to 0^-}(\csc x-\cot x)\right|=\ln|-1|=\ln 1=0 \qquad （8）式$$

（7）式、（8）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0^-}\ln|\csc x-\cot x|=0 \qquad （9）式$$

现在大家知道 $\lim\limits_{x\to 0^-}\ln|\csc x-\cot x|$ 为什么等于 0 了吧？

对于 $\int_{0}^{1}\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ 而言，就是

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{1}\csc x\,\mathrm{d}x$$

$$=\ln|\csc x-\cot x|\Big|_{0}^{1}$$

$$=\ln|\csc 1-\cot 1|-\lim_{x\to 0^+}\ln|\csc x-\cot x|$$

$$=\ln|\csc 1-\cot 1|$$

现在$\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$和$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$都算完了，所以

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=-\ln\left|\cot 1-\csc 1\right|+\ln\left|\csc 1-\cot 1\right|=0$$

4.6 定积分的应用

本节可分为两个小节，第一小节讲利用定积分求面积，第二小节讲利用定积分求旋转体的体积。

4.6.1 利用定积分求面积

在考研中，凡是让求几条线所围成的封闭图形的面积，都用本小节所讲的方法来求（但是记住，如果让求的是一个旋转曲面的面积，那么就不能用本小节所讲的方法来求了）。

若以下两个条件同时成立：

（1）a、b **均为常数且** $b>a$；

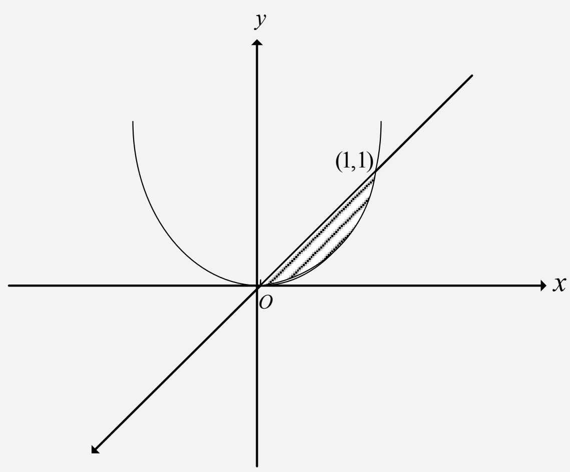
（2）在闭区间 $[a,b]$ **上** $f(x)\geqslant g(x)$。

则定积分 $\int_{a}^{b}f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x$ **代表的是由** $x=a$、$x=b$、$y=f(x)$、$y=g(x)$ **这四条线围成的封闭图形的面积。**

下面来看例题。

例. 求由 $y=x^2$ 和 $y=x$ 围成的封闭图形的面积。

解： 先在平面直角坐标系中把由 $y=x^2$ 和 $y=x$ 围成的封闭图形画出来。



本题让求的就是阴影区域的面积。在考研中凡是让求几条线所围成的封闭图形的面积，就肯定用定积分来求。那么，既然要用定积分来算这个封闭图形的面积，就必须看看这个封闭图形是由哪四条线围成的[$x=$常数a、$x=$常数b、$y=f(x)$、$y=g(x)$]。

可能有同学会问：“这为什么非要四条线围成呢？这只需要 $y=x^2$ 和 $y=x$ 这两条线就可以围成啊！”。大家以后记住，只要是用定积分算面积，就必须要找出该图形是由哪四条线[$x=$常数a、$x=$常数b、$y=f(x)$、$y=g(x)$]围成的。

所以，本题中的封闭图形虽然由 $y=x^2$ 和 $y=x$ 这两条线就可以围成，但也必须找出四条线。

对于本题来说，找的四条线一定是：$x=0$、$x=1$、$y=x$、$y=x^2$。现在可能又有一部分同学会问：“既然由 $y=x^2$ 和 $y=x$ 这两条线就可以围成，那么剩下的两条为什么一定是 $x=0$ 和 $x=1$ 呢？怎么不能任意写呢？例如，怎么不能是 $x=1000$ 和 $x=10000$？”大家以后记住，所找的四条线中的每一条必须都与该封闭图形有交点。

对于本题而言，$x=0$ 这条线（其实就是 y 轴）与封闭图形的交点是 $(0,0)$，也就是原点，$x=1$ 这条线与封闭图形的交点是 $(1,1)$。

综上所述，本题中让求面积的封闭图形是由 $x=0$、$x=1$、$y=x$、$y=x^2$ 围成的。

所以

$$S_{\text{阴影区域}}=\int_{0}^{1}(x-x^2)\mathrm{d}x$$

大家看见了吧，$x=1$、$x=0$ 中的 1 和 0 分别作为上限和下限（但是一定要注意，上限必须要大于下限，否则就错了），$y=x$、$y=x^2$ 中的 x、x^2 相减作为被积函数（但是一定要注意，本题中一定是 $x-x^2$，绝对不能写成 x^2-x。这是为何？是因为在闭区间 $[0,1]$ 上 $x \geqslant x^2$。这其实很简单，就看所画的那个阴影区域，看看 $y=x$ 和 $y=x^2$ 哪条线在上面哪条线在下面就行了，用上面减下面）。

若以下两个条件同时成立：

（1）a、b 均为常数且 $b>a$；

（2）在闭区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \geqslant g(x)$。

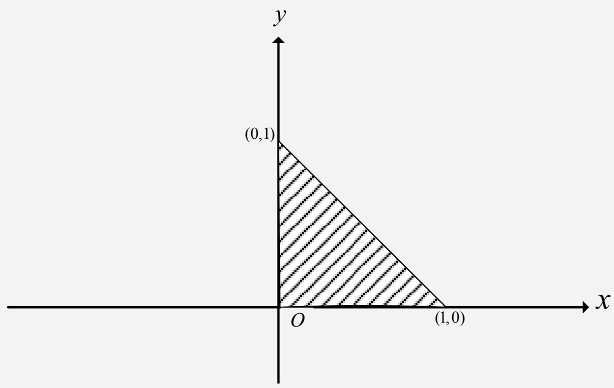
则定积分 $\int_a^b f(x)-g(x)\mathrm{d}x$ 代表的是由 $x=a$、$x=b$、$y=f(x)$、$y=g(x)$ 这四条线围成的封闭图形的面积。

现在就可以开始计算定积分 $\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x$ 了，计算完就是面积。虽然现在还没计算，但可以断定，$\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x$ 肯定是一个正数，因为是面积，一定是正的。大家看见了吧，一道求面积的题被活生生地转化为一道定积分的计算题。

$$\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x-\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1-\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1=(\frac{1}{2}-0)-(\frac{1}{3}-0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

例. 求由 x 轴、y 轴及 $x+y=1$ 围成的封闭图形的面积。

解： 先在平面直角坐标系中把由 x 轴、y 轴及 $x+y=1$ 围成的封闭图形画出来。



本题让求的就是阴影区域的面积。其实，这就是一个直角三角形，用三角形面积公式就能求出来，面积是 $\frac{1\times 1}{2}=\frac{1}{2}$。但是现在要用定积分来求。当然，考研中绝对不会考这么简单的题，考研中凡是让求几条线所围成的封闭图形的面积，就肯定是不规则图形，就只能用定积分来求。

本题中让求面积的封闭图形是由 $x=0$、$x=1$、$y=1-x$、$y=0$ 围成的。

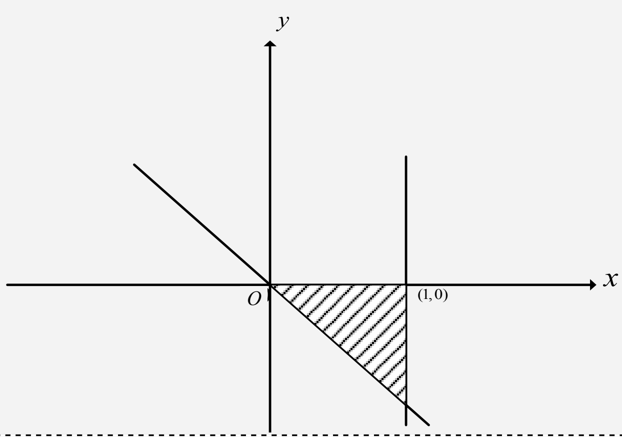
所以

$$S_{\text{阴影区域}}=\int_0^1[(1-x)-0]\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1[(1-x)-0]\,\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 1\,\mathrm{d}x-\int_0^1 x\mathrm{d}x=x\big|_0^1-\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1=(1-0)-(\frac{1}{2}-0)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

例. 求由 x 轴、$x=1$ 及 $y=-x$ 围成的封闭图形的面积。

解： 先在平面直角坐标系中把由 x 轴、$x=1$ 及 $y=-x$ 围成的封闭图形画出来。



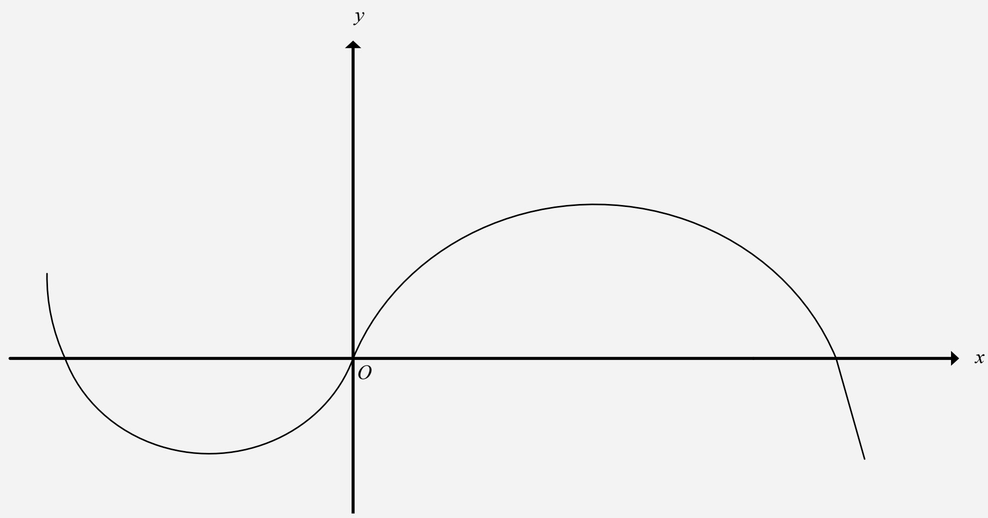
本题让求的就是阴影区域的面积。其实，这就是一个直角三角形，用三角形面积公式就能求出来，面积是 $\frac{1\times1}{2}=\frac{1}{2}$。但是现在要用定积分来求。本题中让求面积的封闭图形是由 $x=0$、$x=1$、$y=0$、$y=-x$ 围成的。

所以

$$S_{\text{阴影区域}}=\int_0^1[0-(-x)]\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1[0-(-x)]\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=(\frac{1}{2}-0)=\frac{1}{2}$$

例. $y=-2x^3+x^2+3x$ 的图像如下所示（要注意，这只是一个示意图，不太标准），求由 $y=-2x^3+x^2+3x$ 和 x 轴围成的封闭图形的面积。

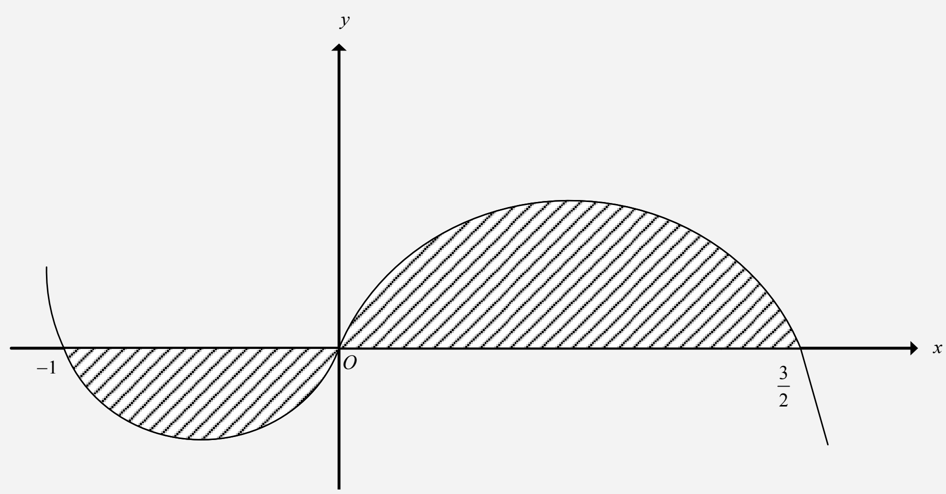


解： 先求一下 $y=-2x^3+x^2+3x$ 与 x 轴一共有多少个交点。

令 $-2x^3+x^2+3x=0$，解得：$x=-1$ 或 $x=0$ 或 $x=\frac{3}{2}$。

也就是说，$y=-2x^3+x^2+3x$ 与 x 轴一共有三个交点。其实，从本题所给的示意图中也能看出来有三个交点。

现在在平面直角坐标系中把由 $y=-2x^3+x^2+3x$ 和 x 轴围成的封闭图形画出来。

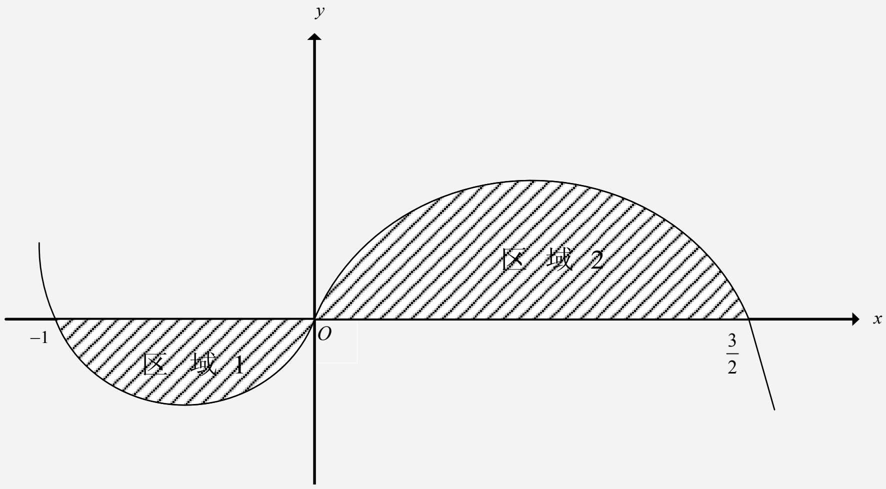


本题让求的就是阴影区域的面积。本题中让求面积的封闭图形是由 $x=-1$、$x=\frac{3}{2}$、$y=-2x^3+x^2+3x$、$y=0$ 围成的。

可是现在问题来了。所求封闭图形的面积到底是 $\int_{-1}^{\frac{3}{2}}[(-2x^3+x^2+3x)-0]\,\mathrm{d}x$ 还是 $\int_{-1}^{\frac{3}{2}}[0-(-2x^3+x^2+3x)]\,\mathrm{d}x$？本题与前几道题不同，从图中可以看出，在闭区间 $[-1,\frac{3}{2}]$ 上，$y=-2x^3+x^2+3x$ 和 $y=0$ 谁大谁小是不确定的。具体

来说，在 $[-1,0]$ 上，$y=0$ 比 $y=-2x^3+x^2+3x$ 要大；在 $[0,\frac{3}{2}]$ 上，$y=-2x^3+x^2+3x$ 比 $y=0$ 要大。

那怎么办？有办法，如下所示。



分别算区域 1 和区域 2 的面积，然后加起来就可以了。

先来算区域 1 的面积。

区域 1 是由 $x=-1$、$x=0$、$y=-2x^3+x^2+3x$、$y=0$ 围成的。

$$S_{区域1}=\int_{-1}^{0}[0-(-2x^3+x^2+3x)]\mathrm{d}x$$

$$\int_{-1}^{0}[0-(-2x^3+x^2+3x)]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}2x^3-x^2-3x\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}2x^3\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}x^2\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}3x\mathrm{d}x$$

$$=2\times\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0}-3\times\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}=2\times(\frac{0}{4}-\frac{1}{4})-[\frac{0}{3}-(-\frac{1}{3})]-3\times(\frac{0}{2}-\frac{1}{2})$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}=\frac{2}{3}$$

再来算区域 2 的面积。

区域 2 是由 $x=0$、$x=\frac{3}{2}$、$y=-2x^3+x^2+3x$、$y=0$ 围成的。

$$S_{区域2}=\int_{0}^{\frac{3}{2}}[(-2x^3+x^2+3x)-0]\mathrm{d}x$$

$$\int_{0}^{\frac{3}{2}}[(-2x^3+x^2+3x)-0]\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{3}{2}}-2x^3+x^2+3x\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{3}{2}}-2x^3\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{3}{2}}x^2\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{3}{2}}3x\mathrm{d}x$$

$$=-2\times\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{\frac{3}{2}}+\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{\frac{3}{2}}+3\times\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\frac{3}{2}}=-2\times(\frac{81}{64}-0)+(\frac{9}{8}-0)+3\times(\frac{9}{8}-0)$$

$$=-\frac{81}{32}+\frac{9}{8}+\frac{27}{8}=-\frac{81}{32}+\frac{36}{32}+\frac{108}{32}=\frac{63}{32}$$

现在区域 1 的面积和区域 2 的面积都算完了，所以本题最后的答案为 $\frac{2}{3}+\frac{63}{32}=\frac{253}{96}$。

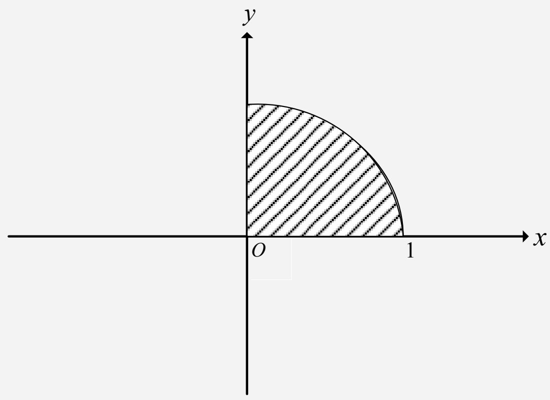
例. 请计算定积分 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$。

解： 之前计算的都是利用定积分来求面积的题，现在来计算一道利用面积计算定积分的题。这道题其实与之前做过的一道题一模一样。当时是采用方法 5 来做的。

现在利用面积来做一下这道题。

题中让计算的定积分是 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ **，可以将其改写为** $\int_0^1(\sqrt{1-x^2}-0)\,\mathrm{d}x$ **。由本小节的讲解可知，定积分** $\int_0^1(\sqrt{1-x^2}-0)\,\mathrm{d}x$ **实际上指的就是由** $x=0$ **、** $x=1$ **、** $y=\sqrt{1-x^2}$ **、** $y=0$ **这四条线所围成的封闭图形的面积。**

现在在平面直角坐标系中把由 $x=0$ **、** $x=1$ **、** $y=\sqrt{1-x^2}$ **（这其实就是上半圆周）、** $y=0$ **这四条线所围成的封闭图形画出来。**



由 $x=0$、$x=1$、$y=\sqrt{1-x^2}$（这其实就是上半圆周）、$y=0$ 这四条线所围成的封闭图形就是以上的阴影区域。所以，现在只需要把这个阴影区域的面积算出来就可以了。

$S_{\text{阴影区域}}=\frac{1}{4}\pi r^2=\frac{1}{4}\times\pi\times1^2=\frac{\pi}{4}$，所以 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$。

4.6.2 利用定积分求旋转体的体积

在考研中，凡是让求一个图形绕某个轴转完以后形成的立体图形的体积，都用本小节所讲的方法来求。

别的书在讲本小节时，都是讲的微元分析法，但那需要大家有一定的空间想象能力。对于空间想象能力不好的同学，就比较麻烦了。而本书则提供给大家一套不需要大家有任何空间想象能力的方法。

具体求法如下。

首先确定一下该图形绕题中所给的轴（一般这种题给的轴都是平行于 x 轴的直线或平行于 y 轴的直线）转完之后形成的立体图形是实心的还是空心的。现在就来给大家总结一下如何判断该图形绕题中所给的轴转完之后形成的立体图形是实心的还是空心的（大家甚至都不用管什么叫空心什么叫实心，只要知道该如何判断空心还是实心就可以了）。

如果题中给的图形中的一条边在题中给的轴上，那么该图形绕该轴转完以后所得到的立体图形就是实心的，否则就是空心的。

判断完实心和空心之后，就可以开始正式做了。

如果是实心的，那么分以下两种情况处理。

情况 1：题中给的轴是与 x 轴平行的直线，那么旋转体体积为 $\int_a^b\pi r^2\mathrm{d}x$。其中，$a$、$b$ 分别为题中给的图形中的横坐标最小值和横坐标最大值；r 为题中给的图形的所有边中离旋转轴最远的边（注意，不能是与旋转轴垂直的边）上的点到旋转轴的距离。

情况 2：题中给的轴是与 y 轴平行的直线，那么旋转体体积为 $\int_a^b\pi r^2\mathrm{d}y$。其中，$a$、$b$ 分别为题中给的图形中的纵坐标最小值和纵坐标最大值；r 为题中给的图形的所有边中离旋转轴最远的边（注意，不能是与旋转轴垂直的边）上的点到旋转轴的距离。

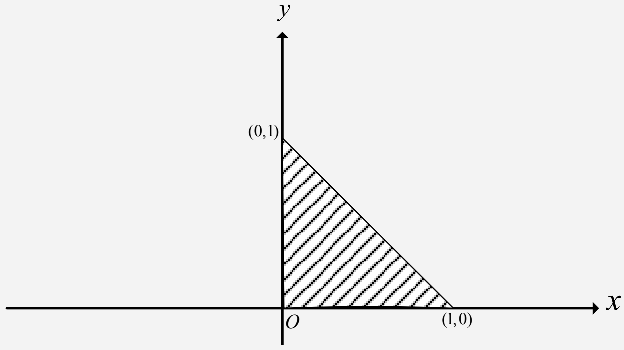
如果是空心的，那么就把它补充成实心的，然后用两个实心相减就可以了。

以上就是利用定积分求旋转体体积的方法。大家看见了吧，根本不需要有任何的空间想象能力。

下面来看例题。

例. 求由 x 轴、y 轴、$x+y=1$ 所围成的封闭图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积。

解： 先在平面直角坐标系中把由 x 轴、y 轴、$x+y=1$ 所围成的封闭图形画出来。



现在先来判断一下这个图形绕 x 轴旋转而成的旋转体是实心的还是空心的。判断方法我已经告诉过大家了。

如果题中给的图形中的一条边在题中给的轴上，那么该图形绕该轴转完以后所得到的立体图形就是实心的，否则就是空心的。

题中给的图形共由三条边组成，分别是$x=0$、$y=0$、$x+y=1$，$y=0$在题中给的轴（x轴）上，所以该图形绕该轴转完以后所得到的立体图形就是实心的。

现在已经判断完是实心了，下面继续做。

本题明显属于情况 1（因为是绕x轴转，x轴肯定和x轴平行），所以应该按照情况 1 的解题方法来做，即旋转体体积$=\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}x$。其中，$a$、$b$分别为题中给的图形中的横坐标最小值和横坐标最大值；r为题中给的图形的所有边中离旋转轴最远的边（注意，不能是与旋转轴垂直的边）上的点到旋转轴的距离。

很明显，在本题中，$a=0$，$b=1$。那么r呢？

题中给的图形的所有边是$x=0$、$y=0$、$x+y=1$，那么从图形中看一下这三条边中的哪一条边离旋转轴（x轴）最远。

从图中可以很明显地看出，在$x=0$、$y=0$、$x+y=1$这三条边中，$x+y=1$和$x=0$都是离旋转轴最远的边。

“边到边的距离”这一说法是本人自创的，是为了给大家讲明白如何利用定积分求旋转体的体积。本人自创的“边到边的距离”这一说法的意思是：一条边上肯定有无数个点，点到边的距离就是过点往边上作垂线，垂足到点的距离，那么，边ab上那无数个点中，距离边cd最远的点到边cd的距离被本人称为边ab到边cd的距离。

现在回到本题上来，先给大家解释一下为什么在$x=0$、$y=0$、$x+y=1$这三条边中，$x+y=1$和$x=0$都是离旋转轴最远的边。

首先来看边$x+y=1$，边$x+y=1$上的无数个点中离旋转轴（x轴）最远的点是哪个点？明显是点$(0,1)$。这个点到旋转轴的距离是多少？很明显是 1。所以，边$x+y=1$到旋转轴的距离是 1。

现在再来看边$x=0$，边$x=0$上的无数个点中离旋转轴（x轴）最远的点是哪个点？明显也是点$(0,1)$。这个点到旋转轴的距离是多少？很明显是 1。所以，边x=0 到旋转轴的距离也是 1。

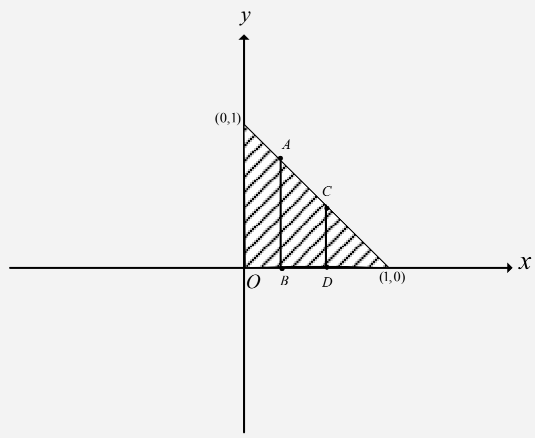
最后来看边$y=0$，边$y=0$上的无数个点中离旋转轴（x轴）最远的点是哪点？由于边$y=0$就位于旋转轴上，所以边$y=0$上的无数个点中的任意一个点离旋转轴的距离都是 0，边$y=0$到旋转轴的距离是 0。

综上所述，在$x=0$、$y=0$、$x+y=1$这三条边中，$x+y=1$和$x=0$都是离旋转轴最远的边。

那么继续看，之前给大家讲过，r是题中给的图形的所有边中离旋转轴最远的边（注意，不能是与旋转轴垂直的边）上的点到旋转轴的距离，那么对于本题来说，r到底是边$x+y=1$上的点到旋转轴的距离，还是边$x=0$上的点到旋转轴的距离？

大家看见括号里写的字了吗？括号里写的字是“不能是与旋转轴垂直的边”。在边$x+y=1$和边$x=0$中，边$x=0$是与旋转轴（x轴）垂直的边，所以不能是边$x=0$。因此，**r是边$x+y=1$上的点到旋转轴的距离。**

从图中可以看出，边$x+y=1$上的点到旋转轴（x轴）的距离并非一个定值。



例如，如果选的是点A，那么点A到旋转轴（x轴）的距离就是线段AB的长度；如果选的是点C，那么点C到旋转轴的距离就是线段CD的长度。但是，无论在边$x+y=1$上找的是哪个点，找的这个点到旋转轴的距离肯定是$1-x$。所以，$r=1-x$。

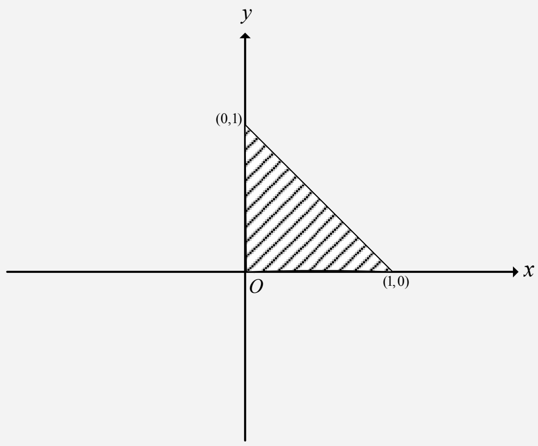
综上所述，$a=0$，$b=1$，$r=1-x$。现在把$a=0$、$b=1$、$r=1-x$代入$\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}x$中，即

$$\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \pi(1-x)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^1 \pi(1-x)^2 \mathrm{d}x$$
$$= -\pi\int_0^1 (1-x)^2 \mathrm{d}\ (1-x)$$
$$= -\pi \times \frac{(1-x)^3}{3}\bigg|_0^1 = -\pi[\frac{(1-x)^3}{3} - \frac{(1-0)^3}{3}]$$
$$= -\pi \times -(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{3}$$

由x轴、y轴、$x+y=1$所围成的封闭图形绕x轴旋转而成的旋转体的体积是$\frac{\pi}{3}$。

例. 求由x轴、y轴、$x+y=1$所围成的封闭图形绕y轴旋转而成的旋转体的体积。

解： 先在平面直角坐标系中把由x轴、y轴、$x+y=1$所围成的封闭图形画出来。



题中给的图形共由三条边组成，分别是$x=0$、$y=0$、$x+y=1$，$x=0$在题中给的轴（y轴）上，所以该图形绕该轴转完以后所得到的立体图形就是实心的。

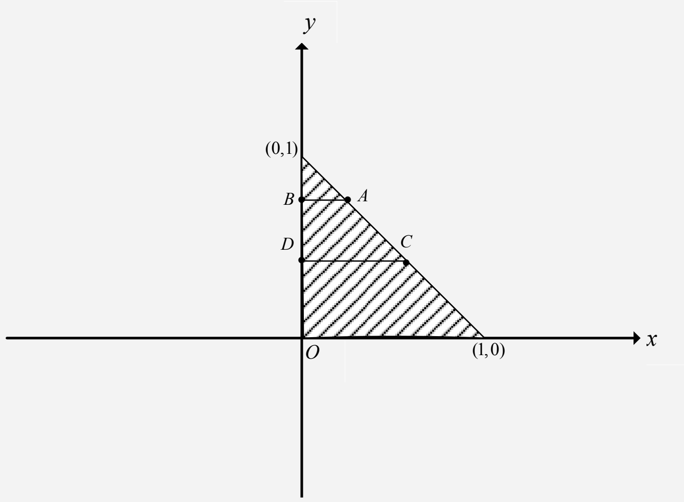
现在已经判断完是实心了，下面继续做。

本题明显属于情况 2（因为是绕y轴转，y轴肯定和y轴平行），所以应该按照情况 2 的解题方法来做，即旋转体体积$=\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}y$。其中，$a$、$b$分别为题中给的图形中的纵坐标最小值和纵坐标最大值；r为题中给的图形的所有边中离旋转轴最远的边（注意，不能是与旋转轴垂直的边）上的点到旋转轴的距离。

很明显，在本题中，$a=0$，$b=1$。那么r呢？

从图中可以很明显地看出，在$x=0$、$y=0$、$x+y=1$这三条边中，$x+y=1$和$y=0$都是离旋转轴（y轴）最远的边。因为边$y=0$是与旋转轴垂直的边，所以r**是边$x+y=1$上的点到旋转轴的距离。**

从图中可以看出，边$x+y=1$上的点到旋转轴（y轴）的距离并非一个定值。



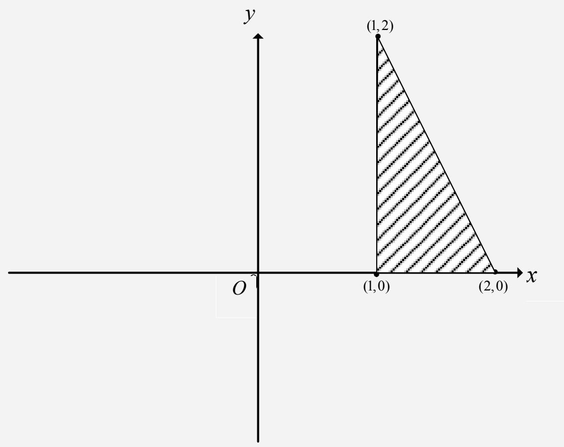
例如，如果选的是点A，那么点A到旋转轴（y轴）的距离就是线段AB的长度；如果选的是点C，那么点C到旋转轴的距离就是线段CD的长度。但是，无论在边$x+y=1$上找的是哪个点，找的这个点到旋转轴的距离肯定是$1-y$。所以，$r=1-y$。

综上所述，$a=0$，$b=1$，$r=1-y$。现在把 $a=0$、$b=1$、$r=1-y$ 代入 $\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}y$ 中，即

$$\begin{aligned}\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}y &= \int_0^1 \pi(1-y)^2 \mathrm{d}y = \pi\int_0^1 \pi(1-y)^2 \mathrm{d}y \\ &= -\pi\int_0^1 (1-y)^2 \mathrm{d}\ (1-y) \\ &= -\pi\times\frac{(1-y)^3}{3}\bigg|_0^1 = -\pi[\frac{(1-y)^3}{3}-\frac{(1-0)^3}{3}] \\ &= -\pi\times-(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

例. 求由 $x=1$、$y=0$、$y=-2x+4$ 所围成的封闭图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积。

解： 先在平面直角坐标系中把由 $x=1$、$y=0$、$y=-2x+4$ 所围成的封闭图形画出来。



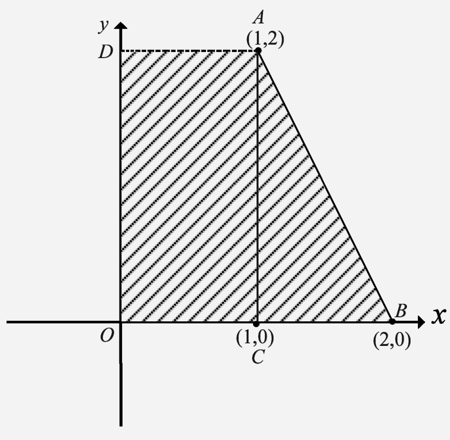
题中给的图形共由三条边组成，分别是 $x=1$、$y=0$、$y=-2x+4$，这三条边都不在题中给的轴（y 轴）上，所以该图形绕该轴转完以后所得到的立体图形是空心的。

现在已经判断完是空心了，下面继续做。

既然是空心的，那么该怎么办呢？之前给大家讲过：

如果是空心的，那么就把它补充成实心的，然后用两个实心相减就可以了。

对于本题来说，就是要把原封闭图形 ABC 补充成封闭图形 $ABOD$，如下图所示，这就成实心的了。然后用四边形 $ABOD$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积减去长方形 $ACOD$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积就可以了。



先来算四边形 $ABOD$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积。

这绕完肯定是实心的（因为其中有一条边在旋转轴 y 轴上），所以按照实心的方法来做就可以了。

这明显属于情况 2（因为是绕 y 轴转），所以应该按照情况 2 的解题方法来做，即旋转体体积 $=\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}y$。其中，$a$、$b$ 分别为题中给的图形中的纵坐标最小值和纵坐标最大值；r 为题中给的图形的所有边中离旋转轴最远的边（注意，不能是与旋转轴垂直的边）上的点到旋转轴的距离。

很明显，此时 $a=0$，$b=2$。那么 r 呢？

四边形 $ABOD$ 的所有边是 $x=0$、$y=0$、$y=2$、$y=-2x+4$。从图中可以很明显地看出，在这四条边中，$y=-2x+4$ 和 $y=0$ 都是离旋转轴（y 轴）最远的边。因为边 $y=0$ 是与旋转轴垂直的边，所以 **r 是边 $y=-2x+4$ 上的点到旋转轴的距离。**

从图中可以看出，边 $y=-2x+4$ 上的点到旋转轴（y 轴）的距离并非一个定值。但是，无论在边 $y=-2x+4$ 上找的是哪个点，找的这个点到旋转轴的距离肯定是 $\frac{4-y}{2}$。所以，$r=\frac{4-y}{2}$。

综上所述，$a=0$，$b=2$，$r=\frac{4-y}{2}$。现在把 $a=0$、$b=2$、$r=\frac{4-y}{2}$ 代入 $\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}y$ 中，即

$$\begin{aligned}\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}y &= \int_0^2 \pi(4-y)^2 \mathrm{d}y = \pi\int_0^2 \pi(4-y)^2 \mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^2 (4-y)^2 \mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}\int_0^2 (4-y)^2 \mathrm{d}\,(4-y) \\ &= -\frac{\pi}{4}\times\frac{(4-y)^3}{3}\bigg|_0^2 = -\frac{\pi}{4}\times[\frac{(4-2)^3}{3}-\frac{(4-0)^3}{3}] \\ &= -\frac{\pi}{4}\times-(\frac{56}{3}) = \frac{14}{3}\pi\end{aligned}$$

再来算长方形 $ACOD$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积。这绕完肯定是实心的（因为其中有一条边在旋转轴 y 轴上），所以按照实心的方法来做就可以了。

这明显属于情况 2（因为是绕 y 轴转），所以应该按照情况 2 的解题方法来做，即旋转体体积 $=\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}y$。其中，$a$、$b$ 分别为题中给的图形中的纵坐标最小值和纵坐标最大值；r 为题中给的图形的所有边中离旋转轴最远的边（注意，不能是与旋转轴垂直的边）上的点到旋转轴的距离。

很明显，此时 $a=0$，$b=2$。那么 r 呢？

长方形 $ACOD$ 的所有边是 $x=0$、$y=0$、$y=2$、$x=1$。从图中可以很明显地看出，在这四条边中，$y=2$、$y=0$ 和 $x=1$ 都是离旋转轴（y 轴）最远的边。因为边 $y=0$ 和边 $y=2$ 是与旋转轴垂直的边，所以 **r 是边 $x=1$ 上的点到旋转轴的距离。**

从图中可以看出，边 $x=1$ 上的点到旋转轴（y 轴）的距离是一个定值，即 1。

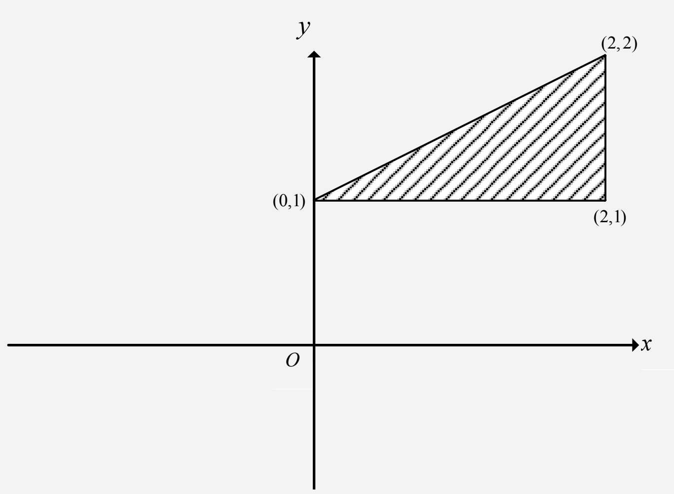
综上所述，$a=0$，$b=2$，$r=1$。现在把 $a=0$、$b=2$、$r=1$ 代入 $\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}y$ 中，即

$$\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}y = \int_0^2 \pi(1)^2 \mathrm{d}y = \pi\int_0^2 1^2 \mathrm{d}y = \pi y\Big|_0^2 = \pi(2-0) = 2\pi$$

所以，本题最终的答案为 $\frac{14}{3}\pi-2\pi=\frac{8}{3}\pi$。

例. 求由 $x=2$、$y=1$、$y=\frac{1}{2}x+1$ 所围成的封闭图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积。

解：先在平面直角坐标系中把由 $x=2$、$y=1$、$y=\frac{1}{2}x+1$ 所围成的封闭图形画出来。

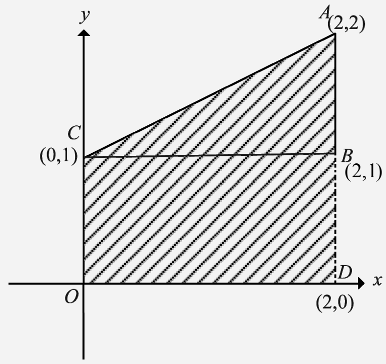


题中给的图形共由三条边组成，分别是 $x=2$、$y=1$、$y=\frac{1}{2}x+1$，这三条边都不在题中给的轴（x 轴）上，所以该图形绕该轴转完以后所得到的立体图形是空心的。

现在已经判断完是空心了，下面继续做。

既然是空心的，那么就把它补充成实心的，然后用两个实心相减就可以了。

对于本题来说，就是要把原封闭图形 ABC 补充成封闭图形 $ADOC$，如下图所示，这就成实心的了。然后用四边形 $ADOC$ 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积减去长方形 $BDOC$ 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积就可以了。



先来算四边形 $ADOC$ 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积。这绕完肯定是实心的（因为其中有一条边在旋转轴 x 轴上），所以按照实心的方法来做就可以了。

这明显属于情况 1（因为是绕 x 轴转），所以应该按照情况 1 的解题方法来做，即旋转体体积 $=\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}x$。其中，$a$、$b$ 分别为题中给的图形中的横坐标最小值和横坐标最大值；r 为题中给的图形的所有边中离旋转轴最远的边（注意，不能是与旋转轴垂直的边）上的点到旋转轴的距离。

很明显，此时 $a=0$，$b=2$。那么 r 呢？

四边形 $ADOC$ 的所有边是 $x=0$、$x=2$、$y=0$、$y=\frac{1}{2}x+1$。从图中可以很明显地看出，在这四条边中，$x=2$ 和 $y=\frac{1}{2}x+1$ 都是离旋转轴（x 轴）最远的边。因为边 $x=2$ 是与旋转轴垂直的边，所以 **r 是边 $y=\frac{1}{2}x+1$ 上的点到旋转轴的距离。**

从图中可以看出，边 $y=\frac{1}{2}x+1$ 上的点到旋转轴的距离并非一个定值。但是，无论在边 $y=\frac{1}{2}x+1$ 上找的是哪个点，找的这个点到旋转轴的距离肯定是 $\frac{1}{2}x+1$。所以，$r=\frac{1}{2}x+1$。

综上所述，$a=0$，$b=2$，$r=\frac{1}{2}x+1$。现在把 $a=0$、$b=2$、$r=\frac{1}{2}x+1$ 代入 $\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}x$ 中，即

$$\begin{aligned}\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}y &= \int_0^2 \pi(\frac{1}{2}x-1)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^2(\frac{1}{2}x+1)^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi\int_0^2(\frac{1}{4}x^2+x+1)\mathrm{d}x = \pi\times[\int_0^2 \frac{1}{4}x^2 \mathrm{d}x + \int_0^2 x\mathrm{d}x + \int_0^2 1\mathrm{d}x] \\ &= \pi\times(\frac{1}{12}x^3\Big|_0^2 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 + x\Big|_0^2) = \pi\times(\frac{2}{3}+2+2) \\ &= -\frac{14}{3}\pi\end{aligned}$$

再来算**长方形 $BDOC$ 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积**。这绕完肯定是实心的（因为其中有一条边在旋转轴 x 轴上），所以按照实心的方法来做就可以了。

这明显属于情况 1（因为是绕 x 轴转），所以应该按照情况 1 的解题方法来做，即旋转体体积 $=\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}x$。其中，$a$、$b$ 分别为题中给的图形中的横坐标最小值和横坐标最大值；r 为题中给的图形的所有边中离旋转轴最远的边（注意，不能是与旋转轴垂直的边）上的点到旋转轴的距离。

很明显，此时 $a=0$，$b=2$。那么 r 呢？

长方形 $BDOC$ 的所有边是 $x=0$、$y=0$、$x=2$、$y=1$，从图中可以很明显地看出，在这四条边中，$x=2$、$x=0$ 和 $y=1$ 都是离旋转轴（x 轴）最远的边。因为边 $x=0$ 和边 $x=2$ 是与旋转轴垂直的边，所以 **r 是边 $y=1$ 上的点到旋转轴的距离。**

从图中可以看出，边 $y=1$ 上的点到旋转轴（x 轴）的距离是一个定值，即 1。

综上所述，$a=0$，$b=2$，$r=1$。现在把 $a=0$、$b=2$、$r=1$ 代入 $\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}x$ 中，即

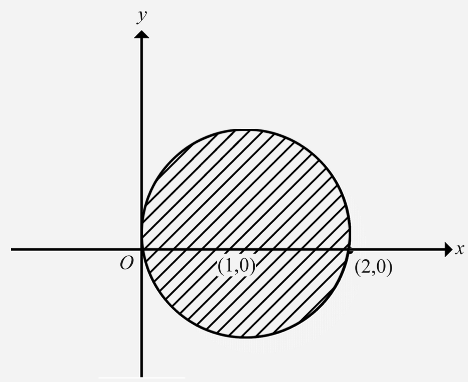
$$\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}x=\int_0^2 \pi 1^2 \mathrm{d}x=\pi\int_0^2 1\mathrm{d}x=\pi x\Big|_0^2=\pi(2-0)=2\pi$$

所以，本题最终的答案为 $\frac{14}{3}\pi-2\pi=\frac{8}{3}\pi$。

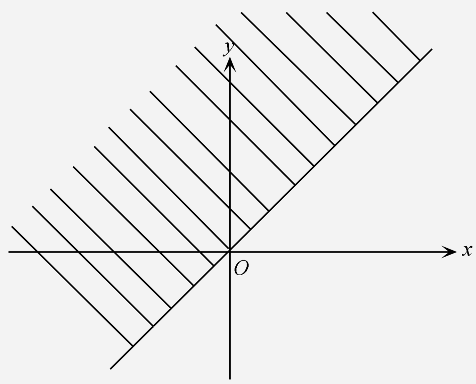
例. 求由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 确定的平面图形绕 $x=2$ 旋转而成的旋转体的体积。

解： 先在平面直角坐标系中把由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 确定的平面图形画出来。要想画出由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 确定的平面图形，就要分别画一下 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 的图形和 $y\geqslant x$ 的图形。

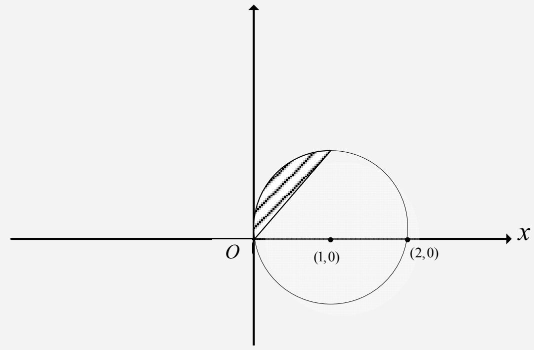
先来画一下 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 的图形。$x^2+y^2\leqslant 2x$ 可以整理为 $(x-1)^2+y^2\leqslant 1$。所以，$x^2+y^2\leqslant 2x$ 的图形是一个圆心在 $(1,0)$ 且半径为 1 的圆的内部，如下图所示。



再来画一下 $y\geqslant x$ 的图形。$y\geqslant x$ 的图形是直线 $y=x$ 的上方，如下图所示。



以上两个图取公共部分，就是由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 确定的平面图形，如下图中的阴影区域所示。

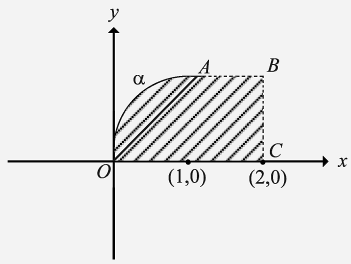


题中给的图形共由两条边组成，分别是 $y=x$ 、$(x-1)^2+y^2=1$，这两条边都不在题中给的轴（$x=2$）上，所以该图形绕该轴转完以后所得到的立体图形是空心的。

现在已经判断完是空心了，下面继续做。

既然是空心的，**那么就把它补充成实心的，然后用两个实心相减就可以了。**

对于本题来说，就是要把原封闭图形 OαA 补充成封闭图形 $O\alpha ABC$，如下图所示，这就成实心的了。然后用封闭图形 OαABC 绕 x=2 旋转而成的旋转体的体积减去四边形 $OABC$ 绕 x=2 旋转而成的旋转体的体积就可以了。



先来算封闭图形 $O\alpha ABC$ **绕 $x=2$ 旋转而成的旋转体的体积。**这绕完肯定是实心的（因为其中有一条边在旋转轴 $x=2$ 上），所以按照实心的方法来做就可以了。

这明显属于情况 2（因为是绕 $x=2$ 转，$x=2$ 肯定和 y 轴平行），所以应该按照情况 2 的解题方法来做，即旋转体体积 $=\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}y$ 。其中，a、b 分别为题中给的图形中的纵坐标最小值和纵坐标最大值；r 为题中给的图形的所有边中离旋转轴最远的边（注意，不能是与旋转轴垂直的边）上的点到旋转轴的距离。

很明显，此时 $a=0$，$b=1$。那么 r 呢？

封闭图形 $O\alpha ABC$ 的所有边是 $y=0$ 、$y=1$ 、$x=2$ 、$(x-1)^2+y^2=1$，从图中可以很明显地看出，在这四条边中，$(x-1)^2+y^2=1$ 和 $y=0$ 都是离旋转轴（x=2）最远的边。因为边 $y=0$ 是与旋转轴垂直的边，所以 r **是边 $(x-1)^2+y^2=1$ 上的点到旋转轴的距离。**

从图中可以看出，边 $(x-1)^2+y^2=1$ 上的点到旋转轴($x=2$)的距离并非一个定值。但是，无论在边 $(x-1)^2+y^2=1$ 上找的是哪个点，找的这个点到旋转轴的距离肯定是 $2-(1-\sqrt{1-y^2})$。所以，$r=2-(1-\sqrt{1-y^2})$。

综上所述，$a=0$，$b=1$，$r=2-(1-\sqrt{1-y^2})$。现在把 $a=0$ 、$b=1$ 、$r=2-(1-\sqrt{1-y^2})$ 代入 $\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}y$ 中，即

$$\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}y=\int_0^1 \pi[2-(1-\sqrt{1-y^2})]^2 \mathrm{d}y=\frac{5}{3}\pi+\frac{1}{2}\pi^2$$

再来算四边形 $OABC$ 绕 $x=2$ 旋转而成的旋转体的体积。这绕完肯定是实心的(因为其中有一条边在旋转轴 $x=2$ 上)，所以按照实心的方法来做就可以了。

这明显属于情况 2（因为是绕 $x=2$ 转，$x=2$ 肯定和 y 轴平行），所以我们应该按照情况 2 的解题方法来做，即旋转体体积 $=\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}y$ 。其中，a、b 分别为题中给的图形中的纵坐标最小值和纵坐标最大值；r 为题中给的图形的所有边中离旋转轴最远的边（注意，不能是与旋转轴垂直的边）上的点到旋转轴的距离。

很明显，此时 $a=0$，$b=1$。那么 r 呢？

四边形 $OABC$ 的所有边是 $y=0$ 、$y=1$ 、$x=2$ 、$y=x$，从图中可以很明显地看出，在这四条边中，$y=0$ 和 $y=x$ 都是离旋转轴（x=2）最远的边。因为边 $y=0$ 是与旋转轴垂直的边，所以 r **是边 $y=x$ 上的点到旋转轴的距离。**

从图中可以看出，边 $y=x$ 上的点到旋转轴($x=2$)的距离并不是一个定值。但是，无论在边 $y=x$ 上找的是哪个点，找的这个点到旋转轴的距离肯定是 $2-y$。所以，$r=2-y$。

综上所述，$a=0$，$b=1$，$r=2-y$。现在把 $a=0$ 、$b=1$ 、$r=2-y$ 代入 $\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}y$ 中，即

$$\int_a^b \pi r^2 \mathrm{d}y=\int_0^1 \pi(2-y)^2 \mathrm{d}y=\frac{7}{3}\pi$$

所以，本题最终的答案为 $\frac{5}{3}\pi+\frac{1}{2}\pi^2-\frac{7}{3}\pi=\frac{1}{2}\pi^2-\frac{2}{3}\pi$ 。

4.7 求被积函数中含绝对值的定积分与反常积分

有时，一道定积分的题或一道反常积分的题的被积函数中含有绝对值，那么这样的题应该怎么做呢？

很简单，令绝对值里面的值等于 0，解出 x，然后利用公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 来做就可以了。

下面来看例题。

例. 请计算定积分 $\int_{-2}^{3}2|x-1|\,\mathrm{d}x$。

解： 题中所给的定积分 $\int_{-2}^{3}2|x-1|\,\mathrm{d}x$ 的被积函数 $2|x-1|$ 中含有绝对值，所以令绝对值里面的值等于 0。绝对值里面是 $x-1$，所以令 $x-1=0$，解得 $x=1$。这说明 1 是一个分界点。

所以

$$\int_{-2}^{3}2|x-1|\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}2|x-1|\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}2|x-1|\,\mathrm{d}x \qquad （1）式$$

下面继续做。

$\int_{-2}^{1}2|x-1|\,\mathrm{d}x$ 的下限是 -2，上限是 1，说明 $2|x-1|$ 中的 x 是在区间 $[-2,1]$ 内取值，所以 $2|x-1|=2(1-x)$。因此，$\int_{-2}^{1}2|x-1|\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}2(1-x)\,\mathrm{d}x$。

$\int_{1}^{3}2|x-1|\,\mathrm{d}x$ 的下限是 1，上限是 3，说明 $2|x-1|$ 中的 x 是在区间 $[1,3]$ 内取值，所以 $2|x-1|=2(x-1)$。因此，$\int_{1}^{3}2|x-1|\,\mathrm{d}x=\int_{1}^{3}2(x-1)\,\mathrm{d}x$。

现在把 $\int_{-2}^{1}2|x-1|\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}2(x-1)\,\mathrm{d}x$、$\int_{1}^{3}2|x-1|\,\mathrm{d}x=\int_{1}^{3}2(x-1)\,\mathrm{d}x$ 代入（1）式，得

$$\int_{-2}^{3}2|x-1|\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}2(1-x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}2(x-1)\,\mathrm{d}x \qquad （2）式$$

现在不含绝对值了，本题做到这里再往下做就很简单了。

通过计算可知，$\int_{-2}^{1}2(1-x)\,\mathrm{d}x=9$，$\int_{1}^{3}2(x-1)\,\mathrm{d}x=4$。

把 $\int_{-2}^{1}2(1-x)\,\mathrm{d}x=9$、$\int_{1}^{3}2(x-1)\,\mathrm{d}x=4$ 代入（2）式中，得

$$\int_{-2}^{3}2|x-1|\,\mathrm{d}x=9+4=13 \qquad （3）式$$

例. 请计算反常积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}\,\mathrm{d}x$。

解： 题中说了"反常积分"这四个字，其实就算题中没有说，也能够判断出本题属于一道反常积分的计算题。为何呢？因为之前给大家讲过判断反常积分的方法。

对于某个"$\int_{\square}^{\square}f(x)\,\mathrm{d}x$"来说，如果是以下两种情况之一，那么它就是反常积分。否则，它就是定积分。

情况 1：两个方框中的其中一个方框中是 ∞，或者两个方框中都是 ∞。

情况 2：两个方框中都是常数，$f(x)$ 在这两个方框所组成的闭区间中存在没有定义的点，并且 $\lim\limits_{x\to\text{此点}}f(x)=\infty$。

本题中的被积函数 $\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}$ 很明显在 $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ 中的 1 处没有定义，$\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}=\infty$ 属于情况 2。所以，就算题中没说"反常积分"这四个字，大家也能够判断出本题属于一道反常积分的计算题。

那么这道题应该怎么做呢？

有的同学说："在讲反常积分的计算方法那一节，曾将反常积分分为三类，本题明显属于第三类，所以应该一上来就按照第三类反常积分的计算方法来做。"

我的回答是："错！"大家记住，以后凡是碰到含绝对值的定积分的题或反常积分的题，一上来一定要先按照本节所讲的方法去掉绝对值。

那么现在就按照本节所讲的方法把绝对值去掉。

反常积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} \mathrm{d}x$ 的被积函数 $\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}$ 中含有绝对值，所以令绝对值里面的值等于 0。绝对值里面是 $x-x^2$，所以令 $x-x^2=0$，解得 $x=1$ 或 $x=0$，但 0 不在区间 $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ 内，舍去。这说明 1 是一个分界点。

所以

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} \mathrm{d}x + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} \mathrm{d}x \qquad \text{（1）式}$$

下面继续做。

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} \mathrm{d}x$ 的下限是 $\frac{1}{2}$，上限是1，说明 $\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}$ 中的 x 是在区间 $[\frac{1}{2},1]$ 内取值，所以 $\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$，因此 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \mathrm{d}x$。

$\int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} \mathrm{d}x$ 的下限是1，上限是 $\frac{3}{2}$，说明 $\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}$ 中的 x 是在区间 $[1,\frac{3}{2}]$ 内取值，所以 $\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}$。因此，$\int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} \mathrm{d}x = \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}} \mathrm{d}x$。

现在把 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \mathrm{d}x$、$\int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} \mathrm{d}x = \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}} \mathrm{d}x$ 代入（1）式，得

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \mathrm{d}x + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}} \mathrm{d}x \qquad \text{（2）式}$$

现在不含绝对值了，本题做到这里再往下做就很简单了。下面就是要计算出 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \mathrm{d}x$ 和 $\int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}} \mathrm{d}x$，然后把它们加起来就可以了。$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \mathrm{d}x$ 和 $\int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}} \mathrm{d}x$ 都是第一类反常积分，所以就按照之前讲过的第一类反常积分的计算方法来做就可以了。

通过计算可知，$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$，$\int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}} \mathrm{d}x = \ln(2+\sqrt{3})$。

把 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$、$\int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}} \mathrm{d}x = \ln(2+\sqrt{3})$ 代入（2）式中，得

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3}) \qquad \text{（3）式}$$

4.8　两个重要知识点

本节分为两个小节，每个小节给大家讲一个重要知识点。

4.8.1　原函数的存在性

在给大家讲原函数的存在性之前，先带大家复习一下什么叫原函数。

如果在某区间上 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在该区间的原函数。

例. 在区间 $(0,+\infty)$ 内，$\ln x$ 就是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数。

例. 在区间 $(-\infty,0)$ 内，$\ln(-x)$ 就是 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数。

例. 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内，x^3 就是 $3x^2$ 的一个原函数。

想必大家现在已经想起来什么叫原函数了。

现在再带大家复习一个知识点：若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在某区间的一个原函数，则 $F(x)+C$ 为 $f(x)$ 在该区间的所有原函数（C 为任意常数）。

例. 由于在区间 $(0,+\infty)$ 内 $\ln x$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数，所以在区间 $(0,+\infty)$ 内 $\ln x+C$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的所有原函数（C 为任意常数）。

例. 由于在区间 $(-\infty,0)$ 内 $\ln(-x)$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数，所以在区间 $(-\infty,0)$ 内 $\ln(-x)+C$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的所有原函数（C 为任意常数）。

例. 由于在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内 x^3 是 $3x^2$ 的一个原函数，所以在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内 x^3+C 是 $3x^2$ 的所有原函数（C 为任意常数）。

现在正式给大家讲原函数的存在性，其实就三句话。

第一句话：如果函数 $f(x)$ 在某区间内连续，那么函数 $f(x)$ 在该区间内必存在原函数。

第二句话：如果函数 $f(x)$ 在某区间内有第一类间断点（第一类间断点包括可去间断点和跳跃间断点，这在之前都讲过），那么函数 $f(x)$ 在该区间内必不存在原函数。

第三句话：如果函数 $f(x)$ 在某区间内只有第二类间断点而没有第一类间断点，那么函数 $f(x)$ 在该区间内存不存在原函数就说不好了。

下面来看例题。

例. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x<0\\ A, & x=0\\ \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\dfrac{1}{2} & x>0\end{cases}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内存在原函数，求常数 A 并求 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的原函数。

解： 本题有两问。第一问让求常数 A，第二问让求 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的原函数。

先来看第一问。

由于题中明确说“$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x<0\\ A, & x=0\\ \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\dfrac{1}{2} & x>0\end{cases}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内存在原函数”，所以根据本小节所讲的知识可知，要么 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，要么 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内只有第二类间断点而没有第一类间断点。

对于分段函数来说，非分段点处一定是连续的。那么对于本题来说，函数 $f(x)$ 的非分段点是 $x<0$ 和 $x>0$，所以函数 $f(x)$ 在非分段点 $x<0$ 和 $x>0$ 上一定连续。那么只需要关注分段点 $x=0$ 就行了。

也就是说，要么 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，那么根据本小节所讲的第一句话，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内必然存在原函数；要么 $x=0$ 处是 $f(x)$ 的第二类间断点，那么根据本小节所讲的第三句话，函数 $f(x)$ 也有可能在 $(-\infty,+\infty)$ 内存在原函数。

通过计算可知

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}[\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{2}]=0$$

所以，这就说明 $x=0$ 处绝不可能是函数 $f(x)$ 的第二类间断点， $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

根据连续的定义，有

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0) \qquad （1）式$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$，所以

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0 \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$f(0)=0 \qquad （3）式$$

由于函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x<0\\ A, & x=0\\ \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\dfrac{1}{2} & x>0\end{cases}$，所以

$$f(0)=A \qquad （4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$A=0 \qquad （5）式$$

再来看第二问。

第二问让求 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的原函数。大家注意，这一问就和本小节所讲的知识没有任何关系了。本小节所讨论的是何时存在原函数，而这一问是已知原函数存在了，让把原函数求出来。

那么这一问应该如何去做呢？

大家记住，以后凡是给出了函数 $f(x)$，让求其原函数，做法如下。

情况 1：如果 $f(x)$ 不是分段函数，那么就直接对 $f(x)$ 进行不定积分。

情况 2：如果 $f(x)$ 是分段函数，那么就分段对 $f(x)$ 进行不定积分。但是一定要注意，分段点千万别进行不定积分，只要把非分段点算出的结果“接”成连续的就可以了。

对于本题而言，本题所给的函数 $f(x)$ 是一个分段函数，属于情况 2。

$x<0$ 时，有

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sin x}{x}+C_1 \text{（计算过程省略）} \qquad （6）式$$

$x>0$ 时，有

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int[\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{2}]\,\mathrm{d}x=1-\frac{\ln(1+x)}{x}-\ln(1+x)+\frac{1}{2}x+C_2 \text{（计算过程省略）} \qquad （7）式$$

接下来该怎么做？

有的同学认为，接下来这么做： $x>0$ 时， $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int 0\,\mathrm{d}x=0$。

完全错误！这时应该按情况 2 所讲去做。正确的做法应该是把非分段点算出的结果“接”成连续的。

换言之，如果记本题最后要求的函数 [也就是函数 $f(x)$的原函数] 为 $F(x)$，那么 $F(x)$ 的形式一定是

$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}+C_1, & x<0\\ \text{未知}, & x=0\\ 1-\dfrac{\ln(1+x)}{x}-\ln(1+x)+\dfrac{1}{2}x+C_2, & x>0\end{cases}$。现在要做的就是确定出 C_1、C_2 和“未知”，使函数 $F(x)$ 在分段点 $x=0$ 处连续。

现在大家应该明白了，那么继续做。

所谓连续，指的是极限值等于函数值。既然极限值等于函数值，那就说明极限值肯定存在，所以左右极限相等，则有

$$\lim_{x\to 0^-}(\frac{\sin x}{x}+C_1)=\lim_{x\to 0^+}[1-\frac{\ln(1+x)}{x}-\ln(1+x)+\frac{1}{2}x+C_2] \qquad （8）式$$

计算结果为$1+C_1=C_2$。

现在让C_1任意取一个常数，假设就取$C_1=0$（当然取别的数也行），那么随之$C_2=1$（如果C_1取的不是0而是别的数，那么C_2也会随之改变）。

这时，由于$1+C_1=1$，$C_2=1$，那么也就是说左右极限都是1，即极限值为1。

既然要连续，那么函数值就得等于极限值，所以“未知”就也为1。

所以，函数$f(x)$的原函数为

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ 2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}-\ln(1+x)+\dfrac{1}{2}x, & x>0\end{cases} \qquad （9）式$$

到此，本题基本做完了。注意，用的词是“基本”，还没完全做完。那还差什么呢？这里求出的$F(x)$只是$f(x)$的其中一个原函数而已，要把$f(x)$的所有原函数表示出来。所以，最终的答案为$F(x)+C$（C为任意常数）。

例. 已知$f(x)=\big|1-|x|\big|$，求$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内的原函数。

解： 事先声明，本题与本小节所讲的知识点（原函数的存在性）没有任何关系，之所以把这道题列在这儿是为了让大家再巩固一下刚才那道题中所讲的求原函数的方法。

首先，把函数$f(x)$写为分段函数的形式，即

$$f(x)=\begin{cases}-x-1, & x\leqslant -1\\ x+1, & -1<x\leqslant 0\\ 1-x, & 0<x\leqslant 1\\ x-1, & x>1\end{cases} \qquad （1）式$$

在上一道题中，已经给出了求函数$f(x)$的原函数的方法，做法如下。

情况1：如果$f(x)$不是分段函数，那么就直接对$f(x)$进行不定积分。

情况2：如果$f(x)$是分段函数，那么就分段对$f(x)$进行不定积分。但是一定要注意，分段点千万别进行不定积分，只要把非分段点算出的结果“接”成连续的就可以了。

对于本题而言，本题所给的函数$f(x)$是一个分段函数，属于情况2。

$x<-1$时，有

$$\int f(x)\,dx=\int(-x-1)\,dx=-\frac{x^2}{2}-x+C_1 \qquad （2）式$$

$-1<x<0$时，有

$$\int f(x)\,dx=\int(x+1)\,dx=\frac{1}{2}x^2+x+C_2 \qquad （3）式$$

$0<x<1$时，有

$$\int f(x)\,dx=\int(1-x)\,dx=x-\frac{1}{2}x^2+C_3 \qquad （4）式$$

$x>1$时，有

$$\int f(x)\,dx=\int(x-1)\,dx=\frac{1}{2}x^2-x+C_4 \qquad （5）式$$

接下来，把非分段点算出的结果“接”成连续的。

如果记本题最后要求的函数[也就是函数$f(x)$的原函数]为$F(x)$，那么$F(x)$的形式一定是

$$F(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}-x+C_1, & x<-1\\ \text{未知1}, & x=-1\\ \dfrac{1}{2}x^2+x+C_2, & -1<x<0\\ \text{未知2}, & x=0\\ x-\dfrac{1}{2}x^2+C_3, & 0<x<1\\ \text{未知3}, & x=1\\ \dfrac{1}{2}x^2-x+C_4, & x>1\end{cases}\text{。}$$

现在要做的就是确定出 C_1、C_2、C_3、C_4、“未知1”、“未知2”、“未知3”，使函数 $F(x)$ 在分段点 $x=-1$、$x=0$、$x=1$ 处连续。

所谓连续，指的是极限值等于函数值。既然极限值等于函数值，那就说明极限值肯定存在，所以左右极限相等，则有

$$\lim_{x\to-1^-}F(x)=\lim_{x\to-1^+}F(x) \qquad \text{（6）式}$$

$$\lim_{x\to0^-}F(x)=\lim_{x\to0^+}F(x) \qquad \text{（7）式}$$

$$\lim_{x\to1^-}F(x)=\lim_{x\to1^+}F(x) \qquad \text{（8）式}$$

计算结果为

$$\frac{1}{2}+C_1=-\frac{1}{2}+C_2 \qquad \text{（9）式}$$

$$C_2=C_3 \qquad \text{（10）式}$$

$$\frac{1}{2}+C_3=-\frac{1}{2}+C_4 \qquad \text{（11）式}$$

现在让 C_1 任意取一个常数，假设就取 $C_1=0$（当然取别的数也行），那么随之 $C_2=1$，$C_3=1$，$C_4=2$。

把求出的这几个值代入上式可求得 $\lim\limits_{x\to-1}F(x)=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to0}F(x)=1$，$\lim\limits_{x\to1}F(x)=\dfrac{3}{2}$。

既然要连续，那么函数值就得等于极限值，所以“未知 1” $=\dfrac{1}{2}$，“未知 2” $=1$，“未知 3” $=\dfrac{3}{2}$。

所以，函数 $f(x)$的原函数为

$$F(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}-x, & x<-1\\ \dfrac{1}{2}, & x=-1\\ \dfrac{1}{2}x^2+x+1, & -1<x<0\\ 1, & x=0\\ x-\dfrac{1}{2}x^2+1, & 0<x<1\\ \dfrac{3}{2}, & x=1\\ \dfrac{1}{2}x^2-x+2, & x>1\end{cases} \qquad \text{（12）式}$$

这里求出的 $F(x)$ 只是 $f(x)$ 的其中一个原函数而已，要把 $f(x)$ 的所有原函数表示出来。所以，最终的答案为 $F(x)+C$（C 为任意常数）。

例. 已知 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\geqslant0\\ x, & x<0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，请判断

（1）在区间 $[-1,1]$ 上 $f(x)$ 是否存在原函数；

（2）在区间 $[-1,1]$ 上 $g(x)$ 是否存在原函数。

解：先来看第（1）问，看看在区间$[-1,1]$上$f(x)$是否存在原函数。

通过计算可知，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x=\mathrm{e}^0=1$。

所以，$x=0$是函数$f(x)$的跳跃间断点，跳跃间断点属于第一类间断点。由于函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上存在第一类间断点，所以根据本小节所讲的第二句话可知，函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上不存在原函数。

再来看第（2）问，看看在区间$[-1,1]$上$g(x)$是否存在原函数。

由于$g(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，所以$g(x)$是一个分段函数。分段函数在非分段点处一定连续，所以函数$g(x)$在区间$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上连续。既然函数$g(x)$在区间$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上都连续，则函数$g(x)$必然在区间$[-1,0)\cup(0,1]$上连续。

现在来判断一下函数$g(x)$在$x=0$处的连续性。

先来算函数值。

由于$g(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，所以$g(0)=0$。

再来算极限值。

由于$g(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，所以$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\dfrac{1}{x})=0$。

有的同学不理解为什么$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\dfrac{1}{x})=0$，那么我现在告诉大家，函数极限的计算方法中的方法1（基本计算方法）中的九个小技巧中的小技巧3说得很清楚，$0\times$有界=0。

由于$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$=g(0)，也就是说极限值和函数值相等，所以函数$g(x)$在$x=0$处连续。

由于函数$g(x)$在区间$[-1,0)\cup(0,1]$上连续，并且函数$g(x)$在$x=0$处也连续，所以函数$g(x)$在区间$[-1,1]$上连续。由于函数$g(x)$在区间$[-1,1]$上连续，所以根据本小节所讲的第一句话可知，函数$g(x)$在区间$[-1,1]$上存在原函数。

4.8.2 对称区间上奇偶函数的定积分与反常积分

先来给大家讲一下什么叫关于原点对称的区间。

例如，区间$(-5,5)$、区间$[-5,5]$、区间$(-5,0)\cup(0,5)$、区间$(-\infty,+\infty)$、区间$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，这五个区间都是关于原点对称的区间。

接下来再给大家讲一下奇函数和偶函数。

首先，大家先明白一点，无论是奇函数还是偶函数，都必须是在关于原点对称的区间上的。例如，函数$f(x)$在某区间上是奇函数，那么该区间一定是关于原点对称的区间。再例如，函数$f(x)$在某区间上是偶函数，那么该区间也一定是关于原点对称的区间。

现在正式解释什么叫奇函数、什么叫偶函数。

奇函数：如果函数$f(x)$在某关于原点对称的区间上有定义，且在该区间上满足$f(-x)=-f(x)$，则称函数$f(x)$在该区间上是奇函数。

偶函数：如果函数$f(x)$在某关于原点对称的区间上有定义，且在该区间上满足$f(-x)=f(x)$，则称函数$f(x)$在该区间上是偶函数。

下面来看例题。

例. 请判断函数$f(x)=x$在区间$[1,4]$上是奇函数还是偶函数。

解：由于本题所给的区间$[1,4]$根本就不是关于原点对称的区间，所以函数$f(x)=x$在该区间上既不是奇函数也不是偶函数。而且别说$f(x)=x$这个函数了，就算是任何一个函数，在区间$[1,4]$上都既不是奇函数也不是偶函数。

例. 请判断函数 $f(x)=x+3$ 在区间 $[-1,1]$ 上是奇函数还是偶函数。

解： 本题所给的区间 $[-1,1]$ 是关于原点对称的区间，所以现在看看在该区间上到底是满足 $f(-x)=-f(x)$ 还是满足 $f(-x)=f(x)$。

由于 $f(x)=x+3$，所以 $f(-x)=-x+3$。由于 $f(x)=x+3$，所以 $-f(x)=-x-3$。

由此可知，$f(-x)\neq -f(x)$，$f(-x)\neq f(x)$，所以函数 $f(x)=x+3$ 在区间 $[-1,1]$ 上既不是奇函数也不是偶函数（尽管题中所给的区间 $[-1,1]$ 是关于原点对称的区间）。

例. 请判断函数 $f(x)=x$ 在区间 $[-1,1]$ 上是奇函数还是偶函数。

解： 本题所给的区间 $[-1,1]$ 是关于原点对称的区间，所以现在看看在该区间上到底是满足 $f(-x)=-f(x)$ 还是满足 $f(-x)=f(x)$。

由于 $f(x)=x$，所以 $f(-x)=-x$。由于 $f(x)=x$，所以 $-f(x)=-x$。

由此可知，$f(-x)=-f(x)$，所以函数 $f(x)=x$ 在区间 $[-1,1]$ 上是奇函数。

例. 请判断函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[-1,1]$ 上是奇函数还是偶函数。

解： 本题所给的区间 $[-1,1]$ 是关于原点对称的区间，所以现在看看在该区间上到底是满足 $f(-x)=-f(x)$ 还是满足 $f(-x)=f(x)$。

由于 $f(x)=x^2$，所以 $f(-x)=(-x)^2=x^2$。由于 $f(x)=x^2$，所以 $-f(x)=-x^2$。

由此可知，$f(-x)=f(x)$，所以函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[-1,1]$ 上是偶函数。

想必大家现在对于奇函数和偶函数的定义已经很清楚了。接下来，再来给大家讲一下关于奇函数和偶函数的运算。

奇函数×奇函数＝偶函数

奇函数×偶函数＝奇函数

偶函数×偶函数＝偶函数

$$\frac{\textbf{奇函数}}{\textbf{奇函数}}=\textbf{偶函数}$$

$$\frac{\textbf{奇函数}}{\textbf{偶函数}}=\textbf{奇函数}$$

$$\frac{\textbf{偶函数}}{\textbf{奇函数}}=\textbf{奇函数}$$

$$\frac{\textbf{偶函数}}{\textbf{偶函数}}=\textbf{偶函数}$$

以上七条结论大家其实根本不用死记硬背。现在告诉大家一个记忆诀窍：大家就把奇函数当成负数，把偶函数当成正数，那么以上七条结论大家就能很轻易地记住了。

想必大家现在对于奇函数和偶函数的定义及运算已经很清楚了，接下来正式进入本小节的重点知识。

（1）设 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ 是一个定积分，若 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续且 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上是一个奇函数，则定积分 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=0$。

（2）设 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ 是一个定积分，如果 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续且 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上是一个偶函数，则定积分 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$。

下面来看例题。

例. 请计算 $\int_{-10}^{10} 2x\,\mathrm{d}x$。

解： 可以很轻易地判断出 $\int_{-10}^{10} 2x\,\mathrm{d}x$ 是一个定积分而不是反常积分。那么现在继续做。由于函数 $2x$ 在区间 $[-10,10]$ 上连续且函数 $2x$ 在区间 $[-10,10]$ 上是一个奇函数，所以定积分 $\int_{-10}^{10} 2x\,\mathrm{d}x=0$。

当然了，本题也可以用常规方法来做，那肯定没有刚才的方法简单。

例. 请计算$\int_{-10}^{10}\sin x\times\cos x\,\mathrm{d}x$。

解： 可以很轻易地判断出$\int_{-10}^{10}\sin x\times\cos x\,\mathrm{d}x$是一个定积分而不是反常积分。那么现在继续做。

先告诉大家六个结论。

$\sin x$在其定义域内为奇函数。

$\cos x$在其定义域内为偶函数。

$\tan x$在其定义域内为奇函数。

$\cot x$在其定义域内为奇函数。

$\sec x$在其定义域内为偶函数。

$\csc x$在其定义域内为奇函数。

现在回到本题上来。

$\sin x$的定义域是什么？是$(-\infty,+\infty)$。既然$\sin x$在其定义域内都为奇函数，那肯定就意味着$\sin x$在任何一个小于该定义域的对称区间内也是奇函数，所以$\sin x$在区间$[-10,10]$上为奇函数。

$\cos x$的定义域是什么？是$(-\infty,+\infty)$。既然$\cos x$在其定义域内都为偶函数，那肯定就意味着$\cos x$在任何一个小于该定义域的对称区间内也是偶函数，所以$\cos x$在区间$[-10,10]$上为偶函数。

由于$\sin x$在区间$[-10,10]$上为奇函数，$\cos x$在区间$[-10,10]$上为偶函数，所以根据奇函数$\times$偶函数$=$奇函数可知，$\sin x\times\cos x$在$[-10,10]$上为奇函数。

由于函数$\sin x\times\cos x$在$[-10,10]$上连续且$\sin x\times\cos x$在$[-10,10]$上为奇函数，所以定积分$\int_{-10}^{10}\sin x\times\cos x\,\mathrm{d}x=0$。

咱们现在再来看看反常积分。

（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$**是一个反常积分这毫无疑问，若**$f(x)$**在区间**$(-\infty,+\infty)$**上连续且**$f(x)$**在区间**$(-\infty,+\infty)$**上是一个奇函数且**$\int_{0}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=$**一个常数，则反常积分**$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=0$。

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$**是一个反常积分这毫无疑问，若**$f(x)$**在区间**$(-\infty,+\infty)$**上连续且**$f(x)$**在区间**$(-\infty,+\infty)$**上是一个偶函数且**$\int_{0}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=$**一个常数，则反常积分**$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$。

（3）设$\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x$**是一个反常积分，若**$f(x)$**在区间**$[-a,a]$**上除了**$x=\pm c$**连续且**$f(x)$**在区间"**$[-a,a]$**除了**$\pm c$**"上是一个奇函数且**$\int_{0}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=$**一个常数，则反常积分**$\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=0$。

（4）设$\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x$**是一个反常积分，若**$f(x)$**在区间**$[-a,a]$**上除了**$x=\pm c$**连续且**$f(x)$**在区间"**$[-a,a]$**除了**$\pm c$**"上是一个偶函数且**$\int_{0}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=$**一个常数，则反常积分**$\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x$。

下面来看例题。

例. 有下列积分。

①$\int_{-1}^{1}\frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=0$

②$\int_{-1}^{1}\frac{\sin x^2}{x}\,\mathrm{d}x=0$

③$\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=0$

④$\int_{-10}^{10}\sin x\times\cos x\,\mathrm{d}x\neq0$

正确的是（　　）。

（A）①、②　　（B）③、④　　（C）①、④　　（D）②、③

解： 先来看①。

先判断一下 $\int_{-1}^{1}\frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ 是定积分还是反常积分。$\frac{x}{x^2-1}$ 在 x=1、x=−1 处没有定义。现在算一下 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x}{x^2-1}$ 和 $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x}{x^2-1}$，这两个极限只要有一个是 ∞，那就说明 $\int_{-1}^{1}\frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ 是反常积分。通过计算可知 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x}{x^2-1}$ 和 $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x}{x^2-1}$ 这两个极限都是 ∞，所以 $\int_{-1}^{1}\frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ 是反常积分而不是定积分。

①说的是反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ 等于 0。那根据以下叙述来验证一下。

设 $\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x$ 是一个反常积分，若 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上除了 $x=\pm c$ 连续且 $f(x)$ 在区间“$[-a,a]$ 除了 $\pm c$”上是一个奇函数且 $\int_{0}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=$ 一个常数，则反常积分 $\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=0$。

首先，$\frac{x}{x^2-1}$ 在区间 $[-1,1]$ 上除了 $x=\pm1$ 连续。也就是说，$\frac{x}{x^2-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 上连续。

其次，$\frac{x}{x^2-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 上是一个奇函数。因为 $y=x$ 是奇函数，$y=x^2-1$ 是偶函数，$\frac{\text{奇函数}}{\text{偶函数}}$=奇函数。

最后，来看看 $\int_{0}^{1}\frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ 是否等于一个常数。$\int_{0}^{1}\frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ 是第一类反常积分，所以应该按照第一类反常积分的计算方法来计算 $\int_{0}^{1}\frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$，发现答案是 ∞ 而不是常数，所以①错误。

再来看②。

先判断一下 $\int_{-1}^{1}\frac{\sin x^2}{x}\,\mathrm{d}x$ 是定积分还是反常积分。$\frac{\sin x^2}{x}$ 在 $x=0$ 处没有定义。现在算一下 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x}$，如果这个极限为 ∞，那么就说明 $\int_{-1}^{1}\frac{\sin x^2}{x}\,\mathrm{d}x$ 是反常积分，否则就说明 $\int_{-1}^{1}\frac{\sin x^2}{x}\,\mathrm{d}x$ 是定积分。通过计算可知 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x}=0$，所以 $\int_{-1}^{1}\frac{\sin x^2}{x}\,\mathrm{d}x$ 是定积分而不是反常积分。

②说的是定积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\sin x^2}{x}\,\mathrm{d}x$ 等于 0。那根据以下叙述来验证一下。

设 $\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x$ 是一个定积分，若 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续且 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上是一个奇函数，则定积分 $\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=0$。

首先，有的同学认为 $\frac{\sin x^2}{x}$ 在区间 $[-1,1]$ 上并不连续。的确，$\frac{\sin x^2}{x}$ 在区间 $[-1,1]$ 上并不连续。但是，现在要告诉大家的是，②说的是定积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\sin x^2}{x}\,\mathrm{d}x=0$，其实可以把②改为 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x^2}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，$\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=0$。

为什么能这么改呢？大家记住，定积分的被积函数在某一点处的函数值是完全无所谓的，可以随便改。

那么也就是说，现在只要用以下叙述来验证一下“$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x^2}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，$\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=0$”是否正确就可以了。

设 $\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x$ 是一个定积分，若 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续且 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上是一个奇函数，则定积分 $\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=0$。

首先，$f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，其次，$f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是奇函数（因为 $y=\sin x^2$ 是偶函数，$y=x$ 是奇函数，$\frac{\text{偶函数}}{\text{奇函数}}$=奇函数，所以 $\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=0$，②正确。

再来看③。

先判断一下 $\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ 是定积分还是反常积分。$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 x=1、x=−1 处没有定义。现在算一下 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

和 $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，这两个极限只要有一个是 ∞，那就说明 $\int_{-1}^{1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ 是反常积分。通过计算可知 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 和 $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 这两个极限都是 ∞，所以 $\int_{-1}^{1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ 是反常积分而不是定积分。

③说的是反常积分 $\int_{-1}^{1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ 等于 0。那根据以下叙述来验证一下。

设 $\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x$ 是一个反常积分，若 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上除了 $x=\pm c$ 连续且 $f(x)$ 在区间“$[-a,a]$除了 $\pm c$”上是一个奇函数且 $\int_{0}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=$ 一个常数，则反常积分 $\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=0$。

首先，$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $[-1,1]$ 上除了 $x=\pm1$ 连续。也就是说，$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $(-1,1)$ 上连续。

其次，$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $(-1,1)$ 上是一个奇函数。因为 $y=x$ 是奇函数，$y=\sqrt{1-x^2}$ 是偶函数，$\dfrac{\text{奇函数}}{\text{偶函数}}$=奇函数。

最后，来看看 $\int_{0}^{1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ 是否等于一个常数。$\int_{0}^{1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ 是第一类反常积分，所以应该按照第一类反常积分的计算方法来计算 $\int_{0}^{1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$，发现答案是常数，所以③正确。

最后来看④。

④说的是 $\int_{-10}^{10}\sin x\times\cos x\,\mathrm{d}x\neq0$，$\int_{-10}^{10}\sin x\times\cos x\,\mathrm{d}x$ 这道题之前做过，算出答案是 0，所以④错误。

综上所述，正确的是②和③，错误的是①和④，所以本题应该选择（D）选项。

第 5 章

微分方程

5.1 微分方程什么样

本节要给大家讲的是微分方程什么样。大家知道方程什么样吗？所谓方程，指的是含未知数的等式。例如，$x-2=5$ 和 $x+8=y-3$ 都是方程。那么微分方程呢？

大家记住，微分方程一定是方程，而且是特殊的方程。它的特殊性就体现在，方程中含有导数。

下面来看例题。

例. $y''=2x$。

这是一个微分方程，因为该方程中含有导数 y''。

例. $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$。

这是一个微分方程，因为该方程中含有导数 y'。

例. $xy'=y+\sqrt{x^2-y^2}$。

这是一个微分方程，因为该方程中含有导数 y'。

例. $y'=\dfrac{1}{x\cos y+\sin 2y}$。

这是一个微分方程，因为该方程中含有导数 y'。

例. $xy'+2y=3x^3y^{\frac{4}{3}}$。

这是一个微分方程，因为该方程中含有导数 y'。

例. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{yx^2\ln y-x}$。

这是一个微分方程，因为该方程中含有导数 y'（注意，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 指的是 y'）。

例. $y''-2y'+y=0$。

这是一个微分方程，因为该方程中含有导数 y'' 和 y'（其实，这两者只要含一个就是微分方程，更何况这两者都含）。

例. $y^{(4)}-5y'''+6y''=0$。

这是一个微分方程，因为该方程中含有导数 $y^{(4)}$、y'''、y''（其实，这三者只要含一个就是微分方程，更何况这三者都含）。

例. $y''+y=4x\cos x$。

这是一个微分方程，因为该方程中含有导数 y''。

例. $\frac{d^2y}{dx^2}=2x$。

这是一个微分方程，因为该方程中含有导数 y''（注意，$\frac{d^2y}{dx^2}$ 指的就是 y''）。

例. $x(y^2-1)\,dx+y(x^2-1)\,dy=0$。

这是一个微分方程。上式可以整理成 $x(y^2-1)+\frac{dy}{dx}\times y(x^2-1)=0$，这时就含 y' 了，所以 $x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0$ 是微分方程。

例. $x'=x\cos y+\sin 2y$。

这是一个微分方程，因为该方程中含有导数 x'（注意，没有说只有含 y 的导数才是微分方程，含 x 的导数也是）。

5.2 微分方程的阶

所谓微分方程的阶，指的是微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数。

下面来看例题。

例. 求微分方程 $y''=2x$ 的阶。

解： 先来看看这个微分方程中都出现了哪几阶导数。很明显，这个微分方程中只出现了二阶导数，所以微分方程 $y''=2x$ 的阶为 2。换言之，微分方程 $y''=2x$ 是二阶微分方程。

例. 求微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的阶。

解： 先来看看这个微分方程中都出现了哪几阶导数。很明显，这个微分方程中出现了一阶导数和二阶导数，所以微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的阶为 2。换言之，微分方程 $y''-2y'+y=0$ 是二阶微分方程。

例. 求微分方程 $xy'=y+\sqrt{x^2-y^2}$ 的阶。

解： 先来看看这个微分方程中都出现了哪几阶导数。很明显，这个微分方程中只出现了一阶导数，所以微分方程 $xy'=y+\sqrt{x^2-y^2}$ 的阶为 1。换言之，微分方程 $xy'=y+\sqrt{x^2-y^2}$ 是一阶微分方程。

例. 求微分方程 $y^{(4)}-5y'''+6y''=0$ 的阶。

解： 先来看看这个微分方程中都出现了哪几阶导数。很明显，这个微分方程中出现了二阶导数、三阶导数和四阶导数，所以微分方程 $y^{(4)}-5y'''+6y''=0$ 的阶为 4。换言之，微分方程 $y^{(4)}-5y'''+6y''=0$ 是四阶微分方程。

例. 求微分方程 $y''+y=4x\cos x$ 的阶。

解： 先来看看这个微分方程中都出现了哪几阶导数。很明显，这个微分方程中只出现了二阶导数，所以微分方程 $y''+y=4x\cos x$ 的阶为 2。换言之，微分方程 $y''+y=4x\cos x$ 是二阶微分方程。

例. 求微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}=2x$ 的阶。

解： 先来看看这个微分方程中都出现了哪几阶导数。很明显，这个微分方程中只出现了二阶导数，所以微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}=2x$ 的阶为 2。换言之，微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}=2x$ 是二阶微分方程。

例. 求微分方程 $x^3(y''')^5-4x(y')^2=3x^2$ 的阶。

解： 先来看看这个微分方程中都出现了哪几阶导数。很明显，这个微分方程中出现了一阶导数、三阶导数，所以微分方程 $x^3(y''')^5-4x(y')^2=3x^2$ 的阶为 3。换言之，微分方程 $x^3(y''')^5-4x(y')^2=3x^2$ 是三阶微分方程。

例. 求微分方程 $y^{(4)}+x^2(\sin y'')^7-4xy=3x^2$ 的阶。

解： 先来看看这个微分方程中都出现了哪几阶导数。很明显，这个微分方程中出现了二阶导数、四阶导数，所以微分方程 $y^{(4)}+x^2(\sin y'')^7-4xy=3x^2$ 的阶为 4。换言之，微分方程 $y^{(4)}+x^2(\sin y'')^7-4xy=3x^2$ 是四阶微分方程。

接下来进入下一节的学习：微分方程的解。

5.3　微分方程的解

所谓微分方程的解，指的是：如果某个 x 与 y 的关系式（注意，此关系式不一定表示成 $y=f(x)$、$x=f(y)$ 的形式）能够使得微分方程成为恒等式，那么就称这个 x 与 y 的关系式为微分方程的解。

下面来看例题。

例. 请问 $y=\frac{1}{3}x^3+2x+1$ 是不是微分方程 $y''=2x$ 的解。

解： 本题问的是 $y=\frac{1}{3}x^3+2x+1$ 是否为微分方程 $y''=2x$ 的解，那么需要做的就是验证一下 $y=\frac{1}{3}x^3+2x+1$ 能不能使得微分方程 $y''=2x$ 成立。如果能，就说明 $y=\frac{1}{3}x^3+2x+1$ 是微分方程 $y''=2x$ 的解。如果不能，就说明 $y=\frac{1}{3}x^3+2x+1$ 不是微分方程 $y''=2x$ 的解。

现在来验证一下吧！

由于 $y=\frac{1}{3}x^3+2x+1$，所以 $y'=x^2+2$，$y''=2x$。

由此可见，$y=\frac{1}{3}x^3+2x+1$ 能使得微分方程 $y''=2x$ 成立，所以 $y=\frac{1}{3}x^3+2x+1$ 是微分方程 $y''=2x$ 的解。

例. 请问 $y=2x\mathrm{e}^{-x}$ 是不是微分方程 $y'=\frac{y(1-x)}{x}$ 的解。

解： 本题问的是 $y=2x\mathrm{e}^{-x}$ 是否为微分方程 $y'=\frac{y(1-x)}{x}$ 的解，那么需要做的就是验证一下 $y=2x\mathrm{e}^{-x}$ 能不能使得微分方程 $y'=\frac{y(1-x)}{x}$ 成立。如果能，就说明 $y=2x\mathrm{e}^{-x}$ 是微分方程 $y'=\frac{y(1-x)}{x}$ 的解。如果不能，就说明 $y=2x\mathrm{e}^{-x}$ 不是微分方程 $y'=\frac{y(1-x)}{x}$ 的解。

现在来验证一下吧！

由于 $y=2x\mathrm{e}^{-x}$，所以 $y'=2\mathrm{e}^{-x}(1-x)$。

由于 $y=2x\mathrm{e}^{-x}$，所以 $\frac{y(1-x)}{x}=\frac{2x\mathrm{e}^{-x}(1-x)}{x}=\frac{2x\mathrm{e}^{-x}-2x^2\mathrm{e}^{-x}}{x}=2\mathrm{e}^{-x}-2x\mathrm{e}^{-x}=2\mathrm{e}^{-x}(1-x)$。

综上所述，有 $y'=\frac{y(1-x)}{x}$。

由此可见，$y=2x\mathrm{e}^{-x}$ 能使得微分方程 $y'=\frac{y(1-x)}{x}$ 成立，所以 $y=2x\mathrm{e}^{-x}$ 是微分方程 $y'=\frac{y(1-x)}{x}$ 的解。

例. 请问 $y=x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+x^2$ 是不是微分方程 $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1$ 的解。

解： 本题问的是 $y=x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+x^2$ 是否为微分方程 $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1$ 的解，那么需要做的就是验证一下 $y=x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+x^2$ 能不能使得微分方程 $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1$ 成立。如果能，就说明 $y=x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+x^2$ 是微分方程 $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1$ 的解。如果不能，就说明 $y=x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+x^2$ 不是微分方程 $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1$ 的解。

现在来验证一下吧！

由于 $y=x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+x^2$，所以 $y'=2x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+2x$。

由于 $y=x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+x^2$，所以 $\frac{1-2x}{x^2}y=\frac{1-2x}{x^2}\times(x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+x^2)=(1-2x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+(1-2x)$。

综上所述，有

$$y'+\frac{1-2x}{x^2}y=2x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+2x+(1-2x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+(1-2x)=2x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+2x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-2x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1-2x=1$$

由此可见，$y=x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+x^2$ 能使得微分方程 $y'+\dfrac{1-2x}{x^2}y=1$ 成立，所以 $y=x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+x^2$ 是微分方程 $y'+\dfrac{1-2x}{x^2}y=1$ 的解。

例. 请问 $y=x^2+\mathrm{e}^{3x}$ 是不是微分方程 $y''-3y'=2-6x$ 的解。

解： 本题问的是 $y=x^2+\mathrm{e}^{3x}$ 是否为微分方程 $y''-3y'=2-6x$ 的解，那么需要做的就是验证一下 $y=x^2+\mathrm{e}^{3x}$ 能不能使得微分方程 $y''-3y'=2-6x$ 成立。如果能，就说明 $y=x^2+\mathrm{e}^{3x}$ 是微分方程 $y''-3y'=2-6x$ 的解。如果不能，就说明 $y=x^2+\mathrm{e}^{3x}$ 不是微分方程 $y''-3y'=2-6x$ 的解。

现在来验证一下吧！

由于 $y=x^2+\mathrm{e}^{3x}$，所以 $y'=2x+3\mathrm{e}^{3x}$，$y''=2+9\mathrm{e}^{3x}$

因此，$y''-3y'=2+9\mathrm{e}^{3x}-3(2x+3\mathrm{e}^{3x})=2+9\mathrm{e}^{3x}-6x-9\mathrm{e}^{3x}=2-6x$。

由此可见，$y=x^2+\mathrm{e}^{3x}$ 能使得微分方程 $y''-3y'=2-6x$ 成立，所以 $y=x^2+\mathrm{e}^{3x}$ 是微分方程 $y''-3y'=2-6x$ 的解。

5.4 微分方程的通解

上一节讲的是微分方程的解，而本节要讲的是微分方程的通解。

所谓微分方程的通解，指的是：如果微分方程的解中含有任意常数且任意常数的个数与微分方程的阶数相等，则称这样的解为微分方程的通解。

某微分方程的通解肯定是该微分方程的解，而且是特殊的解。特殊性体现在，解中含有任意常数且任意常数的个数与微分方程的阶数相等。

由此可知，一阶微分方程的通解中肯定含有一个任意常数。例如，一阶微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 $y=Cx\mathrm{e}^{-x}$（现在先不要管这个通解是怎么求出来的，这后面会讲）。二阶微分方程的通解中肯定含有两个任意常数。例如，二阶微分方程 $y''=2x$ 的通解是 $y=\dfrac{1}{3}x^3+C_1x+C_2$（现在先不要管这个通解是怎么求出来的，这后面会讲）。

5.5 微分方程的初始条件与微分方程的特解

当求出某微分方程的通解之后，如果能根据某个条件，把通解中的任意常数确定为某个特定的常数，那么该条件就称为微分方程的初始条件，确定了常数后的解就称为微分方程的特解。

下面来看例题。

例. 二阶微分方程 $y''=2x$ 的通解为 $y=\dfrac{1}{3}x^3+C_1x+C_2$（现在先不要管这个通解是怎么求出来的，这后面会讲）。若有条件 $y(0)=1$、$y'(0)=2$，则肯定就能确定出 $C_1=2$、$C_2=1$。

所以，条件 $y(0)=1$、$y'(0)=2$ 称为微分方程 $y''=2x$ 的初始条件，$y=\dfrac{1}{3}x^3+2x+1$ 称为微分方程 $y''=2x$ 在初始条件 $y(0)=1$、$y'(0)=2$ 下的特解。

5.6 求一阶微分方程的通解的方法

本节着眼于一阶微分方程，也就是说本节研究的是求一阶微分方程的通解的方法。本节分为五个小节，每小节讲一种求一阶微分方程的通解的方法。

5.6.1 可分离变量法

何时用可分离变量法：如果某一阶微分方程可以整理为 $f(x)\mathrm{d}x=g(y)\mathrm{d}y$，那么就用可分离变量法来做。

可分离变量法怎么用：两边同时不定积分即可，但是常数 C 只用加在一边就可以了。

下面来看例题。

例. 求一阶微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解。

解：就算题中没说“一阶”这两个字，那大家也应该能判断出微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 是一个一阶微分方程。

现在正式开始做这道题。

题中有

$$y'=\frac{y(1-x)}{x} \qquad \text{（1）式}$$

y' 的另一种写法是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y(1-x)}{x} \qquad \text{（2）式}$$

在（2）式的等号左右两侧同时乘以 $\mathrm{d}x$，得

$$\mathrm{d}y=\frac{y(1-x)}{x}\mathrm{d}x \qquad \text{（3）式}$$

在（3）式的等号左右两侧同时乘以 $\dfrac{1}{y}$，得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{1-x}{x}\mathrm{d}x \qquad \text{（4）式}$$

（4）式的形式就是 $f(x)\mathrm{d}x=g(y)\mathrm{d}y$，因此接下来用可分离变量法来做，即（4）式的等号左右两侧同时不定积分

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int\frac{1-x}{x}\mathrm{d}x \qquad \text{（5）式}$$

下面就计算不定积分。但是记住，常数 C 只加到一侧就可以了，一般是加在右侧，所以有

$$\ln|y|=\ln|x|-x+C \qquad \text{（6）式}$$

本题做到这里就算做完了，也就是说，$\ln|y|=\ln|x|-x+C$ 就是微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解。由此可见，通解不一定非要写为“$y=\cdots\cdots$”或“$x=\cdots\cdots$”，只要是 x 与 y 的关系式就可以了。

当然了，要是非要表示成“$y=\cdots\cdots$”或者“$x=\cdots\cdots$”那也没问题。例如，对于这道题，那就要接着做。

（6）式两侧同时取以 e 为底，得

$$|y|=|x|\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{C} \qquad \text{（7）式}$$

把绝对值去掉，有

$$y=\pm x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{C} \qquad \text{（8）式}$$

$\pm\mathrm{e}^{C}$ 可以看成任意常数 C，所以有

$$y=Cx\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{（9）式}$$

本题就做完了。但是，这里建议大家，以后只要解出 x 与 y 的关系式就可以了，不必非要写为“$y=\cdots\cdots$”或“$x=\cdots\cdots$”。原因有两个：一是有的函数就根本写不成“$y=\cdots\cdots$”或“$x=\cdots\cdots$”；二是就算能写成（如本题），那也是挺麻烦的。

有的同学说从（3）式到（4）式没有考虑 $y=0$ 的情况，这就是漏解了。的确漏解了，不过这无所谓，因为本题让求的是通解，而不是全部解，所以漏就漏了。在这么多年的考研中，从来没考过求全部解的，考的都是求通解，所以大家记住，以后根本不用讨论分母为 0 的情况。

例. 求一阶微分方程 $xy'=\sqrt{1-y^2}$ 的通解。

解：题中有

$$xy'=\sqrt{1-y^2} \qquad \text{（1）式}$$

y' 的另一种写法是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1-y^2} \qquad \text{（2）式}$$

在（2）式的等号左右两侧同时乘以 $\mathrm{d}x$，得

$$x\mathrm{d}y=\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{（3）式}$$

在（3）式的等号左右两侧同时乘以 $\frac{1}{x}$，得

$$1\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{1-y^2}}{x}\mathrm{d}x \qquad （4）式$$

在（4）式的等号左右两侧同时乘以 $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$，得

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{x}\mathrm{d}x \qquad （5）式$$

（5）式的形式就是 $f(x)\mathrm{d}x=g(y)\mathrm{d}y$，因此接下来用可分离变量法来做，即（5）式的等号左右两侧同时不定积分

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x \qquad （6）式$$

下面就是计算不定积分。但是记住，常数 C 只加到一侧就可以了，一般是加在右侧，所以有

$$\arcsin y=\ln|x|+C \qquad （7）式$$

本题做到这里就算做完了，也就是说，$\arcsin y=\ln|x|+C$ 就是微分方程 $xy'=\sqrt{1-y^2}$ 的通解。

例. 求一阶微分方程 $y'=\mathrm{e}^{2x-y}$ 的通解。

解： 题中有

$$y'=\mathrm{e}^{2x-y} \qquad （1）式$$

y' 的另一种写法是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{2x-y} \qquad （2）式$$

由于 $\mathrm{e}^{2x-y}=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{y}}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{y}} \qquad （3）式$$

在（3）式的等号左右两侧同时乘以 $\mathrm{d}x$，得

$$\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{y}}\mathrm{d}x \qquad （4）式$$

在（4）式的等号左右两侧同时乘以 e^{y}，得

$$\mathrm{e}^{y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x \qquad （5）式$$

（5）式的形式就是 $f(x)\mathrm{d}x=g(y)\mathrm{d}y$，因此接下来用可分离变量法来做，即（5）式的等号左右两侧同时不定积分

$$\int\mathrm{e}^{y}\mathrm{d}y=\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x \qquad （6）式$$

下面就是计算不定积分。但是记住，常数 C 只加到一侧就可以了，一般是加在右侧，所以有

$$\mathrm{e}^{y}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C \qquad （7）式$$

本题做到这里就算做完了，也就是说，$\mathrm{e}^{y}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$ 就是微分方程 $y'=\mathrm{e}^{2x-y}$ 的通解。

例. 求一阶微分方程 $\cos y\mathrm{d}x+(1+\mathrm{e}^{-x})\sin y\mathrm{d}y=0$ 的通解。

解： 题中有

$$\cos y\mathrm{d}x+(1+\mathrm{e}^{-x})\sin y\mathrm{d}y=0 \qquad （1）式$$

把（1）式的等号左侧的 $(1+\mathrm{e}^{-x})\sin y\mathrm{d}y$ 移到等号右侧，得

$$\cos y\mathrm{d}x=-(1+\mathrm{e}^{-x})\sin y\mathrm{d}y \qquad （2）式$$

在（2）式的等号左右两侧同时乘以 $\frac{1}{\cos y}$，得

$$1\mathrm{d}x=-(1+\mathrm{e}^{-x})\tan y\mathrm{d}y \qquad （3）式$$

在（3）式的等号左右两侧同时乘以 $\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$，得

$\frac{1}{1+e^{-x}}dx = -\tan y dy$ （4）式

（4）式的形式就是 $f(x)dx = g(y)dy$，因此接下来用可分离变量法来做，即（4）式的等号左右两侧同时不定积分

$\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx = \int -\tan y dy$ （5）式

下面就是计算不定积分。但是记住，常数 C 只加到一侧就可以了，一般是加在右侧，所以有

$\ln|e^x+1| = \ln|\cos y| + C$ （6）式

本题做到这里就算做完了，也就是说，$\ln|e^x+1| = \ln|\cos y| + C$ 就是微分方程 $\cos y dx + (1+e^{-x})\sin y dy = 0$ 的通解。

5.6.2 换元法

何时用换元法：如果某一阶微分方程可以整理为 $\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$，那么就用换元法来做（解释得再通俗一点儿就是，如果 $\frac{dy}{dx}$ 能表示为 $\frac{y}{x}$ 的函数，那么就用换元法来做）。

换元法怎么用：令 $u = \frac{y}{x}$，那么必然 $\frac{dy}{dx}$ 就等于 $u + x\frac{du}{dx}$，所以我们把 $\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$ 变为 $u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u)$。

下面来看例题。

例. 求一阶微分方程 $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}\,(x>0)$ 的通解。

解：题中有

$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$ （1）式

y' 指的其实就是 $\frac{dy}{dx}$，所以有

$x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}$ （2）式

在（2）式的等号左右两侧同时乘以 $\frac{1}{x}$，得

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1-(\frac{y}{x})^2}$ （3）式

（3）式的形式就是 $\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$，因此接下来用换元法来做，即把 $\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$ 变为 $u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u)$。

对于本题而言，由于 $\varphi(\frac{y}{x}) = \frac{y}{x} + \sqrt{1-(\frac{y}{x})^2}$，所以 $\varphi(u) = u + \sqrt{1-u^2}$，则有

$u + x\frac{du}{dx} = u + \sqrt{1-u^2}$ （4）式

换元法只管到这一步，接下来就不管了，接下来继续做。

（4）式可以整理为

$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1-u^2}$ （5）式

在（5）式的等号左右两侧同时乘以 dx，得

$xdu = \sqrt{1-u^2}dx$ （6）式

在（6）式的等号左右两侧同时乘以 $\frac{1}{x}$，得

$du = \frac{\sqrt{1-u^2}}{x}dx$ （7）式

在（7）式的等号左右两侧同时乘以 $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$，得

$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \frac{1}{x}dx$ （8）式

（8）式的形式就是 $f(u)du = g(x)dx$，因此接下来用可分离变量法来做，即（8）式的等号左右两侧同时不定积分

$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \mathrm{d}u = \int \frac{1}{x} \mathrm{d}x$ （9）式

下面就是计算不定积分。但是记住，常数 C 只加到一侧就可以了，一般是加在右侧，所以有

$\arcsin u = \ln|x| + C$ （10）式

由于题中说 $x > 0$，所以（10）式可以化简为

$\arcsin u = \ln x + C$ （11）式

这是最终的答案吗？当然不是，因为 u 是设的，现在要把 u 还原才行，所以

$\arcsin \frac{y}{x} = \ln x + C$ （12）式

本题做到这里就算做完了（因为已经得出了一个 x 与 y 的关系式），也就是说，$\arcsin \frac{y}{x} = \ln x + C$ 就是微分方程 $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$ 的通解。

把本题列在这里有两个目的：第一个目的是通过这道题让大家看一下换元法到底怎么用；第二个目的是想告诉大家求一阶微分方程的通解的方法与方法之间并不是独立的（也就是说，并不是一道题中只能用一种方法），例如，本题就既用了换元法又用了可分离变量法。

例. 求一阶微分方程 $x^2 y' + xy = y^2$ 的通解。

解： 题中有

$x^2 y' + xy = y^2$ （1）式

y' 指的其实就是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以有

$x^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy = y^2$ （2）式

把（2）式的等号左侧的 xy 移到等号右侧，得

$x^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - xy$ （3）式

在（3）式的等号左右两侧同时乘以 $\frac{1}{x^2}$，得

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 - xy}{x^2}$ （4）式

（4）式可以化简为

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (\frac{y}{x})^2 - \frac{y}{x}$ （5）式

（5）式的形式就是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(\frac{y}{x})$，因此接下来用换元法来做，即把 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(\frac{y}{x})$ 变为 $u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi(u)$。

对于本题而言，由于 $\varphi(\frac{y}{x}) = (\frac{y}{x})^2 - \frac{y}{x}$，所以 $\varphi(u) = u^2 - u$，则有

$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u^2 - u$ （6）式

换元法只管到这一步，接下来就不管了，接下来继续做。

（6）式可以整理为

$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u^2 - 2u$ （7）式

在（7）式的等号左右两侧同时乘以 $\mathrm{d}x$，得

$x\mathrm{d}u=(u^2-2u)\mathrm{d}x$ （8）式

在（8）式的等号左右两侧同时乘以 $\frac{1}{x}$，得

$1\mathrm{d}u = \frac{(u^2 - 2u)}{x}\mathrm{d}x$ （9）式

在（9）式的等号左右两侧同时乘以 $\frac{1}{u^2 - 2u}$，得

$\frac{1}{u^2-2u}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ （10）式

（10）式的形式就是 $f(u)\mathrm{d}u=g(x)\mathrm{d}x$，因此接下来用可分离变量法来做，即（10）式的等号左右两侧同时不定积分

$\int\frac{1}{u^2-2u}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ （11）式

下面就是计算不定积分。但是记住，常数 C 只加到一侧就可以了，一般是加在右侧，所以有

$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|=\ln|x|+C$ （12）式

这是最终的答案吗？当然不是，因为 u 是设的，现在要把 u 还原才行，所以

$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{y}{x}-2}{\frac{y}{x}}\right|=\ln|x|+C$ （13）式

本题做到这里就算做完了（因为已经得出了一个 x 与 y 的关系式），也就是说，$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{y}{x}-2}{\frac{y}{x}}\right|=\ln|x|+C$ 就是微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 的通解。

例. 求一阶微分方程 $x^2y\mathrm{d}x-(x^3+y^3)\mathrm{d}y=0$ 的通解。

解： 题中有

$x^2y\mathrm{d}x-(x^3+y^3)\mathrm{d}y=0$ （1）式

在（1）式的等号左右两侧同时乘以 $\frac{1}{\mathrm{d}x}$，得

$x^2y-(x^3+y^3)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ （2）式

把（2）式的等号左侧的 x^2y 移到等号右侧，得

$-(x^3+y^3)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-x^2y$ （3）式

在（3）式的等号左右两侧同时乘以 $-\frac{1}{x^3+y^3}$，得

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2y}{x^3+y^3}$ （4）式

分子分母同时乘以一个数，分数值不变，所以给（4）式的等号右侧的那个分数分子分母同时乘以 $\frac{1}{x^3}$，则有，

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^3}$ （5）式

（5）式的形式就是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\frac{y}{x})$，因此接下来用换元法来做，即把 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\frac{y}{x})$ 变为 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$。

对于本题而言，由于 $\varphi(\frac{y}{x})=\frac{\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^3}$，所以 $\varphi(u)=\frac{u}{1+u^3}$，则有

$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u}{1+u^3}$ （6）式

换元法只管到这一步，接下来就不管了，接下来继续做。

（6）式可以整理为

$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u}{1+u^3}-u$ （7）式

（7）式可以继续整理为

$x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{u}{1+u^3}-\dfrac{u(1+u^3)}{1+u^3}$ （8）式

（8）式可以继续整理为

$x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-u^4}{1+u^3}$ （9）式

在（9）式的等号左右两侧同时乘以 $\mathrm{d}x$，得

$x\mathrm{d}u=\dfrac{-u^4}{1+u^3}\mathrm{d}x$ （10）式

在（10）式的等号左右两侧同时乘以 $\dfrac{1}{x}$，得

$1\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\times\dfrac{-u^4}{1+u^3}\mathrm{d}x$ （11）式

在（11）式的等号左右两侧同时乘以 $-\dfrac{1+u^3}{u^4}$，得

$-\dfrac{1+u^3}{u^4}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ （12）式

（12）式的形式就是 $f(u)\mathrm{d}u=g(x)\mathrm{d}x$，因此接下来用可分离变量法来做，即（12）式的等号左右两侧同时不定积分

$\int-\dfrac{1+u^3}{u^4}\mathrm{d}u=\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ （13）式

下面就是计算不定积分。但是记住，常数 C 只加到一侧就可以了，一般是加在右侧，所以有

$-(-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{u^3}+\ln|u|)=\ln|x|+C$ （14）式

这是最终的答案吗？当然不是，因为 u 是设的，现在要把 u 还原才行，所以

$-[-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{(\dfrac{y}{x})^3}+\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|]=\ln|x|+C$ （15）式

本题做到这里就算做完了（因为已经得出了一个 x 与 y 的关系式），也就是说，$-[-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{(\dfrac{y}{x})^3}+\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|]=\ln|x|+C$ 就是微分方程 $x^2y\mathrm{d}x-(x^3+y^3)\mathrm{d}y=0$ 的通解。

5.6.3 公式法

何时用公式法：如果某一阶微分方程可以整理为 $y'+p(x)y=0$ 或 $y'+p(x)y=q(x)$，那么就用公式法来做。

公式法怎么用：如果某一阶微分方程可以整理为 $y'+p(x)y=0$，那么通解为 $y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$（但是注意，算出的那个不定积分后面就不加 C 了，因为前面已经有 C 了）；如果某一阶微分方程可以整理为 $y'+p(x)y=q(x)$，那么通解为 $y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}[\int q(x)\times\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$（但是注意，算出的那两个不定积分前面就不加 C 了，因为最后已经有 C 了）。

下面来看例题。

例. 求一阶微分方程 $x^2\mathrm{d}y+(y-2xy-2x^2)\mathrm{d}x=0$ 的通解。

解： 题中有

$x^2\mathrm{d}y+(y-2xy-2x^2)\mathrm{d}x=0$ （1）式

在（1）式的等号左右两侧同时乘以 $\dfrac{1}{\mathrm{d}x}$，得

$x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(y-2xy-2x^2)=0$ （2）式

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 其实就是 y'，所以（2）式可以化为

$x^2y'+(y-2xy-2x^2)=0$ （3）式

在（3）式的等号左右两侧同时乘以 $\dfrac{1}{x^2}$，得

$y'+\dfrac{(y-2xy-2x^2)}{x^2}=0$　　（4）式

（4）式可以化简为

$y'+\dfrac{1-2x}{x^2}y-2=0$　　（5）式

把（5）式的等号左侧中的 2 移到等号右侧，得

$y'+\dfrac{1-2x}{x^2}y=2$　　（6）式

（6）式的形式就是 $y'+p(x)y=q(x)$，其中 $p(x)=\dfrac{1-2x}{x^2}$，$q(x)=2$。所以，现在应该用本小节所讲的公式法来做，即通解为 $y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}[\int q(x)\times\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$。

对于本题而言，由于 $p(x)=\dfrac{1-2x}{x^2}$，$q(x)=2$，所以通解为 $y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1-2x}{x^2}\mathrm{d}x}(\int 2\times\mathrm{e}^{\int\frac{1-2x}{x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)$。

接下来就是纯积分计算了，这里就不多说了，因为在第 4 章给大家详细地讲过如何算不定积分。通过计算可知 $y=x^2(2+C\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})$。

例. 求一阶微分方程 $y'=\dfrac{1}{x\cos y+\sin 2y}$ 的通解。

解： 题中有

$y'=\dfrac{1}{x\cos y+\sin 2y}$　　（1）式

y' 其实就是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以（1）式可以化为

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x\cos y+\sin 2y}$　　（2）式

把（2）式的等号左侧和右侧同时取倒数，有

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=x\cos y+\sin 2y$　　（3）式

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ 其实就是 x'，所以（3）式可以化为

$x'=x\cos y+\sin 2y$　　（4）式

（4）式可以整理为

$x'-x\cos y=\sin 2y$　　（5）式

（5）式的形式就是 $x'+p(y)x=q(y)$，其中 $p(y)=-\cos y$，$q(y)=\sin 2y$。所以，现在应该用本节所讲的公式法来做，即通解为 $x=\mathrm{e}^{-\int p(y)\mathrm{d}y}[\int q(y)\times\mathrm{e}^{\int p(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C]$。

对于本题而言，由于 $p(y)=-\cos y$，$q(y)=\sin 2y$，所以通解为 $x=\mathrm{e}^{-\int-\cos y\mathrm{d}y}(\int\sin 2y\times\mathrm{e}^{\int-\cos y\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C)$。

接下来就是纯积分计算了，这里就不多说了，因为在第 4 章给大家详细地讲过如何算不定积分。通过计算可知 $x=C\mathrm{e}^{\int\sin y}-2(1+\sin y)$。

例. 求一阶微分方程 $y'+y\tan x=\sin 2x$ 的通解。

解： 题中有

$y'+y\tan x=\sin 2x$　　（1）式

（1）式的形式就是 $y'+p(x)y=q(x)$，其中 $p(x)=\tan x$，$q(x)=\sin 2x$。所以现在应该用本小节所讲的公式法来做，即通解为 $y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}[\int q(x)\times\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$。

对于本题而言，由于 $p(x)=\tan x$，$q(x)=\sin 2x$，所以通解为 $y=\mathrm{e}^{-\int\sin x\mathrm{d}x}(\int\sin 2x\times\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)$。

接下来就是纯积分计算了，这里就不多说了，因为在第 4 章给大家详细地讲过如何算不定积分。通过计算可知 $y=C\cos x-2\cos^2 x$。

例. 求一阶微分方程 $y'=\dfrac{1}{xy+y^3}$ 的通解。

解： 题中有

$y'=\dfrac{1}{xy+y^3}$ （1）式

y' 其实就是 $\dfrac{dy}{dx}$，所以（1）式可以化为

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{xy+y^3}$ （2）式

把（2）式的等号左侧和右侧同时取倒数，有

$\dfrac{dx}{dy}=xy+y^3$ （3）式

$\dfrac{dx}{dy}$ 其实就是 x'，所以（3）式可以化为

$x'=xy+y^3$ （4）式

（4）式可以整理为

$x'-yx=y^3$ （5）式

（5）式的形式就是 $x'+p(y)x=q(y)$，其中 $p(y)=-y$，$q(y)=y^3$。所以，现在应该用本小节所讲的公式法来做，即通解为 $x=e^{-\int p(y)\,dy}[\int q(y)\times e^{\int p(y)\,dy}dy+C]$。

对于本题而言，由于 $p(y)=-y$，$q(y)=y^3$，所以通解为 $x=e^{-\int -ydy}(\int y^3\times e^{\int -ydy}dy+C)$。

接下来就是纯积分计算了，这里就不多说了，因为在第 4 章给大家详细地讲过如何算不定积分。通过计算可知 $x=Ce^{\frac{y^2}{2}}-y^2-2$。

例. 求一阶微分方程 $y'+\dfrac{1-2x}{x^2}y=1$ 的通解。

解： 题中有

$y'+\dfrac{1-2x}{x^2}y=1$ （1）式

（1）式的形式就是 $y'+p(x)y=q(x)$，其中 $p(x)=\dfrac{1-2x}{x^2}$，$q(x)=1$。所以，现在应该用本小节所讲的公式法来做，即通解为 $y=e^{-\int p(x)dx}[\int q(x)\times e^{\int p(x)dx}dx+C]$。

对于本题而言，由于 $p(x)=\dfrac{1-2x}{x^2}$，$q(x)=1$，所以通解为 $y=e^{-\int\frac{1-2x}{x^2}dx}(\int e^{\int\frac{1-2x}{x^2}dx}dx+C)$。

接下来就是纯积分计算了，这里就不多说了，因为在第 4 章给大家详细地讲过如何算不定积分。通过计算可知 $y=Cx^2e^{\frac{1}{x}}+x^2$。

例. 求一阶微分方程 $(x^2-1)dy+(2xy-\cos x)dx=0$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解。

解： 本题问的是特解，大家记住，凡是让求特解的题，都是要先求通解，然后根据初始条件确定特解就可以了。现在就先求通解。

题中有

$(x^2-1)dy+(2xy-\cos x)dx=0$ （1）式

在（1）式的等号左右两侧同时乘以 $\dfrac{1}{dx}$，得

$(x^2-1)\dfrac{dy}{dx}+(2xy-\cos x)=0$ （2）式

$\dfrac{dy}{dx}$ 其实就是 y'，所以有

$(x^2-1)y'+(2xy-\cos x)=0$ （3）式

（3）式可以整理为

$(x^2-1)y'+2xy=\cos x$　　（4）式

在（4）式的等号左右两侧同时乘以 $\frac{1}{x^2-1}$，得

$y'+\frac{2x}{x^2-1}y=\frac{\cos x}{x^2-1}$　　（5）式

（5）式的形式就是 $y'+p(x)y=q(x)$，其中 $p(x)=\frac{2x}{x^2-1}$，$q(x)=\frac{\cos x}{x^2-1}$。所以，现在应该用本小节所讲的公式法来做，即通解为 $y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}[\int q(x)\times\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$。

对于本题而言，由于 $p(x)=\frac{2x}{x^2-1}$，$q(x)=\frac{\cos x}{x^2-1}$，所以通解为 $y=\mathrm{e}^{-\int\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}(\int\frac{\cos x}{x^2-1}\times\mathrm{e}^{\int\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)$。

接下来就是纯积分计算了，这里就不多说了，因为在第 4 章给大家详细地讲过如何算不定积分。通过计算可知 $y=\frac{1}{x^2-1}(\sin x+C)$。

本题做完了吗？没有。因为只是求出了通解，而本题让求的是特解。也就是说，要通过题中所给的初始条件确定 $y=\frac{1}{x^2-1}(\sin x+C)$ 中的 C。

由于 $y(0)=1$，所以 $1=\frac{1}{0-1}(\sin 0+C)$，解得 $C=-1$。所以，特解为 $y=\frac{1}{x^2-1}(\sin x-1)$。

5.6.4　伯努利法

何时用伯努利法：如果某一阶微分方程可以整理为 $y'+p(x)y=q(x)y^n$，那么就用伯努利法来做。

伯努利法怎么用：如果某一阶微分方程可以整理为 $y'+p(x)y=q(x)y^n$，那么就令 $z=y^{1-n}$，然后用公式法（5.6.3 节讲的方法）来解微分方程 $z'+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$，解完之后，再把 z 换成 y^{1-n} 就可以了。

下面来看例题。

例. 求一阶微分方程 $xy'+2y=3x^3y^{\frac{4}{3}}$。

解： 题中有

$xy'+2y=3x^3y^{\frac{4}{3}}$　　（1）式

在（1）式的等号左右两侧同时乘以 $\frac{1}{x}$，得

$y'+\frac{2}{x}y=3x^2y^{\frac{4}{3}}$　　（2）式

（2）式的形式就是 $y'+p(x)y=q(x)y^n$，其中 $p(x)=\frac{2}{x}$，$q(x)=3x^2$，$n=\frac{4}{3}$。所以，现在应该用本小节所讲的伯努利法来做，即令 $z=y^{1-\frac{4}{3}}=y^{-\frac{1}{3}}$，然后来解一下微分方程 $z'+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$。

对于本题而言，由于 $p(x)=\frac{2}{x}$，$q(x)=3x^2$，$n=\frac{4}{3}$，所以微分方程 $z'+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$ 为 $z'-\frac{2}{3x}z=-x^2$。

也就是说，现在要用 5.6.3 节所讲的公式法解一下 $z'-\frac{2}{3x}z=-x^2$，解得 $z=x^{\frac{2}{3}}(-\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+C)$。

最后，把 z 换为 $y^{-\frac{1}{3}}$，即 $y^{-\frac{1}{3}}=x^{\frac{2}{3}}(-\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+C)$。

例. 求一阶微分方程 $x^2y\mathrm{d}x-(x^3+y^3)\mathrm{d}y=0$。

解： 本题之前做过。之前是用换元法和可分离变量法来做本题的，本题还可以用本小节所讲的伯努利法来做。题中有

$x^2y\mathrm{d}x-(x^3+y^3)\mathrm{d}y=0$　　（1）式

在（1）式的等号左右两侧同时乘以 $\frac{1}{\mathrm{d}y}$，得

$$x^2y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-(x^3+y^3)=0$$ （2）式

把（2）式的等号左侧的 y^3 移到等号右侧，得

$$x^2y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x^3=y^3$$ （3）式

在（3）式的等号左右两侧同时乘以 $\frac{1}{x^2y}$，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{y}x=y^2x^{-2}$$ （4）式

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ 其实就是 x'，所以有

$$x'-\frac{1}{y}x=y^2x^{-2}$$ （5）式

（5）式的形式就是 $x'+p(y)x=q(y)x^n$，其中 $p(y)=-\frac{1}{y}$，$q(y)=y^2$，$n=-2$。所以，现在应该用本小节所讲的伯努利法来做，即令 $z=x^{1-(-2)}=x^3$，然后来解一下微分方程 $z'+(1-n)p(y)z=(1-n)q(y)$。

对于本题而言，由于 $p(y)=-\frac{1}{y}$，$q(y)=y^2$，$n=-2$，所以微分方程 $z'+(1-n)p(y)z=(1-n)q(y)$ 为 $z'-\frac{3}{y}z=3y^2$。

也就是说，现在要用 5.6.3 节所讲的公式法解一下 $z'-\frac{3}{y}z=3y^2$，解得 $z=Cy^3+3y^3\ln|y|$。

最后，把 z 换为 x^3，即 $x^3=Cy^3+3y^3\ln|y|$。

例. 求一阶微分方程 $y'=\frac{y^2-x}{2y(x-1)}$。

解： 题中有

$$y'=\frac{y^2-x}{2y(x-1)}$$ （1）式

（1）式可以化为

$$y'=\frac{y^2}{2y(x-1)}-\frac{x}{2y(x-1)}=\frac{y}{2(x-1)}-\frac{x}{2y(x-1)}$$ （2）式

把（2）式的等号右侧的 $\frac{y}{2(x-1)}$ 移到等号左侧，得

$$y'-\frac{1}{2(x-1)}y=-\frac{x}{2(x-1)}\times y^{-1}$$ （3）式

（3）式的形式就是 $y'+p(x)y=q(x)y^n$，其中 $p(x)=-\frac{1}{2(x-1)}$，$q(x)=-\frac{x}{2(x-1)}$，$n=-1$。所以，现在应该用本小节所讲的伯努利法来做，即令 $z=y^{1-(-1)}=y^2$，然后来解一下微分方程 $z'+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$。

对于本题而言，由于 $p(x)=-\frac{1}{2(x-1)}$，$q(x)=-\frac{x}{2(x-1)}$，$n=-1$，所以微分方程 $z'+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$ 为 $z'-\frac{1}{x-1}z=-\frac{x}{x-1}$。

也就是说，现在要用 5.6.3 节所讲的公式法解一下 $z'-\frac{1}{x-1}z=-\frac{x}{x-1}$，解得 $z=C(x-1)-(x-1)\ln|x-1|+1$。

最后，把 z 换为 y^2，即 $y^2=C(x-1)-(x-1)\ln|x-1|+1$。

5.6.5　变量代换法

何时用变量代换法：如果某一阶微分方程中含三角函数且该三角函数中既含 x 又含 y，那么就用变量代换法来做。

变量代换法怎么用：设三角函数中的那个东西为 u，然后解出 y，把解出的 y 代入 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的 y 中，这样一来，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 就被改写了。

下面来看例题。

例. 求一阶微分方程 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x+\sin(x+y)=0$ 的通解。

解： 由于本题所给的一阶微分方程中含三角函数 sin 且该三角函数中既含 x 又含 y，所以应该用变量代换法来做。

具体来说，设 $x+y=u$，解得 $y=u-x$。由于 $y=u-x$，所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(u-x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u-\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1$ [大家注意，$\mathrm{d}(a\pm b)=\mathrm{d}a\pm\mathrm{d}b$]。

现在 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 被改写为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1$，所以本题所给的微分方程 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x+\sin(x+y)=0$ 就变成

$$x(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1)+x+\sin u=0 \qquad \text{（1）式}$$

变量代换法只管到这一步，接下来就不管了，接下来继续做。

（1）式可以化简为

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\sin u=0 \qquad \text{（2）式}$$

（2）式可以变形为

$$\frac{1}{\sin u}\mathrm{d}u=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x \qquad \text{（3）式}$$

用之前讲过的可分离变量法，所以有

$$\int\frac{1}{\sin u}\mathrm{d}u=\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x \qquad \text{（4）式}$$

接下来只要计算不定积分就行了，计算过程这里就不多说了。计算结果为

$$\ln\left|\csc u-\cot u\right|=-\ln|x|+C \qquad \text{（5）式}$$

本题做完了吗？并没有，u 是设的，现在要把 u 还原，所以有

$$\ln\left|\csc(x+y)-\cot(x+y)\right|=-\ln|x|+C \qquad \text{（6）式}$$

5.7　求二阶常系数线性微分方程的通解的方法

5.6 节讲的是求一阶微分方程的通解的方法，本节将给大家讲求二阶常系数线性微分方程的通解的方法。

二阶微分方程指的是微分方程中所出现的最高阶导数的阶数为 2 的微分方程。

例如，像 $y''+xy'=x\mathrm{e}^x$、$y''+xy'+y=x\mathrm{e}^x$、$y''+3y'=\mathrm{e}^x$、$\frac{1}{x}y''+xy'=0$、$5y''+4y'=0$ 这些都是二阶微分方程。

所谓二阶常系数线性微分方程，指的是：首先它得是二阶微分方程，并且形式是 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ [注意，$f(x)$可以是0也可以不是0]，并且 A、B、C 都是常数。

例如，$y''+xy'=x\mathrm{e}^x$ 就不是二阶常系数线性微分方程，因为虽然它是二阶微分方程，并且形式是 $Ay''+By'+Cy=f(x)$，但 y''、y'、y 的系数并非都是常数（y'' 的系数为 1，y 的系数为 0，y' 的系数不是常数而是 x）。

再例如，$y''+xy'+y=x\mathrm{e}^x$ 就不是二阶常系数线性微分方程，因为虽然它是二阶微分方程，并且形式是 $Ay''+By'+Cy=f(x)$，但 y''、y'、y 的系数并非都是常数（y'' 的系数为 1，y 的系数为 1，y' 的系数不是常数而是 x）。

再例如，$y''+3y'=\mathrm{e}^x$ 就是二阶常系数线性微分方程，因为它是二阶微分方程，并且形式是 $Ay''+By'+Cy=f(x)$，并且 y''、y'、y 的系数都是常数（y'' 的系数为 1，y' 的系数为 3，y 的系数为 0）。

相信大家现在已经明白什么叫二阶常系数线性微分方程了。那么二阶常系数线性微分方程的通解该如何求呢？这正是本节要给大家讲的。

本节又分为两个小节，第一小节讲求二阶常系数齐次线性微分方程的通解的方法，第二小节讲求二阶常系数非齐次线性微分方程的通解的方法。

什么叫二阶常系数齐次线性微分方程？什么叫二阶常系数非齐次线性微分方程？

所谓二阶常系数齐次线性微分方程，指的是：首先它得是二阶常系数线性微分方程，并且 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 中的 $f(x)$ 是 0（也就是说，$Ay''+By'+Cy=0$）。

所谓二阶常系数非齐次线性微分方程，指的是：首先它得是二阶常系数线性微分方程，并且 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 中的 $f(x)$ 不是 0。

5.7.1 求二阶常系数齐次线性微分方程的通解的方法

求二阶常系数齐次线性微分方程的通解的方法如下。

设 $Ay''+By'+Cy=0$ 是一个二阶常系数齐次线性微分方程，则

第一步：我们先把 y'' 的系数变为 1，即变为 $y''+\frac{B}{A}y'+\frac{C}{A}y=0$，记 $p=\frac{B}{A}$，$q=\frac{C}{A}$。

第二步：解方程 $r^2+pr+q=0$。

第三步：写出通解。

情况 1：若第二步解出的 r_1、r_2 为实根并且 $r_1\neq r_2$，则通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$。

情况 2：若第二步解出的 r_1、r_2 为实根并且 $r_1=r_2$，则通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{r_1x}$。

情况 3：若第二步解出的 r_1、r_2 为复数根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta\mathrm{i}$，则通解为 $y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$。

下面来看例题。

例. 求微分方程 $y''-y'-2y=0$ 的通解。

解： 由于微分方程 $y''-y'-2y=0$ 是二阶微分方程并且形式是 $Ay''+By'+Cy=0$，并且 A、B、C 均为常数，所以微分方程 $y''-y'-2y=0$ 是二阶常系数齐次线性微分方程，应该按照本小节所讲的方法来求它的通解。

第一步：先把 y'' 的系数变为 1，即变为 $y''+\frac{B}{A}y'+\frac{C}{A}y=0$，记 $p=\frac{B}{A}$，$q=\frac{C}{A}$。

对于本题而言，y'' 的系数本来就是 1，所以不用变了，且 $p=-1$，$q=-2$。

第二步：解方程 $r^2+pr+q=0$。

对于本题而言，要解的是 $r^2-r-2=0$，解得 $r_1=2$，$r_2=-1$。

第三步：写出通解。

对于本题而言，属于情况 1，所以通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$。

例. 求微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的通解。

解： 由于微分方程 $y''-2y'+y=0$ 是二阶微分方程并且形式是 $Ay''+By'+Cy=0$，并且 A、B、C 均为常数，所以微分方程 $y''-2y'+y=0$ 是二阶常系数齐次线性微分方程，应该按照本小节所讲的方法来求它的通解。

第一步：先把 y'' 的系数变为 1，即变为 $y''+\frac{B}{A}y'+\frac{C}{A}y=0$，记 $p=\frac{B}{A}$，$q=\frac{C}{A}$。

对于本题而言，y'' 的系数本来就是 1，所以不用变了，且 $p=-2$，$q=1$。

第二步：解方程 $r^2+pr+q=0$。

对于本题而言，要解的是 $r^2-2r+1=0$，解得 $r_1=r_2=1$。

第三步：写出通解。

对于本题而言，属于情况 2，所以通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{x}$。

例. 求微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解。

解： 由于微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 是二阶微分方程并且形式是 $Ay''+By'+Cy=0$，并且 A、B、C 均为常数，所以微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 是二阶常系数齐次线性微分方程，应该按照本小节所讲的方法来求它的通解。

第一步：先把 y'' 的系数变为 1，即变为 $y''+\frac{B}{A}y'+\frac{C}{A}y=0$，记 $p=\frac{B}{A}$，$q=\frac{C}{A}$。

对于本题而言，y'' 的系数本来就是 1，所以不用变了，且 $p=-2$，$q=5$。

第二步：解方程 $r^2+pr+q=0$。

对于本题而言，要解的是 $r^2-2r+5=0$，解得 $r_{1,2}=1\pm2\mathrm{i}$。

第三步：写出通解。

对于本题而言，属于情况 3，所以通解为 $y=\mathrm{e}^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$。

5.7.2　求二阶常系数非齐次线性微分方程的通解的方法

求二阶常系数非齐次线性微分方程的通解的方法如下。

设 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 是一个二阶常系数非齐次线性微分方程，则

第一步：先把 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 当成它所对应的二阶常系数齐次线性微分方程 $Ay''+By'+Cy=0$，用 **5.7.1** 节讲的三个步骤求出 $Ay''+By'+Cy=0$ 的通解。

第二步：再求出 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 的一个特解。那么这个特解应该如何求呢？下面具体说一下。

在考研中，题中所给的 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 中的 $f(x)$ 的形式要么是 $P_n(x)\times\mathrm{e}^{\lambda x}$ [$P_n(x)$ 为 n 次多项式]，要么是 $[P_n(x)\sin\beta x+Q_m(x)\cos\beta x]\times\mathrm{e}^{\lambda x}$ [$P_n(x)$ 为 n 次多项式，$Q_m(x)$ 为 m 次多项式]，只有这两种情况。

情况 1：如果题中所给的 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 中的 $f(x)$ 的形式是 $P_n(x)\times\mathrm{e}^{\lambda x}$ [$P_n(x)$ 为 n 次多项式]，那么就设特解 $y^*=x^k\times H_n(x)\times\mathrm{e}^{\lambda x}$ [$H_n(x)$ 为 n 次多项式，即和 $P_n(x)$ 的次数一样]。也就是说，只需要求出 k 和 $H_n(x)$，特解 y^* 就求完了。那么 k 和 $H_n(x)$ 怎么求呢？先说 k 的求法：如果 λ 等于 r_1 又等于 r_2，那么 k 取 **2**；如果 λ 等于 r_1 和 r_2 中的一个，那么 k 取 **1**；如果 λ 既不等于 r_1 也不等于 r_2，那么 k 取 **0**。再说 n 次多项式 $H_n(x)$ 的求法：直接代入微分方程里去求就行了。

情况 2：如果题中所给的 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 中的 $f(x)$ 的形式是 $[P_n(x)\sin\beta x+Q_m(x)\cos\beta x]\times\mathrm{e}^{\lambda x}$ [$P_n(x)$ 为 n 次多项式，$Q_m(x)$ 为 m 次多项式]，那么就设特解 $y^*=x^k\times[R_l(x)\cos\beta x+S_l(x)\sin\beta x]\times\mathrm{e}^{\lambda x}$ [$R_l(x)$、$S_l(x)$ 均为 l 次多项式，l 是 m 和 n 中大的那个数，即多项式 $R_l(x)$、$S_l(x)$ 的次数与多项式 $P_n(x)$、$Q_m(x)$ 中次数高的那个一致]。也就是说，只需要求出 k、$R_l(x)$、$S_l(x)$，特解 y^* 就求完了。那么 k、$R_l(x)$、$S_l(x)$ 怎么求呢？先说 k 的求法：如果 $\lambda\pm\beta\mathrm{i}$ 是 r_1 和 r_2，那么 k 取 **1**；如果 $\lambda\pm\beta\mathrm{i}$ 不是 r_1 和 r_2，那么 k 取 **0**。再说 l 次多项式 $R_l(x)$、$S_l(x)$ 的求法：直接代入微分方程里去求就行了。

第三步：用第一步求得的 $Ay''+By'+Cy=0$ 的通解加上第二步求得的 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 的特解，得到的就是 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 的通解。

下面来看例题。

例. 求微分方程 $y''-3y'=2-6x$ 的通解。

解： 由于微分方程 $y''-3y'=2-6x$ 是二阶微分方程，并且形式是 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ [$f(x)\neq 0$]，并且 A、B、C 均为常数，所以微分方程 $y''-3y'=2-6x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程，应该按照本小节所讲的方法来求它的通解。

第一步：先把 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 当成它所对应的二阶常系数齐次线性微分方程 $Ay''+By'+Cy=0$，用 5.7.1 节讲的三个步骤求出 $Ay''+By'+Cy=0$ 的通解。

对于本题而言，二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-3y'=2-6x$ 所对应的二阶常系数齐次线性微分方程是 $y''-3y'=0$，用 5.7.1 节所讲的三个步骤来求 $y''-3y'=0$ 的通解。

（1）第一步：先把 y'' 的系数变为 1，即变为 $y''+\dfrac{B}{A}y'+\dfrac{C}{A}y=0$，记 $p=\dfrac{B}{A}$，$q=\dfrac{C}{A}$。

对于本题而言，由于是 $y''-3y'=0$，y'' 的系数本来就是 1，所以不用变了，且 $p=-3$，$q=0$。

（2）第二步：解方程 $r^2+pr+q=0$。

对于本题而言，要解的是 $r^2-3r=0$，解得 $r_1=0$，$r_2=3$。

（3）第三步：写出通解。

对于本题而言，属于情况 1，所以通解为 $y=C_1+C_2\mathrm{e}^{3x}$。

第二步：再求出 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 的一个特解。

对于本题来说，本题的 $f(x)$ 是 $2-6x$，所以很明显本题属于情况 1。也就是说，$f(x)$ 的形式是 $P_n(x)\times\mathrm{e}^{\lambda x}$ [$P_n(x)$ 为 n 次多项式]，其中，$P_n(x)$ 为 $2-6x$（这是一次多项式），$\mathrm{e}^{\lambda x}$ 为 1（也就是 λ 为 0）。所以设特解 $y^*=x^k\times H_n(x)\times\mathrm{e}^{\lambda x}$ [$H_n(x)$ 为 n 次多项式，即和 $P_n(x)$ 的次数一样]。

对于本题而言，由于 $P_n(x)$ 为 $2-6x$（这是一次多项式），所以 $H_n(x)$ 也为一次多项式，而一次多项式的通式是 $Ax+B$，因此设 $H_n(x)=Ax+B$。本题的 $P_n(x)$ 为 $2-6x$，如果本题的 $P_n(x)$ 是 $2x$ 呢？那把 $H_n(x)$ 设成什么？也是设成 $H_n(x)=Ax+B$。因为无论是 $2-6x$ 还是 $2x$，都是一次多项式，而一次多项式的通式是 $Ax+B$。如果 $P_n(x)$ 为 3

呢？那把 $H_n(x)$ 设成什么？那就是设成 $H_n(x)=A$。因为3是零次多项式，而零次多项式的通式就是 A。如果 $P_n(x)$ 为 $4x^2$，或者为 $5x^2+6x$，或者为 $7x^2-4$ 呢？那把 $H_n(x)$ 设成什么？那就是设成 $H_n(x)=Ax^2+Bx+C$。因为无论是 $4x^2$ 还是 $5x^2+6x$ 还是 $7x^2-4$，都是二次多项式，而二次多项式的通式就是 Ax^2+Bx+C。

对于本题而言，$e^{\lambda x}=1$（这是题中明摆着给的）。

所以综上所述，特解 $y^*=x^k\times H_n(x)\times e^{\lambda x}$ 在本题中就是 $y^*=x^k\times(Ax+B)$。

也就是说，只需要求出 k 和 $H_n(x)$（也就是 $Ax+B$ 中的待定系数 A、B），特解 y^* 就求完了。那么 k 和 $H_n(x)$（也就是 $Ax+B$ 中的待定系数 A、B）该怎么求呢？

前面的讲解中已经很明显地告诉大家求法了。

先说 k 的求法：如果 λ 等于 r_1 又等于 r_2，那么 k 取 2；如果 λ 等于 r_1 和 r_2 中的一个，那么 k 取 1；如果 λ 既不等于 r_1 也不等于 r_2，那么 k 取 0。再说 n 次多项式 $H_n(x)$ 的求法：直接代入微分方程里去求就行了。

那么对于本题而言，由于 $\lambda=0$，第一步算出 $r_1=0$，$r_2=3$，所以本题属于“λ 等于 r_1 和 r_2 中的一个”，因此 $k=1$。

到目前为止，特解 $y^*=x^k\times(Ax+B)$ 已经成了 $y^*=x(Ax+B)$。

那么对于 $H_n(x)$（也就是 $Ax+B$ 中的待定系数 A、B）就直接代入微分方程里去求。这就是说，既然 $y^*=x(Ax+B)$ 是微分方程 $y''-3y'=2-6x$ 的解，那么这也就意味着 $y=x(Ax+B)$ 必然能使得 $y''-3y'=2-6x$ 成立，所以就把 $y=x(Ax+B)$

代入 $y''-3y'=2-6x$ 中，解出 A、B 就可以了。

由于 $y=x(Ax+B)=Ax^2+Bx$，所以 $y'=2Ax+B$，$y''=2A$，则

$$y''-3y'=2A-3(2Ax+B)=-6Ax+2A-3B$$

而题中说 $y''-3y'=2-6x$，所以有

$$-6Ax+2A-3B=2-6x$$

即

$$\begin{cases}-6A=-6\\2A-3B=2\end{cases}$$

解得 $A=1$，$B=0$。

所以 $y^*=x(Ax+B)=x^2$。

第三步：用第一步求得的 $Ay''+By'+Cy=0$ 的通解加上第二步求得的 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 的特解，得到的就是 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 的通解。

对于本题而言，第一步求得的通解为 $y=C_1+C_2e^{3x}$，第二步求得的特解为 $y^*=x^2$，所以微分方程 $y''-3y'=2-6x$ 的通解为 $y=x^2+C_1+C_2e^{3x}$。

例. 求微分方程 $y''+y=\dfrac{1}{2}\cos x$ 的通解。

解： 由于微分方程 $y''+y=\dfrac{1}{2}\cos x$ 是二阶微分方程，并且形式是 $Ay''+By'+Cy=f(x)\,[f(x)\neq0]$，并且 A、B、C 均为常数，所以微分方程 $y''+y=\dfrac{1}{2}\cos x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程，应该按照本小节所讲的方法来求它的通解。

第一步：先把 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 当成它所对应的二阶常系数齐次线性微分方程 $Ay''+By'+Cy=0$，用 5.7.1 节讲的三个步骤求出 $Ay''+By'+Cy=0$ 的通解。

对于本题而言，二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+y=\dfrac{1}{2}\cos x$ 所对应的二阶常系数齐次线性微分方程是 $y''+y=0$，用 5.7.1 节所讲的三个步骤来求 $y''+3y'=0$ 的通解。

（1）第一步：先把 y'' 的系数变为 1，即变为 $y''+\dfrac{B}{A}y'+\dfrac{C}{A}y=0$，记 $p=\dfrac{B}{A}$，$q=\dfrac{C}{A}$。

对于本题而言，由于是 $y''+y=0$，y'' 的系数本来就是 1，所以不用变了，且 $p=0$，$q=1$。

（2）第二步：解方程 $r^2+pr+q=0$。

对于本题而言，要解的是 $r^2+1=0$，解得 $r_{1,2}=\pm i$。

（3）第三步：写出通解。

对于本题而言，属于情况 3，所以通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$。

第二步：再求出 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 的一个特解。

对于本题来说，本题的 $f(x)$ 是 $\frac{1}{2}\cos x$，所以很明显本题属于情况 2。也就是说，$f(x)$ 的形式是 $[P_n(x)\sin\beta x+Q_m(x)\cos\beta x]\times e^{\lambda x}$ [$P_n(x)$ 为 n 次多项式,$Q_m(x)$ 为 m 次多项式]，其中，$P_n(x)$ 为 0（这是常数，所以是零次多项式），$Q_m(x)=\frac{1}{2}$（这是常数，所以是零次多项式），$\beta=1$，$e^{\lambda x}$ 为 1（也就是 λ 为 0）。所以，设特解 $y^*=x^k\times[R_l(x)\cos\beta x+S_l(x)\sin\beta x]\times e^{\lambda x}$ [$R_l(x)$、$S_l(x)$ 均为 l 次多项式，l 是 m 和 n 中大的那个数，即多项式 $R_l(x)$、$S_l(x)$ 的次数与多项式 $P_n(x)$、$Q_m(x)$ 中次数高的那个一致]。

对于本题而言，由于 $P_n(x)$ 的次数为 0，$Q_m(x)$ 的次数也为 0，0 和 0 中大的数还是 0，所以 $R_l(x)$、$S_l(x)$ 均为零次多项式，而零次多项式的通式是 A，设 $R_l(x)=A$，$S_l(x)=B$ [要注意，虽然 $R_l(x)$、$S_l(x)$ 均为零次多项式，也就是常数，但这不意味着这两者相等，所以 $S_l(x)$ 不能再设成 A]。

对于本题而言，$\beta=1$（这是题中明摆着给的），$e^{\lambda x}=1$（这是题中明摆着给的）。

所以综上所述，特解 $y^*=x^k\times[R_l(x)\cos\beta x+S_l(x)\sin\beta x]\times e^{\lambda x}$ 在本题中就是 $y^*=x^k\times(A\cos x+B\sin x)$。

也就是说，只需要求出 k 和待定系数 A、B，特解 y^* 就求完了。那么 k 和待定系数 A、B 该怎么求呢？

前面的讲解中已经很明显地告诉大家求法了。

先说 k 的求法：如果 $\lambda\pm\beta i$ 是 r_1 和 r_2，那么 k 取 1；如果 $\lambda\pm\beta i$ 不是 r_1 和 r_2，那么 k 取 0。再说 l 次多项式 $R_l(x)$、$S_l(x)$ 的求法：直接代入微分方程里去求就行了。

那么对于本题而言，由于 $\lambda=0$，$\beta=1$，则 $\lambda\pm\beta\,i=0\pm 1i=\pm i$，第一步算出 $r_{1,2}=\pm i$，所以本题属于"$\lambda\pm\beta i$ 是 r_1 和 r_2"，因此 $k=1$。

到目前为止，特解 $y^*=x^k\times(A\cos x+B\sin x)$ 已经成了 $y^*=x(A\cos x+B\sin x)$。

那么对于待定系数 A、B 就直接代入微分方程里去求。这就是说，既然 $y=x(A\cos x+B\sin x)$ 是微分方程 $y''+y=\frac{1}{2}\cos x$ 的解，那么这也就意味着 $y=x(A\cos x+B\sin x)$ 必然能使得 $y''+y=\frac{1}{2}\cos x$ 成立，所以就把 $y=x(A\cos x+B\sin x)$

代入 $y''+y=\frac{1}{2}\cos x$ 中，解出 A、B 就可以了。

由于 $y=x(A\cos x+B\sin x)$，所以 $y'=(B-Ax)\sin x+(A+Bx)\cos x$，$y''=(-2A-Bx)\sin x+(2B-Ax)\cos x$，则

$$y''+y=(-2A-Bx)\sin x+(2B-Ax)\cos x+x(A\cos x+B\sin x)$$

化简得

$$y''+y=-2A\sin x+2B\cos x$$

而题中说 $y''+y=\frac{1}{2}\cos x$，所以有

$$-2A\sin x+2B\cos x=\frac{1}{2}\cos x$$

即

$$\begin{cases}-2A=0\\ 2B=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

解得　$A=0$，$B=\frac{1}{4}$。

所以 $y^*=x(A\cos x+B\sin x)=\frac{x\sin x}{4}$。

第三步：用第一步求得的 $Ay''+By'+Cy=0$ 的通解加上第二步求得的 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 的特解，得到的就是 $Ay''+By'+Cy=f(x)$ 的通解。

对于本题而言，第一步求得的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$，第二步求得的特解为 $y^*=\frac{x\sin x}{4}$，所以微分方程 $y''+y=\frac{1}{2}\cos x$ 的通解为 $y=\frac{x\sin x}{4}+C_1\cos x+C_2\sin x$。

5.8 求二阶变系数微分方程的通解的方法

5.7 节讲的是求二阶常系数线性微分方程的通解的方法，而本节要给大家讲的是求二阶变系数微分方程的通解的方法。

考研中所考到的二阶变系数微分方程有一个特点，那就是，要么微分方程中不含 y，要么微分方程中不含 x。

例如，求微分方程 $xy''-y'=x^2$ 的通解和求微分方程 $yy''-(y')^2=0$ 的通解，这两道题中所给的微分方程都是二阶变系数微分方程，第一个微分方程中不含 y（只含 y''、y'、x），第二个微分方程中不含 x（只含 y''、y'、y）。

那么，求二阶变系数微分方程的通解的方法是什么呢？这正是本节要给大家讲的。本节又分为两个小节，第一小节给大家讲求不含 y 的二阶变系数微分方程的通解的方法，第二小节给大家讲求不含 x 的二阶变系数微分方程的通解的方法。

5.8.1 求不含 y 的二阶变系数微分方程的通解的方法

求不含 y 的二阶变系数微分方程的通解的方法是：设 $y'=p$，则 $y''=p'$，这样一来，二阶变系数微分方程就变为一个一阶微分方程，然后用求一阶微分方程的通解的方法去求就可以了。但是，当求完之后，还要将 p 还原成 y'，然后再求一次一阶微分方程的通解。

下面来看例题。

例. 求微分方程 $xy''-y'=x^2$ 的通解。

解： 一眼就能看出来，微分方程 $xy''-y'=x^2$ 是一个二阶微分方程。然后，由于 y'' 的系数不是常数，而是变量（变量 x），所以微分方程 $xy''-y'=x^2$ 是一个二阶变系数微分方程。又因为二阶变系数微分方程 $xy''-y'=x^2$ 中不含 y，所以应该用本小节所讲的方法来做。

设 $y'=p$，则 $y''=p'$，那么微分方程 $xy''-y'=x^2$ 就变为 $xp'-p=x^2$。$xp'-p=x^2$ 可以化为 $p'-\dfrac{1}{x}p=x$。这是一个一阶微分方程，用求一阶微分方程的通解的五种方法中的公式法来做。所以，微分方程 $p'-\dfrac{1}{x}p=x$ 的通解为 $p=\mathrm{e}^{-\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}(\int x\times\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)$。通过计算可得 $p=x^2+C_1x$（大家注意，不能写为 $p=x^2+Cx$，因为还需要求一次一阶微分方程的通解，也就是说到时候还会出现一个常数）。

现在将 p 还原成之前设的 y'，即

$y'=x^2+C_1x$　　　　（1）式

现在解这个一阶微分方程就可以了，解完就是最后的答案。

y' 其实就是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以（1）式可以变为

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+C_1x$　　　　（2）式

整理可得

$1\mathrm{d}y=(x^2+C_1x)\mathrm{d}x$　　　　（3）式

用求一阶微分方程的通解的五种方法中的可分离变量法来做，即

$\int1\mathrm{d}y=\int(x^2+C_1x)\mathrm{d}x$　　　　（4）式

通过计算可得 $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2C_1+C_2$。

本题就做完了，也就是说，微分方程 $xy''-y'=x^2$ 的通解为 $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2C_1+C_2$。

5.8.2 求不含 x 的二阶变系数微分方程的通解的方法

求不含 x 的二阶变系数微分方程的通解的方法是：设 $y'=p$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\times\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，这样一来，二阶变系数微分方程就变为一个一阶微分方程，然后用求一阶微分方程的通解的方法去求就可以了。但是，当求完之后，还要将 p 还原成 y'，然后再求一次一阶微分方程的通解。

下面来看例题。

例. 求微分方程 $yy''-(y')^2=0$ 的通解。

解： 一眼就能看出来，微分方程 $yy''-(y')^2=0$ 是一个二阶微分方程。然后，由于 y'' 的系数不是常数而是 y（或者说由于 y 的系数不是常数而是 y''），所以微分方程 $yy''-(y')^2=0$ 是一个二阶变系数微分方程。又因为二阶变系数微分方程 $yy''-(y')^2=0$ 中不含 x，所以应该用本小节所讲的方法来做。

设 $y'=p$，则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，那么微分方程 $yy''-(y')^2=0$ 就变为 $yp=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=0$。这是一个一阶微分方程，用求一阶微分方程的通解的方法来做。

由于 $yp=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=0$ 可以整理为

$$\frac{1}{p}\mathrm{d}p=\frac{1}{y}\mathrm{d}y \qquad \text{（1）式}$$

求一阶微分方程的通解的五种方法中的可分离变量法来做，即

$$\int\frac{1}{p}\mathrm{d}p=\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y \qquad \text{（2）式}$$

通过计算可得 $\ln|p|=\ln|y|+C_1$。为了后续算另一个一阶微分方程方便，把这个结果整理一下。等号的左右两侧同时取以 e 为底，得

$$\mathrm{e}^{\ln|p|}=\mathrm{e}^{\ln|y|+C_1} \qquad \text{（3）式}$$

将（3）式化简一下，得

$$|p|=|y|\mathrm{e}^{C_1} \qquad \text{（4）式}$$

继续化简，也就是把绝对值去掉，得

$$p=\pm y\mathrm{e}^{C_1} \qquad \text{（5）式}$$

又因为 $\pm\mathrm{e}^{C_1}$ 其实就是 C_1（要注意，这里并非指的是当 C_1 取某个定值时，$\pm\mathrm{e}^{C_1}$ 就等于 C_1，而是说 $\pm\mathrm{e}^{C_1}$ 是任意常数，而 C_1 也是任意常数），所以

$$p=C_1y \qquad \text{（6）式}$$

现在将 p 还原成之前设的 y'，即

$$y'=C_1y \qquad \text{（7）式}$$

现在解这个一阶微分方程就可以了，解完就是最后的答案。

y' 其实就是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以（7）式可以变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1y \qquad \text{（8）式}$$

整理可得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=C_1\mathrm{d}x \qquad \text{（9）式}$$

用求一阶微分方程的通解的五种方法中的可分离变量法来做，即

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int C_1\mathrm{d}x \qquad \text{（10）式}$$

通过计算可得 $\ln|y|=C_1x+C_2$。

本题就做完了，也就是说，微分方程 $yy''-(y')^2=0$ 的通解为 $\ln|y|=C_1x+C_2$。

5.9　线性微分方程解的性质与结构

之前的几节给大家讲的都是如何解微分方程，而本节所讨论的则是解出微分方程之后的事儿，也就是线性微分方程解的性质与结构。

性质 1. **若 $y^*(x)$ 为某非齐次线性微分方程的一个解，$Y(x)$ 为该非齐次线性微分方程所对应的齐次线性微分方程的通解，则 $Y(x)+y^*(x)$ 为该非齐次线性微分方程的通解。**

这性质 1 大家应该很熟悉，之前给大家讲的求二阶常系数非齐次线性微分方程的通解的方法就是性质 1。

性质 2. 若 $y^*(x)$ 为某非齐次线性微分方程的一个解，$Y(x)$ 为该非齐次线性微分方程所对应的齐次线性微分方程的解，则 $Y(x)+y^*(x)$ 为该非齐次线性微分方程的解。

这性质 2 和性质 1 之间就差了一个“通”字。

性质 3. 若 $y_1^*(x)$、$y_2^*(x)$ 为某非齐次线性微分方程的两个解，则 $y=y_1^*(x)-y_2^*(x)$ 为该非齐次线性微分方程所对应的齐次线性微分方程的解。

下面来看例题。

例. 已知某非齐次线性微分方程的两个解为 $y=3x^2$ 和 $y=3x^2+3$，求该非齐次线性微分方程所对应的齐次线性微分方程的一个解，并构造出这么一个非齐次线性微分方程，求构造出的这个非齐次线性微分方程所对应的齐次线性微分方程的通解。

解： 本题有三问。先来看第一问，也就是求该非齐次线性微分方程所对应的齐次线性微分方程的一个解。

直接根据性质 3 可得，$y=3$ 是该非齐次线性微分方程所对应的齐次线性微分方程的一个解（或者 $y=-3$ 是该非齐次线性微分方程所对应的齐次线性微分方程的一个解）。

再来看第二问和第三问。这第二问和第三问就与本节所讲的知识点无关啦！

先来看第二问，第二问让构造一个非齐次线性微分方程，使得 $y=3x^2$ 和 $y=3x^2+3$ 是它的两个解。

这其实很容易构造，如 $y''+y'=6x+6$。

最后来看第三问，也就是解一下构造的这个非齐次线性微分方程 $y''+y'=6x+6$ 所对应的齐次线性微分方程 $y''+y'=0$。很显然这是一个二阶常系数齐次线性微分方程，所以应该按照 5.7.1 节讲的三个步骤来求其通解。

第一步：先把 y'' 的系数变为 1，即变为 $y''+\dfrac{B}{A}y'+\dfrac{C}{A}y=0$，记 $p=\dfrac{B}{A}$，$q=\dfrac{C}{A}$。

对于本题而言，y'' 的系数本来就是 1，所以不用变了，且 $p=1$，$q=0$。

第二步：解方程 $r^2+pr+q=0$。

对于本题而言，要解的是 $r^2+r=0$，解得 $r_1=0$，$r_2=-1$。

第三步：写出通解。

对于本题而言，属于情况 1，所以通解为 $y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-x}$。

本题的三问已经全做完了。最后，还是来验证一下。第一问根据本节所讲的性质 3 推出了 $y=3$ 是该非齐次线性微分方程所对应的齐次线性微分方程的一个解，现在来验证一下看对不对，就拿所构造的非齐次线性微分方程所对应的齐次线性微分方程来验证。

由于已经求出了构造的非齐次线性微分方程所对应的齐次线性微分方程的通解 $y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-x}$，那么让 $C_1=3$、$C_2=0$ 就可以了。

性质 4. 若 $y_1(x)$、$y_2(x)$ 为某齐次线性微分方程的两个解，则 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 也为该齐次线性微分方程的解。

这性质 4 与非齐次线性微分方程无关，只与齐次线性微分方程有关。

性质 5. 若 $y_1(x)$，$y_2(x)$，…，$y_n(x)$ 为某 n 阶齐次线性微分方程的 n 个线性无关的解，则 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$ 为该齐次线性微分方程的通解。

下面来看例题。

例. 设函数 $y_1(x)$、$y_2(x)$、$y_3(x)$ 线性无关，而且它们三个都是某非齐次线性微分方程的解，C_1、C_2 为任意常数，则该非齐次线性微分方程的通解是（　　）。

（A）$C_1y_1+C_2y_2+y_3$

（B）$C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$

（C）$C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$

（D）$C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

解： 本题中出现了“线性无关”一词，这里的“线性无关”和线性代数学科中所讲的向量线性无关是一样的。

现在考查一下以下这个式子。

$$\alpha(y_1-y_3)+\beta(y_2-y_3)=0 \qquad (1)\text{式}$$

由线性代数中讲的线性无关可知，若只有在α、β这两个常数都为 0 时（1）式才成立，则称函数y_1-y_3、y_2-y_3线性无关，否则称函数y_1-y_3、y_2-y_3线性相关。

现在把（1）式变一下形，（1）式可以变形为

$\alpha y_1+\beta y_2-(\alpha+\beta)y_3=0$　　　　（2）式

由于题中说函数$y_1(x)$、$y_2(x)$、$y_3(x)$线性无关，所以必有

$$\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \alpha+\beta=0\end{cases}$$　　　　（3）式

解得$\alpha=0$，$\beta=0$。

把$\alpha=0$、$\beta=0$结合（1）式一起看，可知函数y_1-y_3、y_2-y_3线性无关。

现在来看一下（D）选项，也就是$C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$。这式子可以改写为$y_3+C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)$。

由于题中说$y_1(x)$、$y_2(x)$、$y_3(x)$它们三个都是非齐次线性微分方程的解，所以根据本节所讲的五条性质中的性质 3 可知，y_1-y_3、y_2-y_3都为该非齐次线性微分方程所对应的齐次线性微分方程的解。

又因为刚才已经推出了函数y_1-y_3、y_2-y_3线性无关，所以根据本节所讲的五条性质中的性质 5 可知，该非齐次线性微分方程所对应的二阶齐次线性微分方程的通解为$C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)$。

由于$C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)$是该非齐次线性微分方程所对应的二阶齐次线性微分方程的通解，而y_3是该非齐次线性微分方程的一个解，所以根据本节所讲的五条性质中的性质 1 可知，$y_3+C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)$是该非齐次线性微分方程的通解。

本题选择（D）选项。

第6章

多元函数微分学

6.1 什么叫多元函数

之前我们研究的都是一元函数，比如 $y=x$ 、 $y=\sin x$ 、 $e^x+\sin y=0$ 等，本节来看一下多元函数。

多元函数指的其实就是自变量个数不止一个的函数，比如 $z=\sin x+2y$ 、 $u^2-4x-\arcsin y-z=0$ 等。

我现在来给大家详细地讲一下为什么我刚刚说的 $z=\sin x+2y$ 、 $u^2-4x-\arcsin y-z=0$ 是多元函数。

多元函数指的其实就是自变量个数不止一个的函数。

我们先来看函数 $z=\sin x+2y$ 。在本书的第 2 章，我就给大家讲过，方程个数与因变量个数一定是相等的。现在只有一个方程，说明只有一个因变量。那么函数 $z=\sin x+2y$ 中一共出现了几个变量？很显然出现了三个变量（分别是 x 、 y 、 z ）。既然有一个因变量，共有三个变量，那么自变量有多少个？很显然有两个，因为 $3-1=2$ 。大家看，由于自变量的个数不止一个，所以函数 $z=\sin x+2y$ 是多元函数。而且它是一个二元函数，大家记住，自变量有几个，就是几元函数。当然了，至于在 $z=\sin x+2y$ 中到底哪一个变量做因变量，哪两个变量做自变量那就随意了。

我们再来看函数 $u^2-4x-\arcsin y-z=0$ 。在本书的第 2 章，我就给大家讲过，方程个数与因变量个数一定是相等的。现在只有一个方程，说明只有一个因变量。那么函数 $u^2-4x-\arcsin y-z=0$ 中一共出现了几个变量？很显然出现了四个变量（分别是 x 、 y 、 z 、 u ）。既然有一个因变量，共有四个变量，那么自变量有多少个？很显然有三个，因为 $4-1=3$ 。大家看，由于自变量的个数不止一个，所以函数 $u^2-4x-\arcsin y-z=0$ 是多元函数。而且它是一个三元函数，大家记住，自变量有几个，就是几元函数。当然了，至于在 $u^2-4x-\arcsin y-z=0$ 中到底哪一个变量做因变量，哪三个变量做自变量那就随意了。

想必大家现在已经清楚了什么叫多元函数，最后和大家说一下，考研中主要讨论的是二元函数。

6.2 二元函数的极限计算方法

本节我们讨论二元函数的极限计算方法。在讨论之前，我们先来看看二元函数的极限是什么样的。如果连二元函数的极限是什么样的都不知道，那何谈计算方法呢。

大家请看以下几个例子。

例. 请计算 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}(1+\frac{1}{xy})^{\frac{x^2}{x+y}}\quad (a\neq 0)$ 。

例. 请计算 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2|y|^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}$ 。

例. 请计算 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 。

以上三道题都是计算二元函数极限的题，现在大家应该知道二元函数的极限是什么样的了吧。其实就是符号“ lim ”下面写两行东西，第一行写“ $x\to$ 某某某”，第二行写“ $y\to$ 某某某”。

再和大家说一下，当 x 、 y 都趋于定值的时候，二元函数的极限也可以写为 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 。

例如，上面第二个例子也可以写为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2|y|^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}$ ，第三个例子也可以写为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 。

好，现在我正式来给大家讲二元函数的极限的计算方法。

二元函数的极限的计算实际上是很麻烦的，要比一元函数的极限的计算麻烦得多，要想给大家完完全全地讲明白二元函数的极限的计算还真是很费劲。不过，如果是针对考研数学来说，那可就轻松多了。因为在考研数学中，涉及的二元函数的极限只有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 这一个。

接下来我们就只针对二元函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 进行讨论，其他的就不管了。

大家记住，极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 有可能存在也有可能不存在，所以当我们遇到需要计算极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 的时候，应该按照如下三个步骤来处理。

第一步. 初步判断极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在。怎么判断呢？具体来说：令 $y=kx$（k 为任意常数），把 $y=kx$ 代入二元函数 $f(x,y)$，这样一来，二元函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 就会变成一元函数的极限。然后我们用第 1 章所讲的计算极限的方法来算一下该一元函数的极限。如果算完发现是 ∞ 或者答案中含有 k，就说明二元函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在（因为极限如果存在就肯定唯一，而 k 虽然是常数，但它是任意常数，是可以变的），第二步和第三步也就不用再进行了。如果算完发现是一个确定的常数，那此时也不能说明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 就一定存在，还要进行第二步，再进一步判断一下极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在。

第二步. 进一步判断极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在。令 $y=kx^2$（k 为任意常数），把 $y=kx^2$ 代入二元函数 $f(x,y)$，这样一来，二元函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 就会变成一元函数的极限。然后我们用第 1 章所讲的计算极限的方法来算一下该一元函数的极限。如果算完发现是 ∞ 或者答案中含有 k，就说明二元函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在（因为极限如果存在就肯定唯一，而 k 虽然是常数，但它是任意常数，是可以变的），第三步也就不用再进行了。如果算完发现是一个确定的常数，那其实理论上来讲也不能说明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 就一定存在；但是如果在考研数学中，这时就已经可以认为极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 存在了，这时就要进行第三步，把极限求出来。

第三步. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$。方法很简单，令 $y=0$，把 $y=0$ 代入二元函数 $f(x,y)$，这样一来，二元函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 就会变成一元函数的极限。然后我们用第 1 章所讲的计算极限的方法来算一下该一元函数的极限就可以了。

我们来看几道例题。

例. 请计算极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}$ 。

解：本题明显是一道二元函数的极限的计算题，并且给的是“$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$”，所以我们应该用本节所讲的方法来求解。

第一步. 初步判断极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在。

对于本题来说，令 $y=kx$，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}$ 就变为了 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+(kx)^2}{x^2+(kx)^2+(x-kx)^2}$ 。

好，接下来我们就用第 1 章所讲的函数极限的计算方法来计算一下极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+(kx)^2}{x^2+(kx)^2+(x-kx)^2}$ 。

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+(kx)^2}{x^2+(kx)^2+(x-kx)^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1+k^2)x^2}{[1+k^2+(1-k)^2]x^2} \qquad \text{（1）式}$$

（1）式的等式右侧可以化简为

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+k^2)x^2}{[1+k^2+(1-k)^2]x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1+k^2}{1+k^2+(1-k)^2} \qquad \text{（2）式}$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+(kx)^2}{x^2+(kx)^2+(x-kx)^2}=\lim_{x\to0}\frac{1+k^2}{1+k^2+(1-k)^2} \qquad \text{（3）式}$$

$\dfrac{1+k^2}{1+k^2+(1-k)^2}$ 是常数，我们知道无论 x 趋于多少，常数的极限永远等于它本身，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+k^2}{1+k^2+(1-k)^2}=\frac{1+k^2}{1+k^2+(1-k)^2} \qquad （4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+(kx)^2}{x^2+(kx)^2+(x-kx)^2}=\frac{1+k^2}{1+k^2+(1-k)^2} \qquad （5）式$$

好，最终结果我们算完了，发现最终结果里面含有 k，说明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}$ 不存在，第二步和第三步也就不用再进行了。

例. 请计算极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y}{2x^2+y}$。

解： 本题明显是一道二元函数的极限的计算题，并且给的是“$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$”，所以我们应该用本节所讲的方法来求解。

第一步. 初步判断极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在。

对于本题来说，令 $y=kx$，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y}{2x^2+y}$ 就变为了 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+kx}{2x^2+kx}$。

好，接下来我们就用第 1 章所讲的函数极限的计算方法来计算一下极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+kx}{2x^2+kx}$。

通过计算可知 $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+kx)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}(2x^2+kx)=0$，所以我们用第一类洛必达法则来计算。即

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+kx}{2x^2+kx}\overset{?}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x+k}{4x+k}=\frac{0+k}{0+k}=1$$

由于最终的计算结果为 1，1 是常数，属于“常数或 ∞”，所以我们把上式中的“$\overset{?}{=}$”改写为“$=$”，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+kx}{2x^2+kx}=1 \qquad （1）式$$

好，最终结果我们算完了，发现最终结果是一个确定的常数，说明我们还需要继续进行第二步。

第二步. 进一步判断极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在。

对于本题来说，令 $y=kx^2$，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y}{2x^2+y}$ 就变为了 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+kx^2}{2x^2+kx^2}$。

好，接下来我们就用第 1 章所讲的函数极限的计算方法来计算一下极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+kx^2}{2x^2+kx^2}$。

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+kx^2}{2x^2+kx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+k)x^2}{(2+k)x^2} \qquad （2）式$$

（2）式的等式右侧可以化简为

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+k)x^2}{(2+k)x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+k}{2+k} \qquad （3）式$$

（2）式、（3）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+kx^2}{2x^2+kx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+k}{2+k} \qquad （4）式$$

我们知道 $\dfrac{1+k}{2+k}$ 是常数，也知道无论 x 趋于多少，常数的极限永远等于它本身，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+k}{2+k}=\frac{1+k}{2+k} \qquad （5）式$$

（4）式、（5）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+kx^2}{2x^2+kx^2}=\frac{1+k}{2+k} \qquad （6）式$$

好，最终结果我们算完了，发现最终结果里面含有 k，说明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y}{2x^2+y}$ 不存在，第三步也就不用再进行了。

例. 已知 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，请计算极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$。

解：本题明显是一道二元函数的极限的计算题，并且给的是“$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$”，所以我们应该用本节所讲的方法来求解。

第一步. 初步判断极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在。

本题与前两道题不同，本题让求的是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$，“$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$”后面跟着的是一个抽象的函数“$f(x,y)$”，而前两道题“$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$”后面跟着的都是具体的函数。

正因为有这个不同，我们现在要将 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 中的 $f(x,y)$ 显化。

题中告诉我们 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，那我们到底应该将 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 中的 $f(x,y)$ 显化为 0 呢，还是显化为 $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 呢？我来告诉大家，既然是“$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$”，这指的就是 (x,y) 永远只是趋于 $(0,0)$，而不能等于 $(0,0)$。因而我们将 $f(x,y)$ 显化为 $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$。即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

从现在开始，我们可以像前两道题那样来做了。

令 $y=kx$，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 就变为了 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}$。

好，接下来我们就用第 1 章所讲的函数极限的计算方法来计算一下极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}$。

$$\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2} \qquad （1）式$$

（1）式的等式右侧可以化简为

$$\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\lim_{x\to0}\frac{k}{1+k^2} \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{k}{1+k^2} \qquad （3）式$$

我们知道 $\dfrac{k}{1+k^2}$ 是常数，也知道无论 x 趋于多少，常数的极限永远等于它本身，所以有

$$\lim_{x\to0}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2} \qquad （4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2} \qquad （5）式$$

好，最终结果我们算完了，发现最终结果里面含有 k，说明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在，第二步和第三步也就不用再进行了。

例. 已知 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，请计算极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$。

解：本题明显是一道二元函数的极限的计算题，并且给的是“$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$”，所以我们应该用本节所讲的方法来求解。

第一步．初步判断极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 是否存在。

本题与上一道题相同，即“$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$”后面跟着的是一个抽象的函数“$f(x,y)$”，所以我们现在要将 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 中的 $f(x,y)$ 显化。

题中告诉我们 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，那我们到底应该将 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 中的 $f(x,y)$ 显化为 0 呢，还是显化为 $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ 呢？我来告诉大家，既然是“$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$”，这指的就是 (x,y) 永远只是趋于 $(0,0)$，而不能等于 $(0,0)$。因而我们将 $f(x,y)$ 显化为 $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$。即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$。

令 $y=kx$，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ 就变为了 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k^2x^4}{x^2+k^2x^2}$。

好，接下来我们就用第 1 章所讲的函数极限的计算方法来计算一下极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k^2x^4}{x^2+k^2x^2}$。

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k^2x^4}{x^2+k^2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k^2x^2}{1+k^2}$　　（1）式

（1）式的等式右侧可以化简为

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k^2x^2}{1+k^2}=\dfrac{k^2}{1+k^2}\lim\limits_{x\to0}x^2$　　（2）式

（1）式、（2）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k^2x^4}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k^2}{1+k^2}\lim\limits_{x\to0}x^2$　　（3）式

由代入法可知

$\lim\limits_{x\to0}x^2=0$　　（4）式

所以有

$\dfrac{k^2}{1+k^2}\lim\limits_{x\to0}x^2=\dfrac{k^2}{1+k^2}\times0=0$　　（5）式

（3）式、（5）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k^2x^4}{x^2+k^2x^2}=0$　　（6）式

好，最终结果我们算完了，发现最终结果是一个确定的常数，说明我们还需要继续进行第二步。

第二步．进一步判断极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 是否存在。

对于本题来说，令 $y=kx^2$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ 就变为了 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k^2x^6}{x^2+k^2x^4}$。

好，接下来我们就用第 1 章所讲的函数极限的计算方法来计算一下极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k^2x^6}{x^2+k^2x^4}$。

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k^2x^6}{x^2+k^2x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k^2x^6}{(1+k^2x^2)x^2}$　　（7）式

（7）式的等式右侧可以化简为

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k^2x^6}{(1+k^2x^2)x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k^2x^4}{1+k^2x^2}$　　（8）式

（7）式、（8）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k^2x^6}{x^2+k^2x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k^2x^4}{1+k^2x^2}$　　（9）式

由代入法可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^4}{1+k^2x^2}=\frac{k^2\times 0^4}{1+k^2\times 0^2}=\frac{0}{1}=0$$　（10）式

（9）式、（10）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^6}{x^2+k^2x^4}=0$$　（11）式

好，最终结果我们算完了，发现最终结果是一个确定的常数，说明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 存在（在考研数学中），我们还需要继续进行第三步，把极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 计算出来。

第三步. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$。

对于本题而言，要计算的是极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$，我们令 $y=0$，然后把 $y=0$ 代入 $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ 中，得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\times 0^2}{x^2+0^2}$。

这是一个一元函数的极限，我们用第 1 章所讲的计算极限的方法来算一下这个一元函数的极限就可以了，算出的结果就是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$。

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\times 0^2}{x^2+0^2}$ 可以化简为 $\lim\limits_{x\to 0}0$，由于常数的极限永远是它本身，所以 $\lim\limits_{x\to 0}0=0$，因而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$。

例. 已知 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，请计算极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$。

解： 本题明显是一道二元函数的极限的计算题，并且给的是“$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$”，所以我们应该用本节所讲的方法来求解。

第一步. 初步判断极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在。

本题与上一道题相同，即“$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$”后面跟着的是一个抽象的函数“$f(x,y)$”，我们现在先要将 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 中的 $f(x,y)$ 显化。

题中告诉我们 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，那我们到底应该将 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 中的 $f(x,y)$ 显化为 0 呢，还是显化为 $\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$ 呢？我来告诉大家，既然是“$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$”，这指的就是 (x,y) 永远只是趋于 $(0,0)$，而不能等于 $(0,0)$。因而我们将 $f(x,y)$ 显化为 $\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$。即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}[\frac{2xy^2}{x^2+y^2}-\frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}]。$$

令 $y=kx$，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}]$ 就变为了 $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{2k^2x^3}{x^2+k^2x^2}-\dfrac{2k^2x^5}{(x^2+k^2x^2)^2}]$。

好，接下来我们就用第 1 章所讲的函数极限的计算方法来计算一下极限 $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{2k^2x^3}{x^2+k^2x^2}-\dfrac{2k^2x^5}{(x^2+k^2x^2)^2}]$。

$$\lim_{x\to 0}[\frac{2k^2x^3}{x^2+k^2x^2}-\frac{2k^2x^5}{(x^2+k^2x^2)^2}]=\lim_{x\to 0}[\frac{2k^2x^3(x^2+k^2x^2)}{(x^2+k^2x^2)^2}-\frac{2k^2x^5}{(x^2+k^2x^2)^2}]$$　（1）式

（1）式的等式右侧可以化简为

$$\lim_{x\to 0}[\frac{2k^2x^3(x^2+k^2x^2)}{(x^2+k^2x^2)^2}-\frac{2k^2x^5}{(x^2+k^2x^2)^2}]=\lim_{x\to 0}\frac{2k^2x^3(x^2+k^2x^2)-2k^2x^5}{(x^2+k^2x^2)^2}$$　（2）式

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{x\to 0}[\frac{2k^2x^3}{x^2+k^2x^2}-\frac{2k^2x^5}{(x^2+k^2x^2)^2}]=\lim_{x\to 0}\frac{2k^2x^3(x^2+k^2x^2)-2k^2x^5}{(x^2+k^2x^2)^2}$$　（3）式

（3）式的等式右侧可以化简为

$$\lim_{x\to0}\frac{2k^2x^3(x^2+k^2x^2)-2k^2x^5}{(x^2+k^2x^2)^2}=\lim_{x\to0}\frac{2k^4x^5}{(x^2+k^2x^2)^2} \quad （4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}[\frac{2k^2x^3}{x^2+k^2x^2}-\frac{2k^2x^5}{(x^2+k^2x^2)^2}]=\lim_{x\to0}\frac{2k^4x^5}{(x^2+k^2x^2)^2} \quad （5）式$$

由代入法可知 $\lim\limits_{x\to0}2k^4x^5=0$， $\lim\limits_{x\to0}(x^2+k^2x^2)^2=0$，所以我们现在用洛必达法则来做。即

$$\lim_{x\to0}\frac{2k^4x^5}{(x^2+k^2x^2)^2}\overset{?}{=}\lim_{x\to0}\frac{10k^4x^4}{2(x^2+k^2x^2)(2x+2xk^2)} \quad （6）式$$

$$\lim_{x\to0}\frac{10k^4x^4}{2(x^2+k^2x^2)(2x+2xk^2)}=\lim_{x\to0}\frac{10k^4x^4}{(2x^2+2k^2x^2)(2x+2xk^2)} \quad （7）式$$

$$\lim_{x\to0}\frac{10k^4x^4}{(2x^2+2k^2x^2)(2x+2xk^2)}=\lim_{x\to0}\frac{10k^4x^4}{4x^3+4x^3k^2+4x^3k^2+4x^3k^4} \quad （8）式$$

（7）式、（8）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{10k^4x^4}{2(x^2+k^2x^2)(2x+2xk^2)}=\lim_{x\to0}\frac{10k^4x^4}{4x^3+4x^3k^2+4x^3k^2+4x^3k^4} \quad （9）式$$

$$\lim_{x\to0}\frac{10k^4x^4}{4x^3+4x^3k^2+4x^3k^2+4x^3k^4}=\lim_{x\to0}\frac{10k^4x^4}{4x^3(1+k^2+k^2+k^4)} \quad （10）式$$

（9）式、（10）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{10k^4x^4}{2(x^2+k^2x^2)(2x+2xk^2)}=\lim_{x\to0}\frac{10k^4x^4}{4x^3(1+k^2+k^2+k^4)} \quad （11）式$$

$$\lim_{x\to0}\frac{10k^4x^4}{4x^3(1+k^2+k^2+k^4)}=\lim_{x\to0}\frac{5k^4x}{2(1+k^2+k^2+k^4)} \quad （12）式$$

（11）式、（12）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{10k^4x^4}{2(x^2+k^2x^2)(2x+2xk^2)}=\lim_{x\to0}\frac{5k^4x}{2(1+k^2+k^2+k^4)} \quad （13）式$$

由代入法可知

$$\lim_{x\to0}\frac{5k^4x}{2(1+k^2+k^2+k^4)}=\frac{5k^4\times0}{2(1+k^2+k^2+k^4)}=0 \quad （14）式$$

（13）式、（14）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{10k^4x^4}{2(x^2+k^2x^2)(2x+2xk^2)}=0 \quad （15）式$$

好，由于最终的计算结果是 0，0 是常数，属于“常数或∞”，所以我们现在把（6）式中的“$\overset{?}{=}$”改写为“=”，即

$$\lim_{x\to0}\frac{2k^4x^5}{(x^2+k^2x^2)^2}=\lim_{x\to0}\frac{10k^4x^4}{2(x^2+k^2x^2)(2x+2xk^2)} \quad （16）式$$

（15）式、（16）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{2k^4x^5}{(x^2+k^2x^2)^2}=0 \quad （17）式$$

好，最终结果我们算完了，发现最终结果是一个确定的常数，说明我们还需要继续进行第二步。

第二步. 进一步判断极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在。

对于本题来说，令 $y=kx^2$， $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[\frac{2xy^2}{x^2+y^2}-\frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}]$ 就变为了 $\lim\limits_{x\to0}[\frac{2x^5k^2}{x^2+k^2x^4}-\frac{2x^7k^2}{(x^2+k^2x^4)^2}]$。

好，接下来我们就用第 1 章所讲的函数极限的计算方法来计算一下极限 $\lim\limits_{x\to0}[\frac{2x^5k^2}{x^2+k^2x^4}-\frac{2x^7k^2}{(x^2+k^2x^4)^2}]$。

该计算过程比较复杂，我就不给大家写详细的计算过程了，就告诉大家最后的计算结果是一个确定的常数。这说明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 存在（在考研数学中），我们还需要继续进行第三步，把极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 计算出来。

第三步. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$。

对于本题而言，要计算的是极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}]$，我们令 $y=0$，然后把 $y=0$ 代入 $\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$ 中，得 $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{2x\times0^2}{x^2+0^2}-\dfrac{2x^3\times0^2}{(x^2+0^2)^2})$。

这是一个一元函数的极限，我们用第 1 章所讲的计算极限的方法来算一下这个一元函数的极限就可以了，算出的结果就是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$。

$\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{2x\times0^2}{x^2+0^2}-\dfrac{2x^3\times0^2}{(x^2+0^2)^2})$ 可以化简为 $\lim\limits_{x\to0}0$，由于常数的极限永远是它本身，所以 $\lim\limits_{x\to0}0=0$，因而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}]=0$。

6.3　二元函数的连续性

当初给大家讲过一元函数的连续性，一元函数的连续性指的是“若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续”，换句话说，连续的意思就是“极限值 = 函数值”。

现在，我要给大家讲二元函数的连续性。二元函数的连续性与一元函数的连续性差不多，都是“极限值 = 函数值”。具体来说，二元函数的连续性指的是“若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续”。

是不是很简单？我们来看相应的例题。

例. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，请问二元函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否连续。

解： 那我们就算一下函数值和极限值，看二者是否相等就可以了。

我们先来算一下函数值，也就是 $f(0,0)$。

由于 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，所以 $f(0,0)=0$。

我们再来算一下极限值，也就是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$。

由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是一道二元函数的极限的计算题，并且是“$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$”，所以我们用上一节所讲的方法来求解。

第一步. 初步判断极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在。

我们现在先要将 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 中的 $f(x,y)$ 显化。

题中告诉我们 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，那到底应该将 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 中的 $f(x,y)$ 显化为 0 呢，还是将 $f(x,y)$ 显化为 $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 呢？我来告诉大家，既然是“$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$”，这指的就是 (x,y) 永远只是趋于 $(0,0)$，而不能等于 $(0,0)$。因而将 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 中的 $f(x,y)$ 显化为 $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$。即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

好，从现在开始，我们可以像前两道题那样来做了。

令 $y=kx$，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 就变为了 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}$。

好，接下来我们就用第 1 章所讲的函数极限的计算方法来计算一下极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}$。

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^2}{(1+k^2)x^2}$ （1）式

（1）式的等式右侧可以化简为

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k}{1+k^2}$ （2）式

（1）式、（2）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k}{1+k^2}$ （3）式

我们知道 $\dfrac{k}{1+k^2}$ 是常数，我们也知道无论 x 趋于多少，常数的极限永远等于它本身，所以有

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k}{1+k^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$ （4）式

（3）式、（4）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$ （5）式

好，最终结果我们算完了，发现最终结果里面含有 k，说明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在，第二步和第三步也就不用再进行了。

综上所述，极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在，更别提和函数值相等了。因此函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处不连续。

例. 已知二元函数 $f(x,y)$ 在 $(2,3)$ 处的函数值是 $f(2,3)=7$，并且二元函数 $f(x,y)$ 在 $(2,3)$ 处连续，求 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)}f(x,y)$。

解： 在上一节中，我只给大家讲了"$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$"形式的二元函数的极限的计算方法，也就是 x、y 都趋于 0。可本题让算的是 $x\to2$、$y\to3$ 时的二元函数的极限，那怎么办？有办法，利用连续性就行了。

由于题中说二元函数 $f(x,y)$ 在 $(2,3)$ 处连续，所以根据二元函数的连续性的定义，有 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)}f(x,y)=f(2,3)$。又因为题中说 $f(2,3)=7$，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)}f(x,y)=7$。

另外，我要告诉大家：在考研数学中出现的所有二元函数，只要它不是分段函数，就一定在其定义区域中的每一点都是连续的。

例. 已知函数 $f(x,y)=3x^2+2y$，求 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)}f(x,y)$。

解： 在上一节中，我只给大家讲了"$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$"形式的二元函数的极限的计算方法，也就是 x、y 都趋于 0。可本题让算的是 $x\to2$、$y\to3$ 时的二元函数的极限，那怎么办？有办法，利用连续性就行了。

由于题中给的函数 $f(x,y)=3x^2+2y$ 是一个二元函数，而且不是分段函数，所以根据本节所讲，函数 $f(x,y)=3x^2+2y$ 在它的定义区域中的每一点肯定都连续。

函数 $f(x,y)=3x^2+2y$ 的定义区域是哪个区域？很明显是"$-\infty<x<+\infty$、$-\infty<y<+\infty$"，所以函数 $f(x,y)=3x^2+2y$ 在区域 $-\infty<x<+\infty$、$-\infty<y<+\infty$ 中的每一点肯定都连续。

而点 $(2,3)$ 很明显是区域 $-\infty<x<+\infty$、$-\infty<y<+\infty$ 中的点，所以函数 $f(x,y)=3x^2+2y$ 在点 $(2,3)$ 处连续。

既然连续，那么极限值肯定就等于函数值。

由于 $f(x,y)=3x^2+2y$，所以函数值 $f(2,3)=3\times2^2+2\times3=12+6=18$。

因而 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)}f(x,y)=18$。

最后，我要告诉大家：对考研数学中出现的所有二元分段函数而言，该二元分段函数在非分段点处一定是连续的。

例. 已知 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，请计算极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)}f(x,y)$。

解：在上一节中，我只给大家讲了“$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$”形式的二元函数的极限的计算方法，也就是 x 、y 都趋于 0。可本题让算的是 $x\to 1$ 、$y\to 3$ 时的二元函数的极限，那怎么办？有办法，利用连续性就行了。

题中给的函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 是一个二元分段函数，根据本节所讲，函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在非分段点处一定是连续的。

那么函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 的非分段点在哪？那咱们就找一下分段点，剩下的就是非分段点了。而分段点显然是“$(x,y)=(0,0)$”，所以非分段点是“$(x,y)\neq(0,0)$”，因而函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在区间 $(x,y)\neq(0,0)$ 中的每一点都是连续的。

有一次我讲课讲到这里，一位学生问我，为什么分段点是 $(x,y)=(0,0)$，而不是 $(x,y)\neq(0,0)$？我的回答是：分段点是点，而 $(x,y)\neq(0,0)$ 是一个区间。

既然函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在区间 $(x,y)\neq(0,0)$ 中的每一点都是连续的，而点 $(1,3)$ 很明显处于区间 $(x,y)\neq(0,0)$ 中，所以函数在点 $(1,3)$ 处连续。

既然连续，那么肯定是极限值等于函数值。

由于 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，所以函数值 $f(1,3)=\dfrac{1\times3}{1+9}=\dfrac{3}{10}$，因而极限值 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} f(x,y)=\dfrac{3}{10}$。

6.4　可偏导的定义

本节分为两个小节，第一小节给大家讲函数在某一点处可偏导的定义，第二小节给大家讲函数在某区间可偏导的定义。

6.4.1　函数在某一点处可偏导的定义

函数在某一点处可偏导的定义如下：

设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=$ 常数A，则称函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 可偏导，并且函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数为 A。记作 $f_x'(x_0,y_0)=A$、$z_x'\big|_{(x_0,y_0)}=A$、$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}=A$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}=A$。

设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=$ 常数A，则称函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 y 可偏导，并且函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数为 A。记作 $f_y'(x_0,y_0)=A$、$z_y'\big|_{(x_0,y_0)}=A$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}=A$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}=A$。

以上就是函数在某一点处可偏导的定义。从可偏导的定义我们可以很明显地看出两件事。

一是可偏导是通过一元函数的极限来定义的。也就是说，如果某道题中让我们利用可偏导的定义来计算偏导数的话，那么我们只需要计算一元函数的极限就可以了。

二是函数在某一点处的偏导是对 x 还是对 y。所以说，如果某二元函数在某一点处只是对 x 可偏导而不对 y 可

偏导的话，那我们不能说该二元函数在该点处可偏导。同样，如果某二元函数在某一点处只是对 y 可偏导而不对 x 可偏导的话，那我们不能说该二元函数在该点处可偏导。必须某二元函数在某一点处既对 x 可偏导也对 y 可偏导，我们才能说该二元函数在该点处可偏导。

最后我和大家说一下，“可偏导”和“偏导数存在”是一个意思。比如“某二元函数在某一点处对 x 可偏导”与“某二元函数在某一点处对 x 的偏导数存在”是同一个意思。

我们来看几道例题。

例. 已知函数 $z=4x^2+6y$，请用**可偏导的定义**证明函数 $z=4x^2+6y$ 在 $(2,3)$ 处对 x 可偏导，并计算出 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,3)}$。

解： 如果本题改为“已知函数 $z=4x^2+6y$，请证明函数 $z=4x^2+6y$ 在 $(2,3)$ 处对 x 可偏导，并计算出 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,3)}$”的话，那其实最快的方法就是用公式法（这还没有给大家讲）。

但是很可惜，本题指定了方法，让大家利用可偏导的定义来证明函数 $z=4x^2+6y$ 在 $(2,3)$ 处对 x 可偏导并计算出 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,3)}$，所以我们就必须用定义法而不能用公式法了。

本题虽然有两问（第一问让证明可偏导，第二问让求出具体的数来），但实际上，这两问可以看成一问。为什么呢？大家可以想想可偏导的定义是什么。

针对本题而言，我们就是要计算一下极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x,3)-f(2,3)}{\Delta x}$，如果这个极限为一个常数的话，就意味着我们既证明了可偏导又求出了导数值。现在大家明白为何我刚才说“这两问可以看成一问”了吧。

好，现在我们正式开始做这道题，也就是计算极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x,3)-f(2,3)}{\Delta x}$。

本题所给的函数是 $f(x,y)=4x^2+6y$，所以 $f(2+\Delta x,3)=4\times(2+\Delta x)^2+18$， $f(2,3)=4\times 2^2+6\times 3=34$，因而

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x,3)-f(2,3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\times(2+\Delta x)^2+18-34}{\Delta x}\qquad（1）式$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{4\times(2+\Delta x)^2+18-34}{\Delta x}$ 可以化简为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\times(2+\Delta x)^2+18-34}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\times(4+4\Delta x+\Delta x^2)-16}{\Delta x}\qquad（2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x,3)-f(2,3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\times(4+4\Delta x+\Delta x^2)-16}{\Delta x}\qquad（3）式$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{4\times(4+4\Delta x+\Delta x^2)-16}{\Delta x}$ 可以化简为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\times(4+4\Delta x+\Delta x^2)-16}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{16+16\Delta x+4\Delta x^2-16}{\Delta x}\qquad（4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x,3)-f(2,3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{16+16\Delta x+4\Delta x^2-16}{\Delta x}\qquad（5）式$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{16+16\Delta x+4\Delta x^2-16}{\Delta x}$ 可以化简为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{16+16\Delta x+4\Delta x^2-16}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{16\Delta x+4\Delta x^2}{\Delta x}\qquad（6）式$$

（5）式、（6）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x,3)-f(2,3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{16\Delta x+4\Delta x^2}{\Delta x}\qquad（7）式$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{16\Delta x+4\Delta x^2}{\Delta x}$ 可以化简为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{16\Delta x+4\Delta x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(16+4\Delta x)\qquad（8）式$$

（7）式、（8）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x,3)-f(2,3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(16+4\Delta x) \qquad （9）式$$

根据极限的可拆性，可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}(16+4\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}16+\lim_{\Delta x\to 0}4\Delta x \qquad （10）式$$

（9）式、（10）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x,3)-f(2,3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}16+\lim_{\Delta x\to 0}4\Delta x \qquad （11）式$$

由于常数极限永远等于它本身，所以 $\lim_{\Delta x\to 0}16=16$，由代入法可知 $\lim_{\Delta x\to 0}4\Delta x=4\times 0=0$。好，现在我们把 $\lim_{\Delta x\to 0}16=16$，$\lim_{\Delta x\to 0}4\Delta x=0$ 代入（11）式中，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x,3)-f(2,3)}{\Delta x}=16+0=16 \qquad （12）式$$

由于最终算出的极限值是常数 16，说明函数 $z=4x^2+6y$ 在 $(2,3)$ 处对 x 可偏导，并且 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,3)}=16$。

例. 已知函数 $z=4x^2+6y^2$，请用**可偏导的定义**证明函数 $z=4x^2+6y^2$ 在 $(1,4)$ 处对 y 可偏导，并计算出 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,4)}$。

解： 刚才咱们练的那道题是对 x 求偏导，而这道题是对 y 求偏导。如果本题改为“已知函数 $z=4x^2+6y^2$，请证明函数 $z=4x^2+6y^2$ 在 $(1,4)$ 处对 y 可偏导，并计算出 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,4)}$”的话，那其实最快的方法就是用公式法（这还没有给大家讲）。

但是很可惜，本题指定了方法，让大家利用可偏导的定义来证明函数 $z=4x^2+6y^2$ 在 $(1,4)$ 处对 y 可偏导并计算出 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,4)}$，所以我们就必须用定义法而不能用公式法了。

本题虽然有两问（第一问让证明可偏导，第二问让求出具体的数来），但实际上，这两问可以看成一问。为什么呢？大家可以想想可偏导的定义是什么。

针对本题而言，我们就是要计算一下极限 $\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,4+\Delta y)-f(1,4)}{\Delta y}$，如果这个极限为一个常数的话，就意味着我们既证明了可偏导又求出了导数值。现在大家明白为何我刚才说“这两问可以看成一问”了吧。

好，现在我们正式开始做这道题，也就是计算极限 $\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,4+\Delta y)-f(1,4)}{\Delta y}$。

本题所给的函数是 $f(x,y)=4x^2+6y^2$，所以 $f(1,4+\Delta y)=4\times 1^2+6\times(4+\Delta y)^2=4+6\times(4+\Delta y)^2$，$f(1,4)=4\times 1^2+6\times 4^2=100$，因而

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,4+\Delta y)-f(1,4)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4+6\times(4+\Delta y)^2-100}{\Delta y} \qquad （1）式$$

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4+6\times(4+\Delta y)^2-100}{\Delta y}$ 可以化简为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4+6\times(4+\Delta y)^2-100}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{6\times(16+8\Delta y+\Delta y^2)-96}{\Delta y} \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,4+\Delta y)-f(1,4)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{6\times(16+8\Delta y+\Delta y^2)-96}{\Delta y} \qquad （3）式$$

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{6\times(16+8\Delta y+\Delta y^2)-96}{\Delta y}$ 可以化简为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{6\times(16+8\Delta y+\Delta y^2)-96}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{96+48\Delta y+6\Delta y^2-96}{\Delta y} \qquad （4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,4+\Delta y)-f(1,4)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{96+48\Delta y+6\Delta y^2-96}{\Delta y}$$ （5）式

$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{96+48\Delta y+6\Delta y^2-96}{\Delta y}$ 可以化简为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{96+48\Delta y+6\Delta y^2-96}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{48\Delta y+6\Delta y^2}{\Delta y}$$ （6）式

（5）式、（6）式相结合，得

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,4+\Delta y)-f(1,4)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{48\Delta y+6\Delta y^2}{\Delta y}$$ （7）式

$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{48\Delta y+6\Delta y^2}{\Delta y}$ 可以化简为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{48\Delta y+6\Delta y^2}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}(48+6\Delta y)$$ （8）式

（7）式、（8）式相结合，得

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,4+\Delta y)-f(1,4)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}(48+6\Delta y)$$ （9）式

根据极限的可拆性，可得

$$\lim_{\Delta y\to 0}(48+6\Delta y)=\lim_{\Delta y\to 0}48+\lim_{\Delta y\to 0}6\Delta y$$ （10）式

（9）式、（10）式相结合，得

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,4+\Delta y)-f(1,4)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}48+\lim_{\Delta y\to 0}6\Delta y$$ （11）式

由于常数极限永远等于它本身，所以 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}48=48$，由代入法可知 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}6\Delta y=6\times 0=0$。好，现在我们把 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}48=48$，$\lim\limits_{\Delta y\to 0}6\Delta y=0$ 代入（11）式中，得

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,4+\Delta y)-f(1,4)}{\Delta y}=48+0=48$$ （12）式

由于最终算出的极限值是常数 48，说明函数 $z=4x^2+6y^2$ 在 $(1,4)$ 处对 y 可偏导，并且 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,4)}=48$。

例．已知函数 $z=9\sin x+4y$，请用**可偏导的定义**证明函数 $z=9\sin x+4y$ 在 $(3,5)$ 处对 x 可偏导，并计算出 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(3,5)}$。

解：如果本题改为"已知函数 $z=9\sin x+4y$，请证明函数 $z=9\sin x+4y$ 在 $(3,5)$ 处对 x 可偏导，并计算出 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(3,5)}$"的话，那其实最快的方法就是用公式法（这还没有给大家讲）。

但是很可惜，本题指定了方法，让大家利用可偏导的定义来证明函数 $z=9\sin x+4y$ 在 $(3,5)$ 处对 x 可偏导并计算出 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(3,5)}$，所以我们就必须用定义法而不能用公式法了。

本题虽然有两问（第一问让证明可偏导，第二问让求出具体的数来），但实际上，这两问可以看成一问。为什么呢？大家可以想想可偏导的定义是什么。

针对本题而言，我们就是要计算一下极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(3+\Delta x,5)-f(3,5)}{\Delta x}$，如果这个极限为一个常数的话，就意味着我们既证明了可偏导又求出了导数值。现在大家明白为何我刚才说"这两问可以看成一问"了吧。

好，现在我们正式开始做这道题，也就是计算极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(3+\Delta x,5)-f(3,5)}{\Delta x}$。

本题所给的函数是 $f(x,y)=9\sin x+4y$，所以 $f(3+\Delta x,5)=9\sin(3+\Delta x)+20$，$f(3,5)=9\sin 3+20$，因而

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x,5)-f(3,5)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{9\sin(3+\Delta x)+20-(9\sin 3+20)}{\Delta x}$$ （1）式

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{9\sin(3+\Delta x)+20-(9\sin 3+20)}{\Delta x}$ 可以化简为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{9\sin(3+\Delta x)+20-(9\sin 3+20)}{\Delta x}=9\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(3+\Delta x)-\sin 3}{\Delta x} \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x,5)-f(3,5)}{\Delta x}=9\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(3+\Delta x)-\sin 3}{\Delta x} \qquad （3）式$$

由代入法可知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\sin(3+\Delta x)-\sin 3]=\sin(3+0)-\sin 3=0$，所以我们可以对 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(3+\Delta x)-\sin 3}{\Delta x}$ 使用第一类洛必达法则。即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(3+\Delta x)-\sin 3}{\Delta x}\overset{?}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(3+\Delta x)}{1}\overset{\text{代入法}}{=}\frac{\cos(3+0)}{1}=\cos 3$$

好，由于计算结果是 $\cos 3$，$\cos 3$ 是常数，属于“常数或 ∞”，所以我们将上式中的“$\overset{?}{=}$”改为“=”，有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(3+\Delta x)-\sin 3}{\Delta x}=\cos 3$。

将 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(3+\Delta x)-\sin 3}{\Delta x}=\cos 3$ 代入（3）式，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x,5)-f(3,5)}{\Delta x}=9\cos 3 \qquad （4）式$$

由于最终算出的极限值是常数 $9\cos 3$，说明函数 $z=9\sin x+4y$ 在 $(3,5)$ 处 x 可偏导，并且 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(3,5)}=9\cos 3$。

例. 设 $z=\begin{cases}\sin x+y, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，请证明该函数在 $(0,0)$ 处对 x 可偏导，并求出 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}$。

解： 本题与前两道题的区别在于，前两道题如果没有指定用定义法的话，我们完全可以用公式法来做。但本题就不行了，本题研究的是一个分段函数在分段点处的可偏导性，大家记住，研究分段函数在分段点处的可偏导性时根本没有公式，只能用定义法。

好，现在我们开始正式做这道题。

本题虽然有两问（第一问让证明可偏导，第二问让求出具体的数来），但实际上，这两问可以看成一问。为什么呢？大家可以想想可偏导的定义是什么。

针对本题而言，我们就是要计算一下极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$，如果这个极限为一个常数的话，就意味着我们既证明了可偏导又求出了导数值。现在大家明白为何我刚才说“这两问可以看成一问”了吧。

好，现在我们开始计算极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$。

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} \qquad （1）式$$

由于 $f(x,y)=\begin{cases}\sin x+y, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，所以 $f(0,0)=0$。把 $f(0,0)=0$ 代入（1）式，可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)}{\Delta x} \qquad （2）式$$

老带着 Δx 看着也别扭，干脆换个字母得了，把 Δx 换成 x 吧（当然你要看着不别扭，也可以不换）。所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x} \qquad （3）式$$

好，我们现在得将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x}$ 中的 $f(x,0)$ 显化，题中说 $f(x,y)=\begin{cases}\sin x+y, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，那么我们应该将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x}$ 中的 $f(x,0)$ 显化成哪段呢？

由于是 $x\to 0$，这说明 x 无限地接近于 0 但是不能等于 0，也就是说 $(x,0)\neq(0,0)$，所以应将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x}$ 中的 $f(x,0)$ 显化成 $\sin x+0$，因而有

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+0}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$ （4）式

根据等价无穷小替换可得

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to0}1=1$ （5）式

（4）式、（5）式相结合，得

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=1$ （6）式

由于最终算出的极限值是常数1，说明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\sin x+y, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处对 x 可偏导，并且 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$。

6.4.2 函数在某区间可偏导的定义

函数在某区间可偏导的定义如下：

如果二元函数 $z=f(x,y)$ 在某区间内的每一点都对 x 可偏导，就称二元函数 $z=f(x,y)$ 在该区间内对 x 可偏导。

如果二元函数 $z=f(x,y)$ 在某区间内的每一点都对 y 可偏导，就称二元函数 $z=f(x,y)$ 在该区间内对 y 可偏导。

以上就是函数在某区间可偏导的定义。下面我再给大家介绍一下什么叫“偏导函数”。

通过刚才的讲解，我们知道：

如果函数 $z=f(x,y)$ 在某区间内对 x 可偏导，那就意味着对于该区间内的任意一个自变量 (x,y)，都对应着一个确定的偏导数值，这一个个确定的偏导数值就构成了一个新的函数，我们称这个新的函数为函数 $z=f(x,y)$ 对 x 的偏导函数，简称为偏导数，记作 $f_x'(x,y)$、z_x'、$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$。即

$$f_x'(x,y)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

以上这个式子其实一点儿也不难记，大家就和“函数在某一点处对 x 可偏导的定义式 $f_x'(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$”一起记就可以了。

如果函数 $z=f(x,y)$ 在某区间内对 y 可偏导，那就意味着对于该区间内的任意一个自变量 (x,y)，都对应着一个确定的偏导数值，这一个个确定的偏导数值就构成了一个新的函数，我们称这个新的函数为函数 $z=f(x,y)$ 对 y 的偏导函数，简称为偏导数，记作 $f_y'(x,y)$、z_y'、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$。即

$$f_y'(x,y)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

以上这个式子其实一点儿也不难记，大家就和“函数在某一点处对 y 可偏导的定义式 $f_y'(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$”一起记就可以了。

例. 已知函数 $z=f(x,y)$ 在某区间内对 x 的偏导函数为 $g(x,y)$，请问这说明了什么？

解： 根据刚刚讲完的知识点可知，这说明：对于该区间内的任意一点 (x_0,y_0) 来说，函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数值为 $g(x_0,y_0)$。

比如说，讲了公式法之后，大家就知道二元函数 $z=xy+\sin x$ 对 x 的偏导函数是 $y+\cos x$，那么二元函数 $z=xy+\sin x$ 在 $(2,1)$ 处对 x 的偏导数值就肯定是 $1+\cos2$（就不用那么麻烦地用定义法计算了）。

最后给大家解释一个符号的意思，“$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$”指的是“$\dfrac{\partial(\frac{\partial y}{\partial x})}{\partial x}$”。

6.5 利用公式求 $\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$

首先我要告诉大家，“□”肯定是单一的字母，但“Δ”可不一定是单一的字母，如 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial(2z)}{\partial x}$、$\frac{\partial(x+y+z)}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$、$\frac{\partial(2z)}{\partial y}$、$\frac{\partial(x+y+z)}{\partial y}$。

本节分为两个小节来讲，第一小节给大家讲当“Δ”是单一的字母时 $\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$ 的求法，第二小节给大家讲当“Δ”不是单一的字母时 $\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$ 的求法。

我给大家举三个例子。

例． 已知 $z=x+y^2$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$。

例． 已知 $z=x+y^2$，求 $\frac{\partial(2z)}{\partial x}$。

例． 已知 $z=x+y^2$，求 $\frac{\partial(x+y+z)}{\partial x}$。

在以上这三道题中，第一题是属于第一小节要讨论的（因为“Δ”是单一的字母），第二题和第三题是属于第二小节要讨论的（因为“Δ”不是单一的字母）。

6.5.1 当“Δ”是单一的字母时 $\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$ 的求法

本小节我们来讨论当“Δ”是单一的字母时 $\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$ 的求法，大家来看几道题。

例． 已知 $z=x+y^2$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$。

例． 已知 $z=x+y^2$，求 $\frac{\partial y}{\partial x}$。

例． 已知 $x+y+z=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$。

例． 设 $xu-yv=0$，$yu+xv=1$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial v}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial y}$。

以上这几道题都属于当“Δ”是单一的字母时求 $\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$ 的题。那么这种题到底应该如何去做呢？我在给大家讲解这种题的做法之前，先带领大家复习一下本书第 2 章所讲的有关自变量和因变量的知识。

大家其实只要记住三点就可以了：

1. 方程个数 = 因变量个数。
2. 自变量个数 + 因变量个数 = 变量个数。
3. 一道题中，究竟哪个是自变量哪个是因变量要看问题是怎么问的。

以上就是有关“自变量”和“因变量”的知识点，我们来看几道题。

例． 已知 $x+y+z=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$。请问题中有几个因变量？有几个自变量？哪个是因变量哪个是自变量？

解： 我们先来看一下本题给了几个方程，很明显本题给了一个方程，也就是说，方程个数为 1。根据“方程个数 = 因变量个数”可知，本题共有 1 个因变量。

好，我们再来看看本题中有几个变量，很明显一共有三个变量（分别是x、y、z）。那么，根据“自变量个数+因变量个数=变量个数”可知，自变量个数=变量个数−因变量个数$=3-1=2$，所以本题中一共有两个自变量。

那么在$x+y+z=0$中到底哪个是自变量哪个是因变量呢？我告诉大家：如果只看“$x+y+z=0$”这个式子的话，则x、y、z这三个变量中的任意两个都可以当成自变量，剩下的那一个是因变量。但是，如果把“$x+y+z=0$”连同问题“求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$”一起看的话，那么必然$x$、$y$是自变量，$z$是因变量。这是为什么呢？

大家记住，“$\dfrac{\partial \Delta}{\partial \square}$”中的“$\square$”必定是被当成自变量的，所以$x$是自变量。

大家再记住，“$\dfrac{\partial \Delta}{\partial \square}$”中的“$\Delta$”中一定含有因变量。

那我们来看，本题的问题是$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，“$\Delta$”中只出现了一种字母（即$z$），所以$z$是因变量。

现在已经判断出了x是自变量，z是因变量。而之前我们判断出了自变量个数为2，因变量个数为1，因此y一定是自变量。

例. 已知$z=x+y^2$，求$\dfrac{\partial(2z)}{\partial x}$。请问题中有几个因变量？有几个自变量？哪个是因变量哪个是自变量？

解： 我们先来看一下本题给了几个方程，很明显本题给了一个方程，也就是说，方程个数为1。根据“方程个数=因变量个数”可知，本题共有1个因变量。

好，我们再来看看本题中有几个变量，很明显一共有三个变量（分别是x、y、z）。那么，根据“自变量个数+因变量个数=变量个数”可知，自变量个数=变量个数−因变量个数$=3-1=2$，所以本题中一共有两个自变量。

那么在$z=x+y^2$中到底哪个是自变量哪个是因变量呢？我告诉大家：如果只看“$z=x+y^2$”这个式子的话，则x、y、z这三个变量中的任意两个都可以当成自变量，剩下的那一个是因变量。但是，如果把“$z=x+y^2$”连同问题“求$\dfrac{\partial(2z)}{\partial x}$”一起看的话，那么必然$x$、$y$是自变量，$z$是因变量。这是为什么呢？

大家记住，“$\dfrac{\partial \Delta}{\partial \square}$”中的“$\square$”必定是被当成自变量的，所以$x$是自变量。

大家再记住，“$\dfrac{\partial \Delta}{\partial \square}$”中的“$\Delta$”中一定含有因变量。

那我们来看，本题的问题是$\dfrac{\partial(2z)}{\partial x}$，“$\Delta$”中只出现了一种字母（$z$），所以$z$是因变量。

现在已经判断出了x是自变量，z是因变量。而之前我们判断出了自变量个数为2，因变量个数为1，因此y一定是自变量。

最后说一句题外话，大家注意，$\dfrac{\partial(2z)}{\partial x}$不属于本小节要讲的题型，因为“$\Delta$”不是单一的字母（“$\Delta$”不是单一的字母$z$而是$2z$）。

例. 已知$z=x+y^2$，求$\dfrac{\partial(z+z^2)}{\partial x}$。请问题中有几个因变量？有几个自变量？哪个是因变量哪个是自变量？

解： 我们先来看一下本题给了几个方程，很明显本题给了一个方程，也就是说，方程个数为1。根据“方程个数=因变量个数”可知，本题共有1个因变量。

好，我们再来看看本题中有几个变量，很明显一共有三个变量（分别是x、y、z）。那么，根据“自变量个数+因变量个数=变量个数”可知，自变量个数=变量个数−因变量个数$=3-1=2$，所以本题中一共有两个自变量。

那么在$z=x+y^2$中到底哪个是自变量哪个是因变量呢？我告诉大家：如果只看“$z=x+y^2$”这个式子的话，则x、y、z这三个变量中的任意两个都可以当成自变量，剩下的那一个是因变量。但是，如果把“$z=x+y^2$”连同问题“求$\dfrac{\partial(z+z^2)}{\partial x}$”一起看的话，那么必然$x$、$y$是自变量，$z$是因变量。这是为什么呢？

大家记住，“$\dfrac{\partial \Delta}{\partial \square}$”中的“$\square$”必定是被当成自变量的，所以$x$是自变量。

大家再记住，“$\frac{\partial \Delta}{\partial \square}$”中的“$\Delta$”中一定含有因变量。

那我们来看，本题的问题是求$\frac{\partial (z+z^2)}{\partial x}$，“$\Delta$”中只出现了一种字母（$z$），所以$z$是因变量。

现在已经判断出了x是自变量，z是因变量。而之前我们判断出了自变量个数为 2，因变量个数为 1，因此y一定是自变量。

最后说一句题外话，大家注意，求$\frac{\partial (z+z^2)}{\partial x}$不属于本小节要讲的题型，因为“$\Delta$”不是单一的字母（“$\Delta$”不是单一的字母$z$而是$z+z^2$）。

例. 已知$z=x+y^2$，求$\frac{\partial (x+y+z)}{\partial x}$。请问题中有几个因变量？有几个自变量？哪个是因变量哪个是自变量？

解： 我们先来看一下本题给了几个方程，很明显本题给了一个方程，也就是说，方程个数为 1。根据“方程个数 = 因变量个数”可知，本题共有 1 个因变量。

好，我们再来看看本题中有几个变量，很明显一共有三个变量（分别是x、y、z）。那么，根据“自变量个数 + 因变量个数 = 变量个数”可知，自变量个数 = 变量个数 − 因变量个数 $=3-1=2$，所以本题中一共有两个自变量。

那么在$z=x+y^2$中到底哪个是自变量哪个是因变量呢？我告诉大家：如果只看“$z=x+y^2$”这个式子的话，则x、y、z这三个变量中的任意两个都可以当成自变量，剩下的那一个是因变量。但是，如果把“$z=x+y^2$”连同问题“求$\frac{\partial (x+y+z)}{\partial x}$”一起看的话，那么必然$x$是自变量，然后$y$、$z$中一个是自变量一个是因变量（至于$y$、$z$到底哪个是自变量哪个是因变量就不好说了）。这是为什么呢？

大家记住，“$\frac{\partial \Delta}{\partial \square}$”中的“$\square$”必定是被当成自变量的，所以$x$是自变量。

大家再记住，“$\frac{\partial \Delta}{\partial \square}$”中的“$\Delta$”中一定含有因变量。

那我们来看，本题的问题是求$\frac{\partial (x+y+z)}{\partial x}$，“$\Delta$”中含有$x$、$y$、$z$这三个字母，既然“$\Delta$”中一定含有因变量，而且刚才我们已经判断出本题只有一个因变量，那么说明x、y、z这三个字母中有一个是因变量。我们已经确定了x是自变量，因而y、z这两个字母中有一个是因变量，至于到底y是因变量还是z是因变量那可就说不准了。

综上所述，x是自变量，y、z中一个是自变量一个是因变量。

最后说一句题外话，大家注意，求$\frac{\partial (x+y+z)}{\partial x}$不属于本小节要讲的题型，因为“$\Delta$”不是单一的字母。

例. 已知$z=x+y^2$，求$\frac{\partial (x+z)}{\partial x}$。请问题中有几个因变量？有几个自变量？哪个是因变量哪个是自变量？

解： 我们先来看一下本题给了几个方程，很明显本题给了一个方程，也就是说，方程个数为 1。根据“方程个数 = 因变量个数”可知，本题共有 1 个因变量。

好，我们再来看看本题中有几个变量，很明显一共有三个变量（分别是x、y、z）。那么，根据“自变量个数 + 因变量个数 = 变量个数”可知，自变量个数 = 变量个数 − 因变量个数 $=3-1=2$，所以本题中一共有两个自变量。

那么在$z=x+y^2$中到底哪个是自变量哪个是因变量呢？我告诉大家：如果只看“$z=x+y^2$”这个式子的话，则x、y、z这三个变量中的任意两个都可以当成自变量，剩下的那一个是因变量。但是，如果把“$z=x+y^2$”连同问题“求$\frac{\partial (x+z)}{\partial x}$”一起看的话，那么必然$x$、$y$是自变量，$z$是因变量。这是为什么呢？

大家记住，“$\frac{\partial \Delta}{\partial \square}$”中的“$\square$”必定是被当成自变量的，所以$x$是自变量。

大家再记住，“$\frac{\partial \Delta}{\partial \square}$”中的“$\Delta$”中一定含有因变量。

那我们来看，本题的问题是求$\frac{\partial (x+z)}{\partial x}$，“$\Delta$”中含有$x$、$z$这两个字母，刚刚我们已经确定了$x$是自变量，因而$z$是因变量。

现在已经判断出了x是自变量，z是因变量。而之前我们判断出了自变量个数为 2，因变量个数为 1，因此y一

定是自变量。

最后说一句题外话，大家注意，求$\frac{\partial(x+z)}{\partial x}$不属于本小节要讲的题型，因为“Δ”不是单一的字母。

例. 设$xu-yv=0$，$yu+xv=1$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial v}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial y}$。请问题中有几个因变量？有几个自变量？哪个是因变量哪个是自变量？

解： 我们先来看一下本题给了几个方程，很明显本题给了两个方程，也就是说，方程个数为 2。根据“方程个数＝因变量个数”可知，本题共有两个因变量。

好，我们再来看看本题中有几个变量，很明显一共有四个变量（分别是x、y、u、v）。那么，根据“自变量个数＋因变量个数＝变量个数”可知，自变量个数＝变量个数－因变量个数＝$4-2=2$，所以本题中一共有两个自变量。

那么在$xu-yv=0$，$yu+xv=1$中到底哪个是自变量哪个是因变量呢？我告诉大家：如果只看“$xu-yv=0$，$yu+xv=1$”这两个式子的话，那么x、y、u、v这四个变量中的任意两个都可以当成自变量，剩下两个是因变量。但是，如果把“$xu-yv=0$，$yu+xv=1$”连同问题“求$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial v}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial y}$”一起看的话，那么必然$x$、$y$是自变量，$u$、$v$是因变量。这是为什么呢？

大家记住，$\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$中的“□”必定是被当成自变量的，所以$x$、$y$是自变量。

现在已经判断出了x、y是自变量，而之前我们判断出了自变量个数为 2，因变量个数为 2，因此u、v一定是因变量。

好，关于自变量和因变量的复习就到这里。接下来我正式开始给大家讲当“Δ”是单一的字母时$\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$的求法。

情况 1. **如果题中给的关系式是：Δ＝某某某（注意：某某某中不含Δ），让求$\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$，那就直接套第 2 章所讲的导数公式即可。不过要注意一点：其他自变量就当成常数。**

情况 2. **如果题中给的关系式是：某某某（注意：某某某中既含□又含Δ）＝0，让求$\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$，那就等式两侧同时对□求导（当然，0 的那一侧求完导肯定还是 0）即可。不过要注意两点：一是其他自变量就当成常数，二是对因变量求导时后面必须要乘以$\frac{\partial\text{因变量}}{\partial\square}$。**

情况 3. **以上两种情况说的都是题中给的是一个方程，可如果是给的关系式是含两个方程的方程组，让求$\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$呢？那就让这两个等式的两侧同时对□求导（当然，0 的那一侧求完导肯定还是 0）即可。不过要注意两点：一是其他自变量就当成常数，二是对因变量求导时后面必须要乘以$\frac{\partial\text{因变量}}{\partial\square}$。**

我们来看几道例题。

例. 已知$z=5x^2+8\sin y$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$。

解： 由于本题的问题是“$\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$”并且“Δ”是单一的字母，说明本题会用到本小节所讲的知识。那么到底是“情况 1”、“情况 2”还是“情况 3”呢？很明显是情况 1。

情况 1 的解题方法就是直接套公式，不过要注意其他自变量就当成常数，所以本题的做法如下：

由于问题问的是$\frac{\partial z}{\partial x}$，所以$z$为因变量$x$为自变量，因而$y$为自变量。由于本题是对自变量$x$求偏导，所以本题中的“其他自变量”就是$y$，因而在$z=5x^2+8\sin y$中，我们就把$y$当成常数。既然把$y$当成常数，必然$\sin y$也是常数，那么必然$8\sin y$也是常数。所以我们直接套第 2 章所讲的导数公式得$\frac{\partial z}{\partial x}=10x$。

例. 已知 $x+y+z=0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

解： 由于本题的问题是“$\dfrac{\partial \Delta}{\partial □}$”并且“$\Delta$”是单一的字母，说明本题会用到本小节所讲的知识。那么到底是“情况 1”、“情况 2”还是“情况 3”呢？很明显是情况 2。

情况 2 的解题方法就是将等式两侧同时对□求导，所以本题的做法如下：

由于 $x+y+z=0$，我们将等式两侧同时对 x 求导，在两侧都求完导之后，等于号“$=$”依然成立。

等式右侧是 0，对 x 求完导肯定还是 0。

等式左侧是 $x+y+z$，对 x 求导得 $1+\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

有些同学可能不明白为何 $x+y+z$ 对 x 求完导得到的是 $1+\dfrac{\partial z}{\partial x}$，那我就来解释一下：

情况 2 的解题方法中说得很明白，要注意两点。一是其他自变量就当成常数，对于本题而言，由于问题是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，所以 z 为因变量 x 为自变量，因而 y 为自变量。由于本题是对自变量 x 求偏导，所以本题中的“其他自变量”就是 y，因而在 $x+y+z$ 中，我们就把 y 当成常数。二是等式两侧同时对 x 求导这没错，但是对因变量求导时后面必须要乘以 $\dfrac{\partial \text{因变量}}{\partial □}$，那么对本题而言，由于 z 是因变量，当对因变量 z 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。所以说，$x+y+z$ 对 x 求导实际上是等于 $1+0+1\times\dfrac{\partial z}{\partial x}$，然后化简得到的 $1+\dfrac{\partial z}{\partial x}$。现在大家明白为何 $x+y+z$ 对 x 求完导得到的是 $1+\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 了吧。

好，综上所述，等式右侧的 0 对 x 求完导是 0，等式左侧的 $x+y+z$ 对 x 求完导是 $1+\dfrac{\partial z}{\partial x}$，所以有

$$1+\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

解得：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$。

我再多说两句。对本题而言，给的方程是 $x+y+z=0$，我们其实可以将此方程改写为 $z=-x-y$，这样就属于“情况 1”了，就可以用“情况 1”的解题方法做了。当然，做完的答案同样是 -1。但是大家一定要注意，并非所有的“情况 2”都能转化为“情况 1”，如果转化不了，那就只能老老实实地用“情况 2”的解题方法来做了。

例. 已知 $z^2+xy+y=0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

解： 由于本题的问题是“$\dfrac{\partial \Delta}{\partial □}$”并且“$\Delta$”是单一的字母，说明本题会用到本小节所讲的知识。那么到底是“情况 1”、“情况 2”还是“情况 3”呢？很明显是情况 2。

情况 2 的解题方法就是将等式两侧同时对□求导，所以本题的做法如下：

由于 $z^2+xy+y=0$，我们将等式两侧同时对 x 求导，在两侧都求完导之后，等于号“$=$”依然成立。

等式右侧是 0，对 x 求完导肯定还是 0。

等式左侧是 z^2+xy+y，对 x 求导得 $2z\times\dfrac{\partial z}{\partial x}+y$。

有些同学可能不明白为何 z^2+xy+y 对 x 求完导得到的是 $2z\times\dfrac{\partial z}{\partial x}+y$，那我就来解释一下：

情况 2 的解题方法中说得很明白，要注意两点。一是其他自变量就当成常数，对于本题而言，由于问题是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，所以 z 为因变量，x 为自变量，因而 y 为自变量。由于本题是对自变量 x 求偏导，所以本题中的“其他自变量”就是 y，因而在 z^2+xy+y 中，我们就把 y 当成常数。二是等式两侧同时对 x 求导这没错，但是对因变量求导时后面必须要乘以 $\dfrac{\partial \text{因变量}}{\partial □}$，那么对本题而言，由于 z 是因变量，当对因变量 z 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以

一个$\frac{\partial z}{\partial x}$。所以说，$z^2+xy+y$对$x$求导实际上是等于$2z\times\frac{\partial z}{\partial x}+(1\times y+0\times x)+0$，化简得到$2z\times\frac{\partial z}{\partial x}+y$。现在大家明白为何$z^2+xy+y$对$x$求完导得到的是$2z\times\frac{\partial z}{\partial x}+y$了吧。

好，综上所述，等式右侧的 0 对x求完导是 0，等式左侧的z^2+xy+y对x求完导是$2z\times\frac{\partial z}{\partial x}+y$，所以有

$$2z\times\frac{\partial z}{\partial x}+y=0$$

解得：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{2z}$。

例. 已知$2x^2+y+3\sin z=0$，求$\frac{\partial x}{\partial z}$。

解： 由于本题的问题是“$\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$”并且“$\Delta$”是单一的字母，说明本题会用到本小节所讲的知识。那么到底是“情况 1”、“情况 2”还是“情况 3”呢？很明显是情况 2。

情况 2 的解题方法就是将等式两侧同时对$\square$求导，所以本题的做法如下：

由于$2x^2+y+3\sin z$=0，我们将等式两侧同时对z求导，在两侧都求完导之后，等于号“=”依然成立。

等式右侧是 0，对z求完导肯定还是 0。

等式左侧是$2x^2+y+3\sin z$，对z求导得$4x\times\frac{\partial x}{\partial z}+3\cos z$。

有些同学可能不明白为何$2x^2+y+3\sin z$对z求完导得到的是$4x\times\frac{\partial x}{\partial z}+3\cos z$，那我就来解释一下：

情况 2 的解题方法中说得很明白，要注意两点。一是其他自变量就当成常数，对于本题而言，由于问题是$\frac{\partial x}{\partial z}$，所以$x$为因变量，$z$为自变量，因而$y$为自变量。由于本题是对自变量$z$求偏导，所以本题中的“其他自变量”就是$y$，因而在$2x^2+y+3\sin z$中，我们就把$y$当成常数。二是等式两侧同时对$x$求导这没错，但是对因变量求导时后面必须要乘以$\frac{\partial\text{因变量}}{\partial\square}$，那么对本题而言，由于$x$是因变量，当对因变量$x$使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个$\frac{\partial x}{\partial z}$。所以说，$2x^2+y+3\sin z$对$z$求导实际上是等于$4x\times\frac{\partial x}{\partial z}+0+3\cos z$，化简得到$4x\times\frac{\partial x}{\partial z}+3\cos z$。现在大家明白为何$2x^2+y+3\sin z$对$z$求完导得到的是$4x\times\frac{\partial x}{\partial z}+3\cos z$了吧。

好，综上所述，等式右侧的 0 对z求完导是 0，等式左侧的$2x^2+y+3\sin z$对z求完导是$4x\times\frac{\partial x}{\partial z}+3\cos z$，所以有

$$4x\times\frac{\partial x}{\partial z}+3\cos z=0$$

解得：$\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{3\cos z}{4x}$。

例. 已知$x^2+y^2+z^2-4z=0$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$。

解： 由于本题的问题是“$\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$”并且“$\Delta$”是单一的字母，说明本题会用到本小节所讲的知识。那么到底是“情况 1”、“情况 2”还是“情况 3”呢？很明显是情况 2。

情况 2 的解题方法就是将等式两侧同时对$\square$求导，所以本题的做法如下：

由于$x^2+y^2+z^2-4z=0$，我们将等式两侧同时对x求导，在两侧都求完导之后，等于号“=”依然成立。

等式右侧是 0，对x求完导肯定还是 0。

等式左侧是$x^2+y^2+z^2-4z$，对x求导得$2x+(2z-4)\frac{\partial z}{\partial x}$。

有些同学可能不明白为何$x^2+y^2+z^2-4z$对x求完导得到的是$2x+(2z-4)\frac{\partial z}{\partial x}$，那我就来解释一下：

情况 2 的解题方法中说得很明白，要注意两点。一是其他自变量就当成常数，对于本题而言，由于问题是$\frac{\partial z}{\partial x}$，所以 z 为因变量 x 为自变量，因而 y 为自变量。由于本题是对自变量 x 求偏导，所以本题中的“其他自变量”就是 y，因而在 $x^2+y^2+z^2-4z$ 中，我们就把 y 当成常数。二是等式两侧同时对 x 求导这没错，但是对因变量求导时后面必须要乘以$\frac{\partial 因变量}{\partial \square}$，那么对本题而言，由于 z 是因变量，当对因变量 z 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个$\frac{\partial z}{\partial x}$。所以说，$x^2+y^2+z^2-4z$ 对 x 求导实际上是等于 $2x+0+2z\frac{\partial z}{\partial x}-4\frac{\partial z}{\partial x}$，化简得到 $2x+(2z-4)\frac{\partial z}{\partial x}$。现在大家明白为何 $x^2+y^2+z^2-4z$ 对 x 求完导得到的是 $2x+(2z-4)\frac{\partial z}{\partial x}$ 了吧。

好，综上所述，等式右侧的 0 对 x 求完导是 0，等式左侧的 $x^2+y^2+z^2-4z$ 对 x 求完导是 $2x+(2z-4)\frac{\partial z}{\partial x}$，所以有

$$2x+(2z-4)\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

解得：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$。

例. 设 $xu-yv=0$，$yu+xv=1$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$。

解：本题有两问，我们先来看第一问，也就是求$\frac{\partial u}{\partial x}$。

由于问题是“$\frac{\partial \Delta}{\partial \square}$”并且“$\Delta$”是单一的字母，说明本题会用到本小节所讲的知识。那么到底是“情况 1”、“情况 2”还是“情况 3”呢？很明显是情况 3。

情况 3 的解题方法就是让等式两侧同时对$\square$求导，所以本题的做法如下：

我们先来看第一个方程。

第一个方程是 $xu-yv=0$。等式右侧是 0，对 x 求完导肯定还是 0。

等式左侧是 $xu-yv$，对 x 求导得 $u+\frac{\partial u}{\partial x}x-\frac{\partial v}{\partial x}y$。

有些同学可能不明白为何 $xu-yv$ 对 x 求完导得到的是 $u+\frac{\partial u}{\partial x}x-\frac{\partial v}{\partial x}y$，那我就来解释一下：

情况 3 的解题方法中说得很明白，要注意两点。一是其他自变量就当成常数，对于本题而言，由于问题是$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$，所以 x、y 为自变量 u 为因变量，因而 v 为因变量。由于本题是对自变量 x 求偏导，所以本题中的“其他自变量”就是 y，因而在 $xu-yv$ 中，我们就把 y 当成常数。二是等式两侧同时对 x 求导这没错，但是对因变量求导时后面必须要乘以$\frac{\partial 因变量}{\partial \square}$，那么对本题而言，由于 u、v 是因变量，当对因变量 u 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个$\frac{\partial u}{\partial x}$。当对因变量 v 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个$\frac{\partial v}{\partial x}$。所以说，$xu-yv$ 对 x 求导实际上是等于 $(1\times u+1\times\frac{\partial u}{\partial x}\times x)-(0\times v+1\times\frac{\partial v}{\partial x}\times y)$，化简得到 $u+\frac{\partial u}{\partial x}x-\frac{\partial v}{\partial x}y$。现在大家明白为何 $xu-yv$ 对 x 求完导得到的是 $u+\frac{\partial u}{\partial x}x-\frac{\partial v}{\partial x}y$ 了吧。

好，综上所述，等式右侧的 0 对 x 求完导是 0，等式左侧的 $xu-yv$ 对 x 求完导是 $u+\frac{\partial u}{\partial x}x-\frac{\partial v}{\partial x}y$，所以有

$$u+\frac{\partial u}{\partial x}x-\frac{\partial v}{\partial x}y=0 \qquad \text{（1）式}$$

我们再来看第二个方程。

第二个方程是 $yu+xv=1$。等式右侧是常数 1，对 x 求完导肯定是 0。

等式左侧是 $yu+xv$，对 x 求导得 $y\frac{\partial u}{\partial x}+v+x\frac{\partial v}{\partial x}$。

有些同学可能不明白为何 $yu+xv$ 对 x 求完导得到的是 $y\frac{\partial u}{\partial x}+v+x\frac{\partial v}{\partial x}$，那我就来解释一下：

情况 3 的解题方法中说得很明白，要注意两点。一是其他自变量就当成常数，对于本题而言，由于问题是 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$，所以 x、y 为自变量 u 为因变量，因而 v 为因变量。由于本题是对自变量 x 求偏导，所以本题中的“其他自变量”就是 y，因而在 $yu+xv$ 中，我们就把 y 当成常数。二是等式两侧同时对 x 求导这没错，但是对因变量求导时后面必须要乘以 $\frac{\partial 因变量}{\partial \square}$，那么对本题而言，由于 u、v 是因变量，当对因变量 u 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个 $\frac{\partial u}{\partial x}$。当对因变量 v 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个 $\frac{\partial v}{\partial x}$。所以说，$yu+xv$ 对 x 求导实际上是等于 $(0\times u+1\times\frac{\partial u}{\partial x}\times y)+(1\times v+1\times\frac{\partial v}{\partial x}\times x)$，化简得到 $y\frac{\partial u}{\partial x}+v+x\frac{\partial v}{\partial x}$。现在大家明白为何 $yu+xv$ 对 x 求完导得到的是 $y\frac{\partial u}{\partial x}+v+x\frac{\partial v}{\partial x}$ 了吧。

好，综上所述，等式右侧的 0 对 x 求完导是 0，等式左侧的 $yu+xv$ 对 x 求完导是 $y\frac{\partial u}{\partial x}+v+x\frac{\partial v}{\partial x}$，所以有

$$y\frac{\partial u}{\partial x}+v+x\frac{\partial v}{\partial x}=0 \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\begin{cases}u+\frac{\partial u}{\partial x}x-\frac{\partial v}{\partial x}y=0\\ y\frac{\partial u}{\partial x}+v+x\frac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$$

为了看着方便，我们设 $\frac{\partial u}{\partial x}=A$，$\frac{\partial v}{\partial x}=B$，所以

$$\begin{cases}u+Ax-By=0\\ yA+v+xB=0\end{cases}$$

解此方程组得

$$\begin{cases}A=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}\\ B=\frac{yu-xv}{x^2+y^2}\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}\\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2}\end{cases}$$

好，现在我们已经求出了 $\frac{\partial u}{\partial x}$，也就是说，第一问我们已经做完了。而且我们不光求出了 $\frac{\partial u}{\partial x}$，还求出了 $\frac{\partial v}{\partial x}$。

本题有两问，第一问我们已经做完了，现在我们来看第二问，也就是求 $\frac{\partial u}{\partial y}$。

由于问题是“$\frac{\partial \Delta}{\partial \square}$”并且“$\Delta$”是单一的字母，说明本题会用到本小节所讲的知识。那么到底是“情况 1”、“情况 2”还是“情况 3”呢？很明显是情况 3。

情况 3 的解题方法就是将等式两侧同时对 $\square$ 求导，所以本题的做法如下：

我们先来看第一个方程。

第一个方程是 $xu-yv=0$。等式右侧是 0，对 y 求完导肯定还是 0。

等式左侧是 $xu-yv$，对 y 求导得 $\frac{\partial u}{\partial y}x-v-y\frac{\partial v}{\partial y}$。

有些同学可能不明白为何 $xu-yv$ 对 y 求完导得到的是 $\frac{\partial u}{\partial y}x-v-y\frac{\partial v}{\partial y}$，那我就来解释一下：

情况 3 的解题方法中说得很明白，要注意两点。一是其他自变量就当成常数，对于本题而言，由于问题是 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$，所以 x、y 为自变量 u 为因变量，因而 v 为因变量。由于本题是对自变量 y 求偏导，所以本题中的“其他自变量”就是 x，因而在 $xu-yv$ 中，我们就把 x 当成常数。二是等式两侧同时对 y 求导这没错，但是对因变量求导时后面必须要乘以 $\frac{\partial \text{因变量}}{\partial \square}$，那么对本题而言，由于 u、v 是因变量，当对因变量 u 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个 $\frac{\partial u}{\partial y}$。当对因变量 v 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个 $\frac{\partial v}{\partial y}$。所以说，$xu-yv$ 对 y 求导实际上是等于 $(0\times u+1\times\frac{\partial u}{\partial y}\times x)-(1\times v+1\times\frac{\partial v}{\partial y}\times y)$，化简得到 $\frac{\partial u}{\partial y}x-v-y\frac{\partial v}{\partial y}$。现在大家明白为何 $xu-yv$ 对 y 求完导得到的是 $\frac{\partial u}{\partial y}x-v-y\frac{\partial v}{\partial y}$ 了吧。

好，综上所述，等式右侧的 0 对 y 求完导是 0，等式左侧的 $xu-yv$ 对 y 求完导是 $\frac{\partial u}{\partial y}x-v-y\frac{\partial v}{\partial y}$，所以有

$$\frac{\partial u}{\partial y}x-v-y\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad \text{（3）式}$$

我们再来看第二个方程。

第二个方程是 $yu+xv=1$。等式右侧是常数 1，对 y 求完导肯定是 0。

等式左侧是 $yu+xv$，对 y 求导得 $u+y\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial v}{\partial y}$。

有些同学可能不明白为何 $yu+xv$ 对 y 求完导得到的是 $u+y\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial v}{\partial y}$，那我就来解释一下：

情况 3 的解题方法中说得很明白，要注意两点。一是其他自变量就当成常数，对于本题而言，由于问题是 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$，所以 x、y 为自变量 u 为因变量，因而 v 为因变量。由于本题是对自变量 y 求偏导，所以本题中的“其他自变量”就是 x，因而在 $yu+xv$ 中，我们就把 x 当成常数。二是等式两侧同时对 y 求导这没错，但是对因变量求导时后面必须要乘以 $\frac{\partial \text{因变量}}{\partial \square}$，那么对本题而言，由于 u、v 是因变量，当对因变量 u 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个 $\frac{\partial u}{\partial y}$。当对因变量 v 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个 $\frac{\partial v}{\partial y}$。所以说，$yu+xv$ 对 y 求导实际上是等于 $(1\times u+1\times\frac{\partial u}{\partial y}\times y)+(0\times v+1\times\frac{\partial v}{\partial y}\times x)$，化简得到 $u+y\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial v}{\partial y}$。现在大家明白为何 $yu+xv$ 对 y 求完导得到的是 $u+y\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial v}{\partial y}$ 了吧。

好，综上所述，等式右侧的 0 对 y 求完导是 0，等式左侧的 $yu+xv$ 对 y 求完导是 $u+y\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial v}{\partial y}$，所以有

$$u+y\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad \text{（4）式}$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial y}x-v-y\frac{\partial v}{\partial y}=0\\ u+y\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$$

为了看着方便，我们设 $\frac{\partial u}{\partial y}=A$，$\frac{\partial v}{\partial y}=B$，所以

$$\begin{cases} Ax - v - By = 0 \\ u + Ay + Bx = 0 \end{cases}$$

解此方程组得

$$\begin{cases} A = \dfrac{xv - yu}{x^2 + y^2} \\ B = -\dfrac{xu + yv}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{xv - yu}{x^2 + y^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{xu + yv}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

好，现在我们已经求出了 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$，也就是说，第二问我们已经做完了。而且我们不光求出了 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$，还求出了 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$。

例. 已知 $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解： 本题有两问，第一问让求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，第二问让求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

我们先来看第一问，也就是求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

由于本题的问题是“$\dfrac{\partial \Delta}{\partial □}$”并且“$\Delta$”是单一的字母，说明本题会用到本小节所讲的知识。那么到底是“情况 1”、“情况 2”还是“情况 3”呢？很明显是情况 2，因为我们把这个式子一变就是 $\dfrac{x}{z} - \ln\dfrac{z}{y} = 0$。

情况 2 的解题方法就是将等式两侧同时对□求导，所以本题的做法如下：

由于 $\dfrac{x}{z} - \ln\dfrac{z}{y} = 0$，我们将等式两侧同时对 x 求导，在两侧都求完导之后，等于号“=”依然成立。

等式右侧是 0，对 x 求完导肯定还是 0。

等式左侧是 $\dfrac{x}{z} - \ln\dfrac{z}{y}$，对 x 求导得 $\dfrac{z - x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z^2} - \dfrac{y\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z \times y}$。

有些同学可能不明白为何 $\dfrac{x}{z} - \ln\dfrac{z}{y}$ 对 x 求完导得到的是 $\dfrac{z - x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z^2} - \dfrac{y\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z \times y}$，那我就来解释一下：

情况 2 的解题方法中说得很明白，要注意两点。一是其他自变量就当成常数，对于本题而言，由于问题是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，所以 z 为因变量 x 为自变量，因而 y 为自变量。由于本题是对自变量 x 求偏导，所以本题中的“其他自变量”就是 y，因而在 $\dfrac{x}{z} - \ln\dfrac{z}{y}$ 中，我们就把 y 当成常数。二是等式两侧同时对 x 求导这没错，但是对因变量求导时后面必须要乘以 $\dfrac{\partial \text{因变量}}{\partial □}$，那么对本题而言，由于 z 是因变量，当对因变量 z 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。所以说，$\dfrac{x}{z} - \ln\dfrac{z}{y}$ 对 x 求导实际上是等于 $\dfrac{1 \times z - 1 \times \dfrac{\partial z}{\partial x} \times x}{z^2} - \dfrac{1}{\dfrac{z}{y}} \times \dfrac{1 \times \dfrac{\partial z}{\partial x} \times y - 0 \times z}{y^2}$，化简得到 $\dfrac{z - x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z^2} - \dfrac{y\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z \times y}$。现在大家明白为何 $\dfrac{x}{z} - \ln\dfrac{z}{y}$ 对 x 求完导得到的是 $\dfrac{z - x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z^2} - \dfrac{y\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z \times y}$ 了吧。

好，综上所述，等式右侧的 0 对 x 求完导是 0，等式左侧的 $\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$ 对 x 求完导是 $\frac{z-x\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}-\frac{y\frac{\partial z}{\partial x}}{z\times y}$，所以有

$$\frac{z-x\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}-\frac{y\frac{\partial z}{\partial x}}{z\times y}=0$$

解得：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}$。

我们再来看第二问，也就是求 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

由于本题的问题是"$\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$"并且"$\Delta$"是单一的字母，说明本题会用到本小节所讲的知识。那么到底是"情况 1"、"情况 2"还是"情况 3"呢？很明显是情况 2，因为我们把这个式子一变就是 $\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}=0$。

情况 2 的解题方法就是将等式两侧同时对□求导，所以本题的做法如下：

由于 $\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}=0$，我们将等式两侧同时对 y 求导，在两侧都求完导之后，等于号"="依然成立。

等式右侧是 0，对 y 求完导肯定还是 0。

等式左侧是 $\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$，对 y 求导得 $-\frac{x\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}-\frac{y\frac{\partial z}{\partial y}-z}{z\times y}$。

有些同学可能不明白为何 $\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$ 对 y 求完导得到的是 $-\frac{x\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}-\frac{y\frac{\partial z}{\partial y}-z}{z\times y}$，那我就来解释一下：

情况 2 的解题方法中说得很明白，要注意两点。一是其他自变量就当成常数，对于本题而言，由于问题是 $\frac{\partial z}{\partial y}$，所以 z 为因变量 y 为自变量，因而 x 为自变量。由于本题是对自变量 y 求偏导，所以本题中的"其他自变量"就是 x，因而在 $\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$ 中，我们就把 x 当成常数。二是等式两侧同时对 y 求导这没错，但是对因变量求导时后面必须要乘以 $\frac{\partial\text{因变量}}{\partial\square}$，那么对本题而言，由于 z 是因变量，当对因变量 z 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

所以说，$\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$ 对 y 求导实际上是等于 $\frac{0\times z-1\times\frac{\partial z}{\partial y}\times x}{z^2}-\frac{1}{\frac{z}{y}}\times\frac{1\times\frac{\partial z}{\partial y}\times y-1\times z}{y^2}$，化简得到 $-\frac{x\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}-\frac{y\frac{\partial z}{\partial y}-z}{z\times y}$。现在大家明白为何 $\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$ 对 y 求完导得到的是 $-\frac{x\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}-\frac{y\frac{\partial z}{\partial y}-z}{z\times y}$ 了吧。

好，综上所述，等式右侧的 0 对 y 求完导是 0，等式左侧的 $\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$ 对 y 求完导是 $-\frac{x\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}-\frac{y\frac{\partial z}{\partial y}-z}{z\times y}$，所以有

$$-\frac{x\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}-\frac{y\frac{\partial z}{\partial y}-z}{z\times y}=0$$

解得：$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$。

例. 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，证明 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$。

解：本题看似是一道证明题，不过我们可以把它当成一道含三问的计算题来处理。第一问让求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，第二问让

求$\frac{\partial z}{\partial y}$，第三问让求$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$。

我们先来看第一问，也就是求$\frac{\partial z}{\partial x}$。

由于本题的问题是“$\frac{\partial \Delta}{\partial \square}$”并且“$\Delta$”是单一的字母，说明本题会用到本小节所讲的知识。那么到底是“情况1”、“情况2”还是“情况3”呢？很明显是情况2，因为我们把这个式子一变就是$2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z)=0$。

情况2的解题方法就是将等式两侧同时对$\square$求导，所以本题的做法如下：

由于$2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z)=0$，我们将等式两侧同时对$x$求导，在两侧都求完导之后，等于号“=”依然成立。

等式右侧是0，对x求完导肯定还是0。

等式左侧是$2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z)$，对x求导得$2\cos(x+2y-3z)(1-3\frac{\partial z}{\partial x})-(1-3\frac{\partial z}{\partial x})$。

有些同学可能不明白为何$2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z)$对x求完导得到的是$2\cos(x+2y-3z)(1-3\frac{\partial z}{\partial x})-(1-3\frac{\partial z}{\partial x})$，那我就来解释一下：

情况2的解题方法中说得很明白，要注意两点。一是其他自变量就当成常数，对于本题而言，由于问题是$\frac{\partial z}{\partial x}$，所以$z$为因变量$x$为自变量，因而$y$为自变量。由于本题是对自变量$x$求偏导，所以本题中的“其他自变量”就是$y$，因而在$2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z)$中，我们就把$y$当成常数。二是等式两侧同时对$x$求导这没错，但是对因变量求导时后面必须要乘以$\frac{\partial \text{因变量}}{\partial \square}$，那么对本题而言，由于$z$是因变量，当对因变量$z$使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个$\frac{\partial z}{\partial x}$。所以说，$2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z)$对$x$求导等于$2\cos(x+2y-3z)(1-3\frac{\partial z}{\partial x})-(1-3\frac{\partial z}{\partial x})$。现在大家明白为何$2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z)$对$x$求完导得到的是$2\cos(x+2y-3z)(1-3\frac{\partial z}{\partial x})-(1-3\frac{\partial z}{\partial x})$了吧。

好，综上所述，等式右侧的0对x求完导是0，等式左侧的$2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z)$对x求完导是$2\cos(x+2y-3z)(1-3\frac{\partial z}{\partial x})-(1-3\frac{\partial z}{\partial x})$，所以有

$$2\cos(x+2y-3z)(1-3\frac{\partial z}{\partial x})-(1-3\frac{\partial z}{\partial x})=0$$

解得：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-2\cos(x+2y-3z)}{3-6\cos(x+2y-3z)}$。

我们再来看第二问，也就是求$\frac{\partial z}{\partial y}$。

由于本题的问题是“$\frac{\partial \Delta}{\partial \square}$”并且“$\Delta$”是单一的字母，说明本题会用到本小节所讲的知识。那么到底是“情况1”、“情况2”还是“情况3”呢？很明显是情况2，因为我们把这个式子一变就是$2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z)=0$。

情况2的解题方法就是将等式两侧同时对$\square$求导，所以本题的做法如下：

由于$2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z)=0$，我们将等式两侧同时对$y$求导，在两侧都求完导之后，等于号“=”依然成立。

等式右侧是0，对y求完导肯定还是0。

等式左侧是$2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z)$，对y求导得$2\cos(x+2y-3z)(2-3\frac{\partial z}{\partial y})-(2-3\frac{\partial z}{\partial y})$。

有些同学可能不明白为何$2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z)$对y求完导得到的是$2\cos(x+2y-3z)(2-3\frac{\partial z}{\partial y})-(2-3\frac{\partial z}{\partial y})$，那我就来解释一下：

情况 2 的解题方法中说得很明白，要注意两点。一是其他自变量就当成常数，对于本题而言，由于问题是$\frac{\partial z}{\partial y}$，所以$z$为因变量$y$为自变量，因而$x$为自变量。由于本题是对自变量$y$求偏导，所以本题中的“其他自变量”就是$x$，因而在$2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z)$中，我们就把$x$当成常数。二是等式两侧同时对$y$求导这没错，但是对因变量求导时后面必须要乘以$\frac{\partial 因变量}{\partial \square}$，那么对本题而言，由于$z$是因变量，当对因变量$z$使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个$\frac{\partial z}{\partial y}$。所以说，$2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z)$对$y$求导等于$2\cos(x+2y-3z)(2-3\frac{\partial z}{\partial y})-(2-3\frac{\partial z}{\partial y})$。现在大家明白为何$2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z)$对$y$求完导得到的是$2\cos(x+2y-3z)(2-3\frac{\partial z}{\partial y})-(2-3\frac{\partial z}{\partial y})$了吧。

好，综上所述，等式右侧的 0 对y求完导是 0，等式左侧的$2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z)$对y求完导是$2\cos(x+2y-3z)(2-3\frac{\partial z}{\partial y})-(2-3\frac{\partial z}{\partial y})$，所以有

$$2\cos(x+2y-3z)(2-3\frac{\partial z}{\partial y})-(2-3\frac{\partial z}{\partial y})=0$$

解得：$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2-4\cos(x+2y-3z)}{3-6\cos(x+2y-3z)}$。

我们再来看第三问，也就是求$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$。

由于$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-2\cos(x+2y-3z)}{3-6\cos(x+2y-3z)}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2-4\cos(x+2y-3z)}{3-6\cos(x+2y-3z)}$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1-2\cos(x+2y-3z)}{3-6\cos(x+2y-3z)}+\frac{2-4\cos(x+2y-3z)}{3-6\cos(x+2y-3z)}=\frac{3-6\cos(x+2y-3z)}{3-6\cos(x+2y-3z)}=1$$

例. 设$\begin{cases}x=\mathrm{e}^u+u\sin v\\y=\mathrm{e}^u-u\cos v\end{cases}$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$。

解：本题有两问，我们先来看第一问，也就是求$\frac{\partial u}{\partial x}$。

由于问题是“$\frac{\partial \Delta}{\partial \square}$”并且“$\Delta$”是单一的字母，说明本题会用到本小节所讲的知识。那么到底是“情况 1”、“情况 2”还是“情况 3”呢？很明显是情况 3。

情况 3 的解题方法就是将等式两侧同时对$\square$求导，所以本题的做法如下：

我们先来看第一个方程。

第一个方程是$x=\mathrm{e}^u+u\sin v$。

等式左侧是x，对x求导得 1。

等式右侧是$\mathrm{e}^u+u\sin v$，对x求导得$\mathrm{e}^u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\sin v+u\cos v\frac{\partial v}{\partial x}$。

有些同学可能不明白为何$\mathrm{e}^u+u\sin v$对x求完导得到的是$\mathrm{e}^u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\sin v+u\cos v\frac{\partial v}{\partial x}$，那我就来解释一下：

情况 3 的解题方法中说得很明白，要注意两点。一是其他自变量就当成常数，对于本题而言，由于问题是$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$，所以$x$、$y$为自变量$u$为因变量，因而$v$为因变量。由于本题是对自变量$x$求偏导，所以本题中的“其他自变量”就是$y$，因而在$\mathrm{e}^u+u\sin v$中，我们就把$y$当成常数（当然了，$\mathrm{e}^u+u\sin v$中没有$y$）。二是等式两侧同时对$x$求导这没错，但是对因变量求导时后面必须要乘以$\frac{\partial 因变量}{\partial \square}$，那么对本题而言，由于$u$、$v$是因变量，当对因变量$u$使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个$\frac{\partial u}{\partial x}$。当对因变量$v$使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个$\frac{\partial v}{\partial x}$。所以说，$\mathrm{e}^u+u\sin v$对$x$求导等于$\mathrm{e}^u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\sin v+u\cos v\frac{\partial v}{\partial x}$。现在大家明白为何$\mathrm{e}^u+u\sin v$对$x$求完导得到的是

$e^u \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial x}\sin v+u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 了吧。

好，综上所述，等式左侧的 x 对 x 求完导是 1，等式右侧的 $e^u+u\sin v$ 对 x 求完导是 $e^u \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial x}\sin v+u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x}$，所以有

$$1=e^u \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\sin v+u\cos v\frac{\partial v}{\partial x} \qquad （1）式$$

我们再来看第二个方程。

第二个方程是 $y=e^u-u\cos v$。

等式左侧是 y，对 x 求导得 0。

有些同学可能不明白为何 y 对 x 求完导得到的是 0，那我就来解释一下：

情况 3 的解题方法中说得很明白，其他自变量就当成常数，对于本题而言，由于问题是 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，所以 x、y 为自变量 u 为因变量，因而 v 为因变量。由于本题是对自变量 x 求偏导，所以本题中的“其他自变量”就是 y，因而我们就把 y 当成常数。

等式右侧是 $e^u-u\cos v$，对 x 求导得 $e^u \dfrac{\partial u}{\partial x}-(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos v-u\times\sin v\times\dfrac{\partial v}{\partial x})$。

有些同学可能不明白为何 $e^u-u\cos v$ 对 x 求完导得到的是 $e^u \dfrac{\partial u}{\partial x}-(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos v-u\times\sin v\times\dfrac{\partial v}{\partial x})$，那我就来解释一下：

情况 3 的解题方法中说得很明白，等式两侧同时对 x 求导这没错，但是对因变量求导时后面必须要乘以 $\dfrac{\partial 因变量}{\partial \square}$，针对本题而言，由于 u、v 是因变量，当对因变量 u 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$。当对因变量 v 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个 $\dfrac{\partial v}{\partial x}$。所以说，$e^u-u\cos v$ 对 x 求导等于 $e^u \dfrac{\partial u}{\partial x}-(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos v-u\times\sin v\times\dfrac{\partial v}{\partial x})$。现在大家明白为何 $e^u-u\cos v$ 对 x 求完导得到的是 $e^u \dfrac{\partial u}{\partial x}-(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos v-u\times\sin v\times\dfrac{\partial v}{\partial x})$ 了吧。

好，综上所述，等式左侧的 y 对 x 求完导是 0，等式右侧的 $e^u-u\cos v$ 对 x 求完导是

$e^u \dfrac{\partial u}{\partial x}-(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos v-u\times\sin v\times\dfrac{\partial v}{\partial x})$，所以有

$$0=e^u \frac{\partial u}{\partial x}-(\frac{\partial u}{\partial x}\cos v-u\times\sin v\times\frac{\partial v}{\partial x}) \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\begin{cases} 1=e^u \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial x}\sin v+u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 0=e^u \dfrac{\partial u}{\partial x}-(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos v-u\times\sin v\times\dfrac{\partial v}{\partial x}) \end{cases}$$

为了看着方便，我们设 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=A$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=B$，所以

$$\begin{cases} 1=e^u\times A+\sin v\times A+u\times\cos v\times B \\ 0=e^u\times A-(A\times\cos v-u\times\sin v\times B) \end{cases}$$

解此方程组得

$$\begin{cases} A=\dfrac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1} \\ B=\dfrac{\cos v-e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\cos v-e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]} \end{cases}$$

好，现在我们已经求出了 $\frac{\partial u}{\partial x}$，也就是说，第一问我们已经做完了。而且我们不光求出了 $\frac{\partial u}{\partial x}$，还求出了 $\frac{\partial v}{\partial x}$。

本题有两问，现在我们来看第二问，也就是求 $\frac{\partial u}{\partial y}$。

由于问题是“$\frac{\partial \Delta}{\partial \square}$”并且“$\Delta$”是单一的字母，说明本题会用到本小节所讲的知识。那么到底是“情况 1”、“情况 2”还是“情况 3”呢？很明显是情况 3。

情况 3 的解题方法就是让等式两侧同时对 $\square$ 求导，所以本题的做法如下：

我们先来看第一个方程。

第一个方程是 $x=e^u+u\sin v$。

等式左侧是 x，对 y 求导得 0。

等式右侧是 $e^u+u\sin v$，对 y 求导得 $e^u\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\sin v+u\cos v\frac{\partial v}{\partial y}$。

有些同学可能不明白为何 x 对 y 求导得到的是 0，$e^u+u\sin v$ 对 y 求完导得到的是 $e^u\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\sin v+u\cos v\frac{\partial v}{\partial y}$，那我就来解释一下：

情况 3 的解题方法中说得很明白，要注意两点。一是其他自变量就当成常数，对于本题而言，由于问题是 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$，所以 x、y 为自变量 u 为因变量，因而 v 为因变量。由于本题是对自变量 y 求偏导，所以本题中的“其他自变量”就是 x，因而我们就把 x 当成常数。二是等式两侧同时对 y 求导这没错，但是对因变量求导时后面必须要乘以 $\frac{\partial 因变量}{\partial \square}$，针对本题而言，由于 u、v 是因变量，当对因变量 u 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个 $\frac{\partial u}{\partial y}$。当对因变量 v 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个 $\frac{\partial v}{\partial y}$。所以说，$x$ 对 y 求导得到的是 0，$e^u+u\sin v$ 对 y 求完导得到的是 $e^u\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\sin v+u\cos v\frac{\partial v}{\partial y}$。现在大家明白为何 x 对 y 求导得到的是 0，$e^u+u\sin v$ 对 y 求完导得到的是 $e^u\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\sin v+u\cos v\frac{\partial v}{\partial y}$ 了吧。

好，综上所述，等式左侧的 x 对 y 求完导是 0，等式右侧的 $e^u+u\sin v$ 对 y 求完导是 $e^u\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\sin v+u\cos v\frac{\partial v}{\partial y}$，所以有

$$0=e^u\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\sin v+u\cos v\frac{\partial v}{\partial y} \qquad （3）式$$

我们再来看第二个方程。

第二个方程是 $y=e^u-u\cos v$。

等式左侧是 y，对 y 求导得 1。

等式右侧是 $e^u-u\cos v$，对 y 求导得 $e^u\frac{\partial u}{\partial y}-(\frac{\partial u}{\partial y}\cos v-u\times\sin v\times\frac{\partial v}{\partial y})$。

有些同学可能不明白为何 $e^u-u\cos v$ 对 y 求完导得到的是 $e^u\frac{\partial u}{\partial y}-(\frac{\partial u}{\partial y}\cos v-u\times\sin v\times\frac{\partial v}{\partial y})$，那我就来解释一下：

情况 3 的解题方法中说得很明白，等式两侧同时对 y 求导这没错，但是对因变量求导时后面必须要乘以 $\frac{\partial 因变量}{\partial \square}$，针对本题而言，由于 u、v 是因变量，当对因变量 u 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个 $\frac{\partial u}{\partial y}$。当对因变量 v 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个 $\frac{\partial v}{\partial y}$。所以说，$e^u-u\cos v$ 对 y 求导等于

$\mathrm{e}^u\dfrac{\partial u}{\partial y}-(\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos v-u\times\sin v\times\dfrac{\partial v}{\partial y})$。现在大家明白为何 $\mathrm{e}^u-u\cos v$ 对 y 求完导得到的是 $\mathrm{e}^u\dfrac{\partial u}{\partial y}-(\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos v-u\times\sin v\times\dfrac{\partial v}{\partial y})$ 了吧。

好，综上所述，等式左侧的 y 对 y 求完导是 1，等式右侧的 $\mathrm{e}^u-u\cos v$ 对 y 求完导是 $\mathrm{e}^u\dfrac{\partial u}{\partial y}-(\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos v-u\times\sin v\times\dfrac{\partial v}{\partial y})$，所以有

$$1=\mathrm{e}^u\frac{\partial u}{\partial y}-(\frac{\partial u}{\partial y}\cos v-u\times\sin v\times\frac{\partial v}{\partial y}) \qquad （4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\begin{cases}0=\mathrm{e}^u\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\sin v+u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ 1=\mathrm{e}^u\dfrac{\partial u}{\partial y}-(\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos v-u\times\sin v\times\dfrac{\partial v}{\partial y})\end{cases}$$

为了看着方便，我们设 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=A$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=B$，所以

$$\begin{cases}0=\mathrm{e}^uA+A\sin v+u\times\cos v\times B\\ 1=\mathrm{e}^uA-(A\cos v-u\times\sin v\times B)\end{cases}$$

解此方程组得

$$\begin{cases}A=\dfrac{-\cos v}{\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1}\\ B=\dfrac{\sin v+\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]}\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-\cos v}{\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\sin v+\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]}\end{cases}$$

好，现在我们已经求出了 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$，也就是说，第二问我们已经做完了。而且我们不光求出了 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$，还求出了 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$。

6.5.2 当“Δ”不是单一的字母时 $\dfrac{\partial\Delta}{\partial\square}$ 的求法

本小节我们来讨论当“Δ”不是单一的字母时 $\dfrac{\partial\Delta}{\partial\square}$ 的求法，大家来看几道题。

例. 已知 $z=x+y^2$，求 $\dfrac{\partial(2z)}{\partial x}$。

例. 已知 $z=x+y^2$，求 $\dfrac{\partial(1-z)}{\partial x}$。

例. 已知 $x+y+z=0$，求 $\dfrac{\partial(\frac{x}{1-z})}{\partial x}$。

以上这几道题都属于当“Δ”不是单一的字母时求 $\dfrac{\partial\Delta}{\partial\square}$ 的题。那么这种题到底应该如何去做呢？

这种题的做法是：还是套第 2 章导数公式来求 $\dfrac{\mathrm{d}\square}{\mathrm{d}x}$，但是要记住，对因变量求导时后面必须要乘以 $\dfrac{\mathrm{d}因变量}{\mathrm{d}自变量}$。

不过要注意两点：一是其他自变量就当成常数，二是对因变量求导时后面必须要乘以$\dfrac{\partial 因变量}{\partial \square}$。

我们来看几道例题。

例. 已知$z=6x^2+y^2$，求$\dfrac{\partial(1-z)}{\partial x}$。

解： 由于本题的问题是“$\dfrac{\partial \Delta}{\partial \square}$”并且“$\Delta$”不是单一的字母，说明本题会用到本小节所讲的知识。

按本小节所讲的解题方法来做。

对于本题而言，很明显x、y是自变量，z是因变量。

所以对于本题来说，有$\dfrac{\partial(1-z)}{\partial x}=0-1\times\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

好，那接下来我们只要算出$\dfrac{\partial z}{\partial x}$就可以了，这就与本小节所讲的知识无关了，而是与上一节所讲的知识有关。

这属于上一节所讲的情况 1，所以$\dfrac{\partial z}{\partial x}=12x$。

现在我们把$\dfrac{\partial z}{\partial x}=12x$代入$\dfrac{\partial(1-z)}{\partial x}=0-1\times\dfrac{\partial z}{\partial x}$中就可以了。所以

$$\frac{\partial(1-z)}{\partial x}=0-1\times\frac{\partial z}{\partial x}=0-1\times 12x=-12x$$

例. 已知$x+y+z=0$，求$\dfrac{\partial(\frac{x}{1-z})}{\partial x}$。

解： 由于本题的问题是“$\dfrac{\partial \Delta}{\partial \square}$”并且“$\Delta$”不是单一的字母，说明本题会用到本小节所讲的知识。

按本小节所讲的解题方法来做。

对于本题而言，很明显x、y是自变量，z是因变量。

所以对于本题来说，有$\dfrac{\partial(\frac{x}{1-z})}{\partial x}=\dfrac{1\times(1-z)-(0-1\times\frac{\partial z}{\partial x})\times x}{(1-z)^2}$。

好，那接下来我们只要算出$\dfrac{\partial z}{\partial x}$就可以了，这就与本小节所讲的知识无关了，而是与上一节所讲的知识有关。

这属于上一节所讲的情况 2，所以$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$。

现在我们把$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$代入$\dfrac{\partial(\frac{x}{1-z})}{\partial x}=\dfrac{1\times(1-z)-(0-1\times\frac{\partial z}{\partial x})\times x}{(1-z)^2}$中就可以了。所以

$$\frac{\partial(\frac{x}{1-z})}{\partial x}=\frac{1\times(1-z)-(0-1\times\frac{\partial z}{\partial x})\times x}{(1-z)^2}=\frac{1-z-x}{(1-z)^2}$$

例. 已知$x+y+z=0$，求$\dfrac{\partial(2x+y)}{\partial x}$。

解： 由于本题的问题是“$\dfrac{\partial \Delta}{\partial \square}$”并且“$\Delta$”不是单一的字母，说明本题会用到本小节所讲的知识。

按本小节所讲的解题方法来做。

对于本题而言，很明显x、z是自变量，y是因变量。

所以对于本题来说，有$\dfrac{\partial(2x+y)}{\partial x}=2+1\times\dfrac{\partial y}{\partial x}$。

好，那接下来我们只要算出$\dfrac{\partial y}{\partial x}$就可以了，这就与本小节所讲的知识无关了，而是与上一节所讲的知识有关。

这属于上一节所讲的情况 2，所以$\dfrac{\partial y}{\partial x}=-1$。

现在我们把 $\frac{\partial y}{\partial x}=-1$ 代入 $\frac{\partial(2x+y)}{\partial x}=2+1\times\frac{\partial y}{\partial x}$ 中就可以了。所以

$\frac{\partial(2x+y)}{\partial x}=2+1\times\frac{\partial y}{\partial x}=2-1=1$

例. 已知 $x+y+z=0$，求 $\frac{\partial(2x+y+4z)}{\partial x}$。

解： 由于本题的问题是"$\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$"并且"$\Delta$"不是单一的字母，说明本题会用到本小节所讲的知识。

用本小节所讲的解题方法来做。

但是对于本题而言，我们只知道 x 是自变量，而无法确定 y 和 z 到底哪个是因变量。这时我们就需要讨论了。

如果把 y 当成因变量（那 z 自然就是自变量，因为只有一个方程，所以因变量只有一个）的话

那么就有：$\frac{\partial(2x+y+4z)}{\partial x}=2+1\times\frac{\partial y}{\partial x}+0$。

好，接下来我们只要算出 $\frac{\partial y}{\partial x}$ 就可以了，这就与本小节所讲的知识无关了，而是与上一节所讲的知识有关。

这属于上一节所讲的情况 2，所以 $\frac{\partial y}{\partial x}=-1$。

现在我们把 $\frac{\partial y}{\partial x}=-1$ 代入 $\frac{\partial(2x+y+4z)}{\partial x}=2+1\times\frac{\partial y}{\partial x}+0$ 中就可以了。所以

$\frac{\partial(2x+y+4z)}{\partial x}=2+1\times\frac{\partial y}{\partial x}+0=2-1=1$

如果把 z 当成因变量（那 y 自然就是自变量，因为只有一个方程，所以因变量只有一个）的话

那么就有：$\frac{\partial(2x+y+4z)}{\partial x}=2+0+(0\times z+1\times\frac{\partial z}{\partial x}\times 4)$。

好，接下来我们只要算出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 就可以了，这就与本小节所讲的知识无关了，而是与上一节所讲的知识有关。

这属于上一节所讲的情况 2，所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=-1$。

现在我们把 $\frac{\partial z}{\partial x}=-1$ 代入 $\frac{\partial(2x+y+4z)}{\partial x}=2+0+(0\times z+1\times\frac{\partial z}{\partial x}\times 4)$ 中就可以了。所以

$\frac{\partial(2x+y+4z)}{\partial x}=2+0+(0\times z+1\times\frac{\partial z}{\partial x}\times 4)=2-4=-2$

例. 已知 $z=-x-y$，求 $\frac{\partial(2x+y+4z)}{\partial x}$。

解： 由于本题的问题是"$\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$"并且"$\Delta$"不是单一的字母，说明本题会用到本小节所讲的知识。

按本小节所讲的解题方法来做。

但是对于本题而言，我们只知道 x 是自变量，而无法确定 y 和 z 到底哪个是因变量。这时我们就需要讨论了。

如果把 y 当成因变量（那 z 自然就是自变量，因为只有一个方程，所以因变量只有一个）的话

那么就有：$\frac{\partial(2x+y+4z)}{\partial x}=2+1\times\frac{\partial y}{\partial x}+0$。

好，接下来我们只要算出 $\frac{\partial y}{\partial x}$ 就可以了，这就与本小节所讲的知识无关了，而是与上一节所讲的知识有关。

这属于上一节所讲的情况 2，解得 $\frac{\partial y}{\partial x}=-1$。

现在我们把 $\frac{\partial y}{\partial x}=-1$ 代入 $\frac{\partial(2x+y+4z)}{\partial x}=2+1\times\frac{\partial y}{\partial x}+0$ 中就可以了。所以

$\frac{\partial(2x+y+4z)}{\partial x}=2+1\times\frac{\partial y}{\partial x}+0=2-1=1$

如果把 z 当成因变量（那 y 自然就是自变量，因为只有一个方程，所以因变量只有一个）的话

那么就有：$\dfrac{\partial(2x+y+4z)}{\partial x}=2+0+(0\times z+1\times\dfrac{\partial z}{\partial x}\times 4)$。

好，接下来我们只要算出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 就可以了，这就与本小节所讲的知识无关了，而是与上一节所讲的知识有关。

这属于上一节所讲的情况 1，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$。

现在我们把 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$ 代入 $\dfrac{\partial(2x+y+4z)}{\partial x}=2+0+(0\times z+1\times\dfrac{\partial z}{\partial x}\times 4)$ 中就可以了。所以

$$\frac{\partial(2x+y+4z)}{\partial x}=2+0+(0\times z+1\times\frac{\partial z}{\partial x}\times 4)=2-4=-2$$

例. 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解：我之前给大家解释过，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 指的是 $\dfrac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x}$。所以，我们要想求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 就必须先求出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

那好，我们现在就先来求一下 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

由于本题的问题是"$\dfrac{\partial\Delta}{\partial\square}$"并且"$\Delta$"是单一的字母，所以这说明本题会用到上一小节所讲的知识。那么到底是"情况 1"、"情况 2"还是"情况 3"呢？很明显是情况 2。

我们来看看情况 2 是怎么说的：

情况 2. 如果题中给的关系式是：某某某（注意：某某某中既含□又含 Δ）$=0$，让求 $\dfrac{\partial\Delta}{\partial\square}$，那就等式两侧同时对□求导（当然，0 的那一侧求完导肯定还是 0）即可。不过要注意两点：一是其他自变量就当成常数，二是对因变量求导时后面必须要乘以 $\dfrac{\partial\text{因变量}}{\partial\square}$。

情况 2 的解题方法就是让等式两侧同时对□求导，所以本题的做法如下：

由于 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，将等式两侧同时对 x 求导，在两侧都求完导之后，等于号"$=$"依然成立。

等式右侧是 0，对 x 求完导肯定还是 0。

等式左侧是 $x^2+y^2+z^2-4z$，对 x 求导得 $2x+(2z-4)\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

有些同学可能不明白为何 $x^2+y^2+z^2-4z$ 对 x 求完导得到的是 $2x+(2z-4)\dfrac{\partial z}{\partial x}$，那我就来解释一下：

情况 2 的解题方法中说得很明白，要注意两点。一是其他自变量就当成常数，对于本题而言，由于问题是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，所以 z 为因变量 x 为自变量，因而 y 为自变量。由于本题是对自变量 x 求偏导，本题中的"其他自变量"就是 y，所以在 $x^2+y^2+z^2-4z$ 中，我们就把 y 当成常数。二是等式两侧同时对 x 求导这没错，但是对因变量求导时后面必须要乘以 $\dfrac{\partial\text{因变量}}{\partial\square}$，针对本题而言，由于 z 是因变量，当对因变量 z 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。所以说，$x^2+y^2+z^2-4z$ 对 x 求导实际上是等于 $2x+0+2z\dfrac{\partial z}{\partial x}-4\dfrac{\partial z}{\partial x}$，化简得到 $2x+(2z-4)\dfrac{\partial z}{\partial x}$。现在大家明白为何 $x^2+y^2+z^2-4z$ 对 x 求完导得到的是 $2x+(2z-4)\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 了吧。

好，综上所述，等式右侧的 0 对 x 求完导是 0，等式左侧的 $x^2+y^2+z^2-4z$ 对 x 求完导是 $2x+(2z-4)\dfrac{\partial z}{\partial x}$，所以有

$$2x+(2z-4)\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

解得：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{2-z}$。

好，$\frac{\partial z}{\partial x}$我们已经求完了，现在就来求一下$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$（也就是$\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x}$）。

由于$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$，所以

$$\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x}=\frac{\partial(\frac{x}{2-z})}{\partial x}$$

由于本题的问题是"$\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$"并且"$\Delta$"不是单一的字母，说明本题会用到本小节所讲的知识。

按本小节所讲的解题方法来做。

对于目前的情况而言，很明显x、y是自变量，z是因变量。

所以对于本题来说，有$\frac{\partial(\frac{x}{2-z})}{\partial x}=\frac{1\times(2-z)-(0-1\times\frac{\partial z}{\partial x})\times x}{(2-z)^2}$。

刚才已经求出了$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$，我们现在把$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$代入上式中就可以了，即

$$\frac{\partial(\frac{x}{2-z})}{\partial x}=\frac{1\times(2-z)-(0-1\times\frac{\partial z}{\partial x})\times x}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)+1\times\frac{x}{2-z}\times x}{(2-z)^2}$$

化简得

$$\frac{\partial(\frac{x}{2-z})}{\partial x}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

例. 设$x^2+2y+z^2=0$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解：我之前给大家解释过，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$指的是$\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x}$。所以，我们要想求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$就必须先求出$\frac{\partial z}{\partial x}$。

那好，我们现在就先来求一下$\frac{\partial z}{\partial x}$。

由于本题的问题是"$\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$"并且"$\Delta$"是单一的字母，说明本题会用到上一小节所讲的知识。那么到底是"情况 1"、"情况 2"还是"情况 3"呢？很明显是情况 2。

我们来看看情况 2 是怎么说的：

情况 2. 如果题中给的关系式是：某某某（注意：某某某中既含$\square$又含Δ）$=0$，让求$\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$，那就等式两侧同时对$\square$求导（当然，0 的那一侧求完导肯定还是 0）即可。不过要注意两点：一是其他自变量就当成常数，二是对因变量求导时后面必须要乘以$\frac{\partial\text{因变量}}{\partial\square}$。

情况 2 的解题方法就是让等式两侧同时对$\square$求导，所以本题的做法如下：

由于$x^2+2y+z^2=0$，将等式两侧同时对x求导，在两侧都求完导之后，等于号"="依然成立。

等式右侧是 0，对x求完导肯定还是 0。

等式左侧是x^2+2y+z^2，对x求导得$2x+2z\times\frac{\partial z}{\partial x}$。

有些同学可能不明白为何x^2+2y+z^2对x求完导得到的是$2x+2z\times\frac{\partial z}{\partial x}$，那我就来解释一下：

情况 2 的解题方法中说得很明白，要注意两点。一是其他自变量就当成常数，对于本题而言，由于问题是$\frac{\partial z}{\partial x}$，所以$z$为因变量$x$为自变量，因而$y$为自变量。由于本题是对自变量$x$求偏导，本题中的"其他自变量"就是$y$，所以在$x^2+2y+z^2$中，我们就把$y$当成常数。二是等式两侧同时对$x$求导这没错，但是对因变量求导时后面必须要乘

以$\dfrac{\partial 因变量}{\partial \square}$，针对本题而言，由于 z 是因变量，当对因变量 z 使用求导公式时，使用完之后必须要乘以一个$\dfrac{\partial z}{\partial x}$。所以说，$x^2+2y+z^2$ 对 x 求导等于 $2x+2z\times\dfrac{\partial z}{\partial x}$。现在大家明白为何 x^2+2y+z^2 对 x 求完导得到的是 $2x+2z\times\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 了吧。

好，综上所述，等式右侧的 0 对 x 求完导是 0，等式左侧的 x^2+2y+z^2 对 x 求完导是 $2x+2z\times\dfrac{\partial z}{\partial x}$，所以有

$$2x+2z\times\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

解得：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{z}$。

好，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 已经求完了，我们现在就来求一下 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$（也就是 $\dfrac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x}$）。

由于已经求出了 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{z}$，所以

$$\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x}=\frac{\partial(-\frac{x}{z})}{\partial x}$$

由于本题的问题是“$\dfrac{\partial\Delta}{\partial\square}$”并且“$\Delta$”不是单一的字母，说明本题会用到本小节所讲的知识。

按本小节所讲的解题方法来做。

对于目前的情况而言，很明显 x、y 是自变量，z 是因变量。

所以对于本题来说，有 $\dfrac{\partial(-\frac{x}{z})}{\partial x}=\dfrac{-1\times z+1\times\frac{\partial z}{\partial x}\times x}{z^2}$。

已经求出了 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{z}$，我们现在把 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{z}$ 代入上式中就可以了，即

$$\frac{\partial(-\frac{x}{z})}{\partial x}=\frac{-1\times z+1\times\frac{\partial z}{\partial x}\times x}{z^2}=\frac{-1\times z+1\times(-\frac{x}{z})\times x}{z^2}$$

化简得

$$\frac{\partial(-\frac{x}{z})}{\partial x}=\frac{-z^2-x^2}{z^3}$$

6.6　分段函数求偏导

分段函数求偏导的方法如下：对于分段点来说，要用偏导数的定义式来求；对于其他点来说，直接用上一节所讲的方法（也就是利用导数公式）来求即可。

下面我们来看几道例题。

例. 设 $z=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解： 本题让求 z 对 x 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 以及 z 对 y 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，由于本题给的是一个分段函数，所以本题很明显属于“分段函数求偏导”，我们应该按照刚刚讲的方法来做本题。

本题有两问，我们先来做第一问，也就是求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

对于本题来说，分段点是 $(0,0)$。所以对于分段点 $(0,0)$ 来说，我们要用偏导数的定义式来求；对于 $(x,y)\neq(0,0)$ 来说，我们用上一节所讲的方法来求即可。

我们先用偏导数的定义式求 z 在 $(0,0)$ 处对 x 的偏导数。

对 x 的偏导数的定义式是什么？这在 6.4 节中给大家讲过。对 x 的偏导数的定义式是

设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$=常数 A，则称函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 可偏导，并且函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数为 A。记作 $f_x'(x_0,y_0)=A$、$z_x'\big|_{(x_0,y_0)}=A$、$\dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)}=A$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)}=A$。

对于本题而言，需要求的是 z 在 $(0,0)$ 处对 x 的偏导数，所以我们需要算出 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$。

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}\qquad（1）式$$

由于 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，所以 $f(0,0)=0$。把 $f(0,0)=0$ 代入（1）式，可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)}{\Delta x}\qquad（2）式$$

老带着 Δx 咱们看着也别扭，干脆换个字母得了，把 Δx 换成 x 吧（当然你要看着不别扭，也可以不换）。所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x}\qquad（3）式$$

好，我们现在得将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x}$ 中的 $f(x,0)$ 显化。$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，应该将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x}$ 中的 $f(x,0)$ 显化成哪段呢？

由于是 $x\to 0$，这说明 x 无限地接近于 0 但是不能等于 0，也就是说 $(x,0)\neq(0,0)$，所以我们应该将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x}$ 中的 $f(x,0)$ 显化成 $\dfrac{x^2\times 0^2}{x^2+0^2}$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2\times 0^2}{x^2+0^2}}{x}=\lim_{x\to 0}0=0\qquad（4）式$$

由于最终算出的极限值是常数 0，说明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处对 x 可偏导，并且 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(0,0)}=0$。也就是说

当 $(x,y)=(0,0)$ 时，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$。

我们再用上一节所讲的方法（也就是利用导数公式）求 z 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 处对 x 的偏导数。

换句话说，现在就是 $z=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

由于本题的问题是“$\dfrac{\partial\Delta}{\partial\square}$”并且“$\Delta$”是单一的字母，说明本题会用到 6.5.1 节所讲的知识。那么到底是“情况 1”、“情况 2”还是“情况 3”呢？很明显是情况 1。

我们来看看情况 1 是怎么说的：

情况 1. 如果题中给的关系式是：Δ=某某某（注意：某某某中不含 Δ），让求 $\dfrac{\partial\Delta}{\partial\square}$，那就直接套第 2 章所讲的导数公式即可。不过要注意一点：其他自变量就当成常数。

情况 1 的解题方法就是直接套公式，不过要注意其他自变量就当成常数，所以做法如下：

由于问题是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，所以 z 为因变量 x 为自变量，因而 y 为自变量。由于本题是对自变量 x 求偏导，所以本题中的

“其他自变量”就是 y，因而在 $z=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ 中，我们就把 y 当成常数。

所以当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2xy^2(x^2+y^2)-2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$。

综上所述

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{2xy^2(x^2+y^2)-2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

本题有两问，第一问我们已经做完了，现在来做第二问，也就是求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

对于本题来说，分段点是 $(0,0)$。所以对于分段点 $(0,0)$ 来说，我们要用偏导数的定义式来求；对于 $(x,y)\neq(0,0)$ 来说，我们用上一节所讲的方法来求即可。

我们先用偏导数的定义求 z 在 $(0,0)$ 处对 y 的偏导数。

对 y 的偏导数的定义式是什么？这在 6.4 节中给大家讲过。对 y 的偏导数的定义式是

设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=常数A$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 y 可偏导，并且函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数为 A。记作 $f_y'(x_0,y_0)=A$、$z_y'\big|_{(x_0,y_0)}=A$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}=A$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}=A$。

对于本题而言，需要求的是 z 在 $(0,0)$ 处对 y 的偏导数，所以我们需要算出 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}$。

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} \qquad （5）式$$

由于 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，所以 $f(0,0)=0$。把 $f(0,0)=0$ 代入（5）式，可得

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)}{\Delta y} \qquad （6）式$$

老带着 Δy 咱们看着也别扭，干脆换个字母得了，把 Δy 换成 y 吧（当然你要看着不别扭，也可以不换）。所以有

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,0+y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)}{y} \qquad （7）式$$

好，我们现在得将 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)}{y}$ 中的 $f(0,y)$ 显化。$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，应该将 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)}{y}$ 中的 $f(0,y)$ 显化成哪段呢？

由于是 $y\to 0$，这说明 y 无限地接近于 0 但是不能等于 0，也就是说 $(0,y)\neq(0,0)$，所以我们应该将 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)}{y}$ 中的 $f(0,y)$ 显化成 $\dfrac{0^2\times y^2}{0^2+y^2}$，有

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,0+y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{0^2\times y^2}{0^2+y^2}}{y}=\lim_{y\to 0}0=0 \qquad （8）式$$

由于最终算出的极限值是常数 0，说明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处对 y 可偏导，并且

$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$。也就是说

当 $(x,y)=(0,0)$ 时，$\frac{\partial z}{\partial y}=0$。

我们再用上一节所讲的方法（也就是利用导数公式）求 z 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 处对 y 的偏导数。

换句话说，现在就是 $z=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

由于本题的问题是"$\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$"并且"$\Delta$"是单一的字母，说明本题会用到 6.5.1 节所讲的知识。那么到底是"情况 1"、"情况 2"还是"情况 3"呢？很明显是情况 1。

我们来看看情况 1 是怎么说的：

情况 1. 如果题中给的关系式是：$\Delta=$某某某（注意：某某某中不含 Δ），让求 $\frac{\partial\Delta}{\partial\square}$，那就直接套第 2 章所讲的导数公式即可。不过要注意一点：其他自变量就当成常数。

情况 1 的解题方法就是直接套公式，不过要注意其他自变量就当成常数，所以做法如下：

由于问题是 $\frac{\partial z}{\partial y}$，所以 z 为因变量 y 为自变量，因而 x 为自变量。由于本题是对自变量 y 求偏导，所以本题中的"其他自变量"就是 x，因而在 $z=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ 中，我们就把 x 当成常数。

所以当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2yx^2(x^2+y^2)-2y^3x^2}{(x^2+y^2)^2}$。

综上所述

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\begin{cases}\frac{2yx^2(x^2+y^2)-2y^3x^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

例. 设 $z=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}$、$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}$。

解： 本题与上一道题中所给的函数一样，都是 $z=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，不同点就在于问题不同。

上一道题问的是"求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$"，而本题问的是"求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}$、$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}$"。换句话说，本题只让求分段函数在分段点处的偏导数。再换句话说，本题其实属于上一道题的"一部分"。

本题的做法如下：

我们先来求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}$。

对 x 的偏导数的定义式是什么？这在 6.4 节中给大家讲过。对 x 的偏导数的定义式是

设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=$常数$A$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 可偏导，并且函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数为 A。记作 $f_x'(x_0,y_0)=A$、$\left.z_x'\right|_{(x_0,y_0)}=A$、$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=A$ 或 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=A$。

对于本题而言，需要求的是 z 在 $(0,0)$ 处对 x 的偏导数，所以我们需要算出 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$。

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}\qquad（1）式$$

由于 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，所以 $f(0,0)=0$。把 $f(0,0)=0$ 代入（1）式，可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)}{\Delta x} \qquad \text{（2）式}$$

老带着 Δx 咱们看着也别扭，干脆换个字母得了，把 Δx 换成 x 吧（当然你要看着不别扭，也可以不换）。所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x} \qquad \text{（3）式}$$

好，我们现在得将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x}$ 中的 $f(x,0)$ 显化。$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，应该将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x}$ 中的 $f(x,0)$ 显化成哪段呢？

由于是 $x\to 0$，这说明 x 无限地接近于 0 但是不能等于 0，也就是说 $(x,0)\neq(0,0)$，所以我们应该将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x}$ 中的 $f(x,0)$ 显化成 $\dfrac{x^2\times 0^2}{x^2+0^2}$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2\times 0^2}{x^2+0^2}}{x}=\lim_{x\to 0}0=0 \qquad \text{（4）式}$$

由于最终算出的极限值是常数 0，说明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处对 x 可偏导，并且 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0$。也就是说

当 $(x,y)=(0,0)$ 时，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$。

我们再来求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}$。

对 y 的偏导数的定义式是什么？这在 6.4 节中给大家讲过。对 y 的偏导数的定义式是

设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=$ 常数 A，则称函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 y 可偏导，并且函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数为 A。记作 $f_y'(x_0,y_0)=A$、$\left.z_y'\right|_{(x_0,y_0)}=A$、$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=A$ 或 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=A$。

对于本题而言，需要求的是 z 在 $(0,0)$ 处对 y 的偏导数，所以我们需要算出 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}$。

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} \qquad \text{（5）式}$$

由于 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，所以 $f(0,0)=0$。把 $f(0,0)=0$ 代入（5）式，可得

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)}{\Delta y} \qquad \text{（6）式}$$

老带着 Δy 咱们看着也别扭，干脆换个字母得了，把 Δy 换成 y 吧（当然你要看着不别扭，也可以不换）。所以有

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,0+y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)}{y} \qquad \text{（7）式}$$

好，我们现在得将 $\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)}{y}$ 中的 $f(0,y)$ 显化。$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，应该将 $\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)}{y}$ 中的 $f(0,y)$ 显化成哪段呢？

由于是 $y\to 0$，这说明 y 无限地接近于 0 但是不能等于 0，也就是说 $(0,y)\neq(0,0)$，所以我们应该将 $\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)}{y}$ 中的 $f(0,y)$ 显化成 $\frac{0^2\times y^2}{0^2+y^2}$，有

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,0+y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{0^2\times y^2}{0^2+y^2}}{y}=\lim_{y\to 0}0=0 \qquad \text{（8）式}$$

由于最终算出的极限值是常数 0，说明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处对 y 可偏导，并且 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$。也就是说

当 $(x,y)=(0,0)$ 时，$\frac{\partial z}{\partial y}=0$。

本题就做完了。我把本题写在这里，是为了提醒大家注意审题，看看到底题目问的是分段函数的偏导数，还是只问在分段点处的偏导数。

例. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处。

（A）连续，偏导数存在。
（B）连续，偏导数不存在。
（C）不连续，偏导数存在。
（D）不连续，偏导数不存在。

解： 在正式做这道题之前，先和大家说两个知识点。

知识点一：只有二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x、对 y 的偏导数均存在，才叫二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数存在。

知识点二：在讲一元函数的时候，曾经告诉过大家，连续是可导的前提，也就是说可导必连续，不连续一定不可导，但那是对于一元函数来说的。那么对于二元函数来说呢？大家记住，二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续与否与可偏导、不可偏导没有任何关系。

好，现在我们正式开始做这道题。

首先来判断一下函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处是否可偏导，也就是判断一下函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处是否对 x、对 y 均可偏导。

我们先来判断一下函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处对 x 是否可偏导。

由于点 $(0,0)$ 是函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 的分段点，我们应该用本节所讲的方法来判断，即利用偏导数的定义式。

对 x 的偏导数的定义式是什么？这在 6.4 节中给大家讲过。对 x 的偏导数的定义式是

设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=$ 常数 A，则称函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 可偏导，并且函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数为 A。记作 $f_x'(x_0,y_0)=A$、$z_x'\big|_{(x_0,y_0)}=A$、$\dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)}=A$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)}=A$。

对于本题而言，需要求的是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处对 x 的偏导数，所以我们需要算 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$。

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} \qquad \text{（1）式}$$

由于 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，所以 $f(0,0)=0$。把 $f(0,0)=0$ 代入（1）式，可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)}{\Delta x} \qquad \text{（2）式}$$

老带着 Δx 咱们看着也别扭，干脆换个字母得了，把 Δx 换成 x 吧（当然你要看着不别扭，也可以不换）。所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x} \qquad \text{（3）式}$$

好，我们现在得将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x}$ 中的 $f(x,0)$ 显化。$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，应该将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x}$ 中的 $f(x,0)$ 显化成哪段呢？

由于是 $x\to 0$，这说明 x 无限地接近于 0 但是不能等于 0，也就是说 $(x,0)\neq(0,0)$，所以我们应该将 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x}$ 中的 $f(x,0)$ 显化成 $\dfrac{x\times 0}{x^2+0^2}$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x\times 0}{x^2+0^2}}{x}=\lim_{x\to 0}0=0 \qquad \text{（4）式}$$

由于最终算出的极限值是常数，说明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处对 x 可偏导，并且 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(0,0)}=0$。

我们再来判断一下函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处对 y 是否可偏导。

由于点 $(0,0)$ 是函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 的分段点，所以我们应该用本节所讲的方法来判断，即利用偏导数的定义式。

对 y 的偏导数的定义式是什么？这在 6.4 节中给大家讲过。对 y 的偏导数的定义式是

设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=$ 常数 A，则称函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 y 可偏导，并且函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数为 A。记作 $f_y'(x_0,y_0)=A$、$z_y'\big|_{(x_0,y_0)}=A$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)}=A$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)}=A$。

对于本题而言，需要求的是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处对 y 的偏导数，所以我们需要算出 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}$。

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} \qquad \text{（5）式}$$

由于 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，所以 $f(0,0)=0$。把 $f(0,0)=0$ 代入（5）式，可得

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)}{\Delta y}\qquad（6）式$$

老带着 Δy 咱们看着也别扭，干脆换个字母得了，把 Δy 换成 y 吧（当然你要看着不别扭，也可以不换）。所以有

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,0+y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)}{y}\qquad（7）式$$

好，我们现在得将 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)}{y}$ 中的 $f(0,y)$ 显化。$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，应该将 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)}{y}$ 中的 $f(0,y)$ 显化成哪段呢？

由于是 $y\to 0$，这说明 y 无限地接近于 0 但是不能等于 0，也就是说 $(0,y)\neq(0,0)$，所以我们应该将 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)}{y}$ 中的 $f(0,y)$ 显化成 $\dfrac{0\times y}{0^2+y^2}$，有

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,0+y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{0\times y}{0^2+y^2}}{y}=\lim_{y\to 0}0=0\qquad（8）式$$

由于最终算出的极限值是常数，说明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处对 y 可偏导，并且 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$。

综上所述，由于函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处对 x、对 y 的偏导数均存在，所以函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数存在。

我们应该从（A）选项和（C）选项中进行选择。

再来判断一下函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处是否连续，也就是判断一下极限值 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 与函数值 $f(0,0)$ 这两者是否相等。

我们先来求一下函数值 $f(0,0)$。

由于 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，所以 $f(0,0)=0$。

再来求一下极限值 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$。

二元函数的极限的计算方法在 6.2 节中给大家讲过，一共三个步骤。

第一步. 初步判断极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在。怎么判断呢？具体来说：令 $y=kx$（k 为任意常数），然后把 $y=kx$ 代入二元函数 $f(x,y)$，这样一来，二元函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 就会变成一元函数的极限。然后我们用第 1 章所讲的计算极限的方法来算一下该一元函数的极限。如果算完发现是 ∞ 或者答案中含有 k，就说明二元函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在（因为极限如果存在就肯定唯一，而 k 虽然是常数，但它是任意常数，是可以变的），第

二步和第三步也就不用再进行了。如果算完发现是一个确定的常数呢？那此时也不能说明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 就一定存在，还要进行第二步，进一步判断极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 是否存在。

对于本题来说，我们现在先要将 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 中的 $f(x,y)$ 显化。

题中告诉我们 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，那我们应该将 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 中的 $f(x,y)$ 显化为 0，还是显化为 $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 呢？我来告诉大家，既然是“$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$”，指的就是 (x,y) 永远只是趋于 $(0,0)$，而不能等于 $(0,0)$。既然如此，我们肯定是将 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 中的 $f(x,y)$ 显化为 $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$。即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

然后令 $y=kx$，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 就变为了 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}$。

好，接下来我们就用第 1 章所讲的函数极限的计算方法来计算一下极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}$。

$$\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2} \qquad \text{（9）式}$$

（9）式的等式右侧可以化简为

$$\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\lim_{x\to0}\frac{k}{1+k^2} \qquad \text{（10）式}$$

（9）式、（10）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{k}{1+k^2} \qquad \text{（11）式}$$

我们知道 $\dfrac{k}{1+k^2}$ 是常数，也知道无论 x 趋于多少，常数的极限永远等于它本身，所以有

$$\lim_{x\to0}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2} \qquad \text{（12）式}$$

（11）式、（12）式相结合，得

$$\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2} \qquad \text{（13）式}$$

好，最终结果算完了，发现最终结果里面含有 k，说明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在，第二步和第三步也就不用再进行了。

既然极限值 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在，那它还可能等于函数值 $f(0,0)$ 吗？显然不可能。所以函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处不连续。

综上所述，本题应该选择（C）选项。

6.7　抽象函数求偏导

之前给大家讲的无论是非分段函数求偏导，还是分段函数求偏导，归根结底都属于具体函数求偏导。而在考研数学中，抽象函数求偏导也是常考的一种题型，本节就要告诉大家抽象函数求偏导的方法。

在给大家讲抽象函数求偏导的方法之前，我们先来看几个例子。

例. 设 $z=f(u,v,x)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(y)$，求 z 关于 x 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 以及 z 关于 y 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

例. 设 $z=f(u,v,x)$，$u=3x+2y$，$v=4y$，求 z 关于 x 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 以及 z 关于 y 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

例. 设 $z=f(u,v,x)$，$u=3x+2y$，$v=3x$，求 z 关于 x 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 以及 z 关于 y 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

例. 设 $z=f(u,v)$，$u=3x+2y$，$v=3x$，求 z 关于 x 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 以及 z 关于 y 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

例. 设 $z=f(u,v,x,y)$，$u=3x+2y$，$v=3x$，求 z 关于 x 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 以及 z 关于 y 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

以上这几道题都属于"抽象函数求偏导"的题。我现在给大家总结一下：

如果一道题给的是 $z=f(\cdots)$，也就是说" $z=$ "的后面明显写着函数法则" f "这个英文字母，让求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，或既让求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 又让求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，则该题就属于"抽象函数求偏导"的题。

接下来正式给大家讲解抽象函数求偏导的解题方法。

情况 1：某道抽象函数求偏导的题给的是 $z=f(u_1,u_2\cdots,u_n)$，其中 u_1，u_2，…，u_n 这 n 个变量中的每一个都是既与 x 有关又与 y 有关，并且" f "后面的括号里没有出现 x 或 y。

情况 1 的解题方法：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\times\frac{\partial u_1}{\partial x}+f_2'\times\frac{\partial u_2}{\partial x}+\cdots+f_n'\times\frac{\partial u_n}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\times\frac{\partial u_1}{\partial y}+f_2'\times\frac{\partial u_2}{\partial y}+\cdots+f_n'\times\frac{\partial u_n}{\partial y}$$

我们来看相应的例题。

例. 设 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，求 z 关于 x 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 以及 z 关于 y 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解：我们先来看看本题属不属于"抽象函数求偏导"的题。

对于本题而言，由于" $z=$ "的后面明显写着函数法则" f "这个英文字母，并且让求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，所以本题属于"抽象函数求偏导"的题。

再来看看本题属不属于"情况 1"。

对于本题而言，$z=f(u,v)$。

" $u=\varphi(x,y)$ "的意思是" u 是关于 x、y 的函数"，也就是说 u 既与 x 有关又与 y 有关。" $v=\psi(x,y)$ "的意思是" v 是关于 x、y 的函数"，也就是说 v 既与 x 有关又与 y 有关。综上所述，u、v 这两个变量都是既与 x 有关又与 y 有关。

现在再来看" f "后面的括号里有没有出现 x 或 y，显然没有，" f "后面的括号里只出现了 u、v。

所以本题属于"情况 1"，应该按照"情况 1"的解题方法来做。即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\times\frac{\partial u}{\partial x}+f_2'\times\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\times\frac{\partial u}{\partial y}+f_2'\times\frac{\partial v}{\partial y}$$

本题就做完了。

每当讲到这里的时候，都会有很多同学不解，他们会问两个问题。

第一个问题是：这真的就是最后的答案吗？题中没有给"1"、"2"啊？怎么角标有"1"、"2"？

第二个问题是：$\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$\dfrac{\partial v}{\partial x}$、$\dfrac{\partial u}{\partial y}$、$\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 不用具体算出来吗？

我先来回答第一个问题：的确，题中没有给"1"、"2"，但是你就要这么写，这是微积分学约定俗成的，老师都看得懂。

我再来回答第二个问题：你们看看，题中只给出 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，又没有给具体的表达式，当然不用

算出来了。

综上所述

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\times\dfrac{\partial u}{\partial x}+f_2'\times\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_1'\times\dfrac{\partial u}{\partial y}+f_2'\times\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 就是本题最终的答案。

例. 设 $z=f(u,v)$，$u=3x+2y$，$v=4\sin x-y$，求 z 关于 x 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 以及 z 关于 y 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解： 我们先来看看本题属不属于“抽象函数求偏导”的题。

对于本题而言，由于“$z=$”的后面明显写着函数法则“f”这个英文字母，并且让求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，所以本题属于“抽象函数求偏导”的题。

再来看看本题属不属于“情况 1”。

对于本题而言，$z=f(u,v)$。

“$u=3x+2y$”，也就是说 u 既与 x 有关又与 y 有关。“$v=4\sin x-y$”，也就是说 v 既与 x 有关又与 y 有关。综上所述，u、v 这两个变量都是既与 x 有关又与 y 有关。

现在再来看“f”后面的括号里有没有出现 x 或 y，显然没有，“f”后面的括号里只出现了 u、v。

所以本题属于“情况 1”，应该按照“情况 1”的解题方法来做。即

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\times\dfrac{\partial u}{\partial x}+f_2'\times\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_1'\times\dfrac{\partial u}{\partial y}+f_2'\times\dfrac{\partial v}{\partial y}$

不过做到这里本题还没有完全做完，这是因为本题给出了 $u=3x+2y$，$v=4\sin x-y$，所以我们可以把 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$\dfrac{\partial v}{\partial x}$、$\dfrac{\partial u}{\partial y}$、$\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 这四者具体地求出来。

由于 $u=3x+2y$，所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=2$。

由于 $v=4\sin x-y$，所以 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=4\cos x$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-1$。

因而

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3f_1'+4\cos xf_2'$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2f_1'-f_2'$

例. 设 $z=f(6x+y,v)$，$v=4\sin x-y$，求 z 关于 x 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 以及 z 关于 y 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解： 我们先来看看本题属不属于“抽象函数求偏导”的题。

对于本题而言，由于“$z=$”的后面明显写着函数法则“f”这个英文字母，并且让求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，所以本题属于“抽象函数求偏导”的题。

现在我要给大家讲一个非常重要的知识点，那就是：当确定了某道题属于“抽象函数求偏导”的题之后，一定首先要关注一下“f”后面的括号里的几项。具体来说，如果“f”后面括号里的几项不是以单个字母的形式出现的，我们就要立刻将其设为一个字母。

对于本题而言，“f”后面的括号里一共有两项，一项是 $6x+y$，另一项是 v，很明显 $6x+y$ 不是单个字母，所以我们设 $u=6x+y$，则 $z=f(6x+y,v)$ 变为了 $z=f(u,v)$。

我再举几个例子，比如 $z=f(\sin x,v)$，由于 $\sin x$ 不是单个字母，所以我们应该设 $u=\sin x$。再比如说 $z=f(3x+7y+4,\sin y+x)$，由于 $3x+7y+4$、$\sin y+x$ 均不是单个字母，所以我们应该设 $u=3x+7y+4$，$v=\sin y+x$。

好，言归正传。

我们再来看看本题属不属于“情况 1”。

对于本题而言，$z=f(u,v)$。

由于“$u=6x+y$”，也就是说u既与x有关又与y有关。由于“$v=4\sin x-y$”，也就是说v既与x有关又与y有关。综上所述，u、v这两个变量都是既与x有关又与y有关。

现在再来看“f”后面的括号里有没有出现x或y，显然没有，“f”后面的括号里只出现了u、v（我们已经设过了，按设过的看）。

所以本题属于“情况 1”，应该按照“情况 1”的解题方法来做。即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\times\frac{\partial u}{\partial x}+f_2'\times\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\times\frac{\partial u}{\partial y}+f_2'\times\frac{\partial v}{\partial y}$$

不过做到这里本题还没有完全做完，这是因为$u=6x+y$，$v=4\sin x-y$，我们可以把$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial v}{\partial y}$这四者具体地求出来。

由于$u=6x+y$，所以$\frac{\partial u}{\partial x}=6$，$\frac{\partial u}{\partial y}=1$。

由于$v=4\sin x-y$，所以$\frac{\partial v}{\partial x}=4\cos x$，$\frac{\partial v}{\partial y}=-1$。

因而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6f_1'+4\cos xf_2'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'-f_2'$$

例. 设$z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，求z关于x的二阶偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解：我之前给大家讲过，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$的意思是$\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x}$，所以我们要想求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，就一定要先求$\frac{\partial z}{\partial x}$。

那好，我们就先来求$\frac{\partial z}{\partial x}$。

我们先来看看这属不属于“抽象函数求偏导”的题。

对于本题而言，由于“$z=$”的后面明显写着函数法则“f”这个英文字母，并且让求$\frac{\partial z}{\partial x}$，所以本题属于“抽象函数求偏导”的题。

再来看看本题属不属于“情况 1”。

对于本题而言，$z=f(u,v)$。

“$u=\varphi(x,y)$”的意思是“u是关于x、y的函数”，也就是说u既与x有关又与y有关。“$v=\psi(x,y)$”的意思是“v是关于x、y的函数”，也就是说v既与x有关又与y有关。综上所述，u、v这两个变量都是既与x有关又与y有关。

现在再来看“f”后面的括号里有没有出现x或y，显然没有，“f”后面的括号里只出现了u、v。

所以本题属于“情况 1”，应该按照“情况 1”的解题方法来做。即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\times\frac{\partial u}{\partial x}+f_2'\times\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\frac{\partial z}{\partial x}$我们已经求完了，现在来求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$（也就是$\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x}$）。

这属于抽象函数求二阶偏导，比较麻烦，涉及一些之前没讲过的新知识点，请大家仔细看。

由于$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\times\frac{\partial u}{\partial x}+f_2'\times\frac{\partial v}{\partial x}$，所以

$$\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x}=(f_1'\text{对}x\text{求导}\times\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\text{对}x\text{求导}\times f_1')+(f_2'\text{对}x\text{求导}\times\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\text{对}x\text{求导}\times f_2')\qquad\text{（1）式}$$

也就是说，我们现在要求出“f_1'对x求导、$\frac{\partial u}{\partial x}$对$x$求导、$f_2'$对$x$求导、$\frac{\partial v}{\partial x}$对$x$求导”。

先来求两个简单的，也就是“$\frac{\partial u}{\partial x}$对$x$求导”和“$\frac{\partial v}{\partial x}$对$x$求导”。

$$\frac{\partial u}{\partial x}\text{对}x\text{求导}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\text{对}x\text{求导}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

现在再求两个复杂的，也就是“f_1'对x求导”和“f_2'对x求导”。

先来给大家讲一个知识点：如果 $z=f(u,v)$，那么 f_1' 和 f_2' 这两个函数仍然都是关于 u、v 的函数。即我们可以设为 $f_1'=f_1'(u,v)$，$f_2'=f_2'(u,v)$。

好，现在我们来算“f_1'对x求导”。

这很显然是属于“抽象函数求偏导”的题，并且是情况 1，所以我们应该用本节所讲的解题方法来做。即

$$f_1'\text{对}x\text{求导}=f_{11}''\frac{\partial u}{\partial x}+f_{12}''\frac{\partial v}{\partial x}$$

下面来算“f_2'对x求导”。

这很显然是属于“抽象函数求偏导”的题，并且是情况 1，所以我们应该用本节所讲的解题方法来做。即

$$f_2'\text{对}x\text{求导}=f_{21}''\frac{\partial u}{\partial x}+f_{22}''\frac{\partial v}{\partial x}$$

好，现在“f_1'对x求导、$\frac{\partial u}{\partial x}$对$x$求导、$f_2'$对$x$求导、$\frac{\partial v}{\partial x}$对$x$求导”这四者我们已经都算完了，把计算结果代入（1）式中就是最后的答案。

情况 2：某道抽象函数求偏导的题给的是 $z=f(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，其中 u_1，u_2，…，u_n 这 n 个变量中有的是既与 x 有关又与 y 有关，有的是只与 x 或者只与 y 有关，并且“f”后面的括号里没有出现 x 或 y。

情况 2 的解题方法：假设 u_1，u_2，…，u_n 这 n 个变量中 u_i 只与 x 有关，u_j 只与 y 有关，剩下的都是既与 x 有关又与 y 有关，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\times\frac{\partial u_1}{\partial x}+f_2'\times\frac{\partial u_2}{\partial x}+\cdots+f_i'\times\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}x}+\cdots+\underbrace{\boxed{\cancel{f_j'\times\frac{\partial u_j}{\partial x}}}}_{\text{注意没有这一项}}+\cdots+f_n'\times\frac{\partial u_n}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\times\frac{\partial u_1}{\partial y}+f_2'\times\frac{\partial u_2}{\partial y}+\cdots+\underbrace{\boxed{\cancel{f_i'\times\frac{\partial u_i}{\partial y}}}}_{\text{注意没有这一项}}+\cdots+f_j'\times\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}y}+\cdots+f_n'\times\frac{\partial u_n}{\partial y}$$

我们来看相应的例题。

例. 设 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(y)$，求 z 关于 x 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 以及 z 关于 y 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

解：我们先来看看本题属不属于“抽象函数求偏导”的题。

对于本题而言，由于“$z=$”的后面明显写着函数法则“f”这个英文字母，并且让求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$，所以本题属于“抽象函数求偏导”的题。

再来看看本题属不属于“情况 2”。

对于本题而言，$z=f(u,v)$。

“$u=\varphi(x,y)$”的意思是“u 是关于 x、y 的函数”，也就是说 u 既与 x 有关又与 y 有关。“$v=\psi(y)$”的意思是“v 是关于 y 的函数”，也就是说 v 只与 y 有关。

现在再来看“f”后面的括号里有没有出现 x 或 y，显然没有，“f”后面的括号里只出现了 u、v。

所以本题属于“情况 2”，应该按照“情况 2”的解题方法来做。即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\times\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\times\frac{\partial u}{\partial y}+f_2'\times\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

例. 设 $z=f(u,v)$，$u=3x+2y$，$v=4y$，求 z 关于 x 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 以及 z 关于 y 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

解： 我们先来看看本题属不属于“抽象函数求偏导”的题。

对于本题而言，由于“$z=$”的后面明显写着函数法则“f”这个英文字母，并且让求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$，所以本题属于“抽象函数求偏导”的题。

再来看看本题属不属于“情况 2”。

对于本题而言，$z=f(u,v)$。

“$u=3x+2y$”，也就是说 u 既与 x 有关又与 y 有关。“$v=4y$”，也就是说 v 只与 y 有关。

现在再来看“f”后面的括号里有没有出现 x 或 y，显然没有，“f”后面的括号里只出现了 u、v。

所以本题属于“情况 2”，应该按照“情况 2”的解题方法来做。即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\times\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\times\frac{\partial u}{\partial y}+f_2'\times\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

不过做到这里本题还没有完全做完，这是因为本题给出了 $u=3x+2y$，$v=4y$，所以我们可以把 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$ 这三者具体地求出来。

由于 $u=3x+2y$，所以 $\frac{\partial u}{\partial x}=3$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2$。

由于 $v=4y$，所以 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=4$。

因而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3f_1'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2f_1'+4f_2'$$

例. 设 $z=f(u,v,w)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(y)$，$w=g(x)$，求 z 关于 x 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 以及 z 关于 y 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

解： 我们先来看看本题属不属于“抽象函数求偏导”的题。

对于本题而言，由于“$z=$”的后面明显写着函数法则“f”这个英文字母，并且让求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$，所以本题属于“抽象函数求偏导”的题。

再来看看本题属不属于“情况 2”。

对于本题而言，$z=f(u,v,w)$。

“$u=\varphi(x,y)$”的意思是“u 是关于 x、y 的函数”，也就是说 u 既与 x 有关又与 y 有关。“$v=\psi(y)$”的意思是“v 是关于 y 的函数”，也就是说 v 只与 y 有关。“$w=g(x)$”的意思是“w 是关于 x 的函数”，也就是说 w 只与 x 有关。

现在再来看“f”后面的括号里有没有出现 x 或 y，显然没有，“f”后面的括号里只出现了 u、v、w。

所以本题属于“情况 2”，应该按照“情况 2”的解题方法来做。即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\times\frac{\partial u}{\partial x}+f_3'\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\times\frac{\partial u}{\partial y}+f_2'\times\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

情况 3：某道抽象函数求偏导的题给的是 $z=f(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，“f”后面的括号里出现了 x 或 y，并且除了出现的 x、y 之外，剩下变量中的每一个都是既与 x 有关又与 y 有关。

情况 3 的解题方法：假设 u_1，u_2，…，u_n 这 n 个变量中 u_i 是 x，u_j 是 y，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\times\frac{\partial u_1}{\partial x}+f_2'\times\frac{\partial u_2}{\partial x}+\cdots+f_i'+\cdots+\underbrace{\boxed{\cancel{f_j'\times\frac{\partial u_j}{\partial x}}}}_{\text{注意没有这一项}}+\cdots+f_n'\times\frac{\partial u_n}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\times\frac{\partial u_1}{\partial y}+f_2'\times\frac{\partial u_2}{\partial y}+\cdots+\underbrace{\boxed{\cancel{f_i'\times\frac{\partial u_i}{\partial y}}}}_{\text{注意没有这一项}}+\cdots+f_j'+\cdots+f_n'\times\frac{\partial u_n}{\partial y}$$

我们来看相应的例题。

例. 设 $z=f(u,v,x)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，求 z 关于 x 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 以及 z 关于 y 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解： 我们先来看看本题属不属于“抽象函数求偏导”的题。

对于本题而言，由于“$z=$”的后面明显写着函数法则“f”这个英文字母，并且让求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，所以本题属于“抽象函数求偏导”的题。

再来看看本题属不属于“情况 3”。

对于本题而言，$z=f(u,v,x)$。

我们先来看“f”后面的括号里有没有出现 x 或 y，“f”后面的括号里出现了 u、v、x，x 在其中。

再来看“f”后面的括号里除了 x 之外剩下的变量（也就是 u 和 v），看看它们是否都既与 x 有关又与 y 有关。“$u=\varphi(x,y)$”的意思是“u 是关于 x、y 的函数”，也就是说 u 既与 x 有关又与 y 有关。“$v=\psi(x,y)$”的意思是“v 是关于 x、y 的函数”，也就是说 v 既与 x 有关又与 y 有关。

所以本题属于“情况 3”，应该按照“情况 3”的解题方法来做。即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\times\frac{\partial u}{\partial x}+f_2'\times\frac{\partial v}{\partial x}+f_3'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\times\frac{\partial u}{\partial y}+f_2'\times\frac{\partial v}{\partial y}$$

例. 设 $z=f(u,v,x)$，$u=3x+2y$，$v=4y+9x$，求 z 关于 x 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 以及 z 关于 y 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解： 我们先来看看本题属不属于“抽象函数求偏导”的题。

对于本题而言，由于“$z=$”的后面明显写着函数法则“f”这个英文字母，并且让求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，所以本题属于“抽象函数求偏导”的题。

再来看看本题属不属于“情况 3”。

对于本题而言，$z=f(u,v,x)$。

我们先来看“f”后面的括号里有没有出现 x 或 y，“f”后面的括号里出现了 u、v、x，x 在其中。

再来看“f”后面的括号里除了 x 之外剩下的变量（也就是 u 和 v），看看它们是否都既与 x 有关又与 y 有关。“$u=3x+2y$”说明 u 既与 x 有关又与 y 有关。“$v=4y+9x$”说明 v 既与 x 有关又与 y 有关。

所以本题属于“情况 3”，应该按照“情况 3”的解题方法来做。即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\times\frac{\partial u}{\partial x}+f_2'\times\frac{\partial v}{\partial x}+f_3'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\times\frac{\partial u}{\partial y}+f_2'\times\frac{\partial v}{\partial y}$$

不过做到这里本题还没有完全做完，这是因为本题给出了 $u=3x+2y$，$v=4y+9x$，所以我们可以把 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$\dfrac{\partial v}{\partial x}$、

$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial v}{\partial y}$这四者具体地求出来。

由于$u=3x+2y$，所以$\frac{\partial u}{\partial x}=3$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2$。

由于$v=4y+9x$，所以$\frac{\partial v}{\partial x}=9$，$\frac{\partial v}{\partial y}=4$。

因而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3f_1'+9f_2'+f_3'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2f_1'+4f_2'$$

例. 设$z=f(u,v,x,y)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，求z关于x的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$以及$z$关于$y$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解：我们先来看看本题属不属于“抽象函数求偏导”的题。

对于本题而言，由于“$z=$”的后面明显写着函数法则“f”这个英文字母，并且让求$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$，所以本题属于“抽象函数求偏导”的题。

再来看看本题属不属于“情况 3”。

对于本题而言，$z=f(u,v,x,y)$。

我们先来看“f”后面的括号里有没有出现x或y，“f”后面的括号里出现了u、v、x、y，x和y都在其中。

再来看“f”后面的括号里除了x和y之外剩下的变量（也就是u和v），看看它们是否都既与x有关又与y有关。“$u=\varphi(x,y)$”的意思是“u是关于x、y的函数”，也就是说u既与x有关又与y有关。“$v=\psi(x,y)$”的意思是“v是关于x、y的函数”，也就是说v既与x有关又与y有关。

所以本题属于“情况 3”，应该按照“情况 3”的解题方法来做。即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\times\frac{\partial u}{\partial x}+f_2'\times\frac{\partial v}{\partial x}+f_3'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\times\frac{\partial u}{\partial y}+f_2'\times\frac{\partial v}{\partial y}+f_4'$$

下面讲情况 4，情况 4 其实就是情况 2 和情况 3 的结合。

情况 4：某道抽象函数求偏导的题给的是$z=f(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，“f”后面的括号里出现了x或y，并且除了出现的x、y之外，剩下变量中有的是既与x有关又与y有关，有的是只与x或者只与y有关。

情况 4 的解题方法：假设u_1，u_2，…，u_n这n个变量中u_i是x，u_j是y，u_k只与x有关，u_l只与y有关，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\times\frac{\partial u_1}{\partial x}+f_2'\times\frac{\partial u_2}{\partial x}+\cdots+f_i'+\cdots+f_k'\times\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}x}+\cdots\underbrace{\boxed{\cancel{f_j'\times\frac{\partial u_j}{\partial x}}}}_{\text{注意没有这一项}}+\cdots+\underbrace{\boxed{\cancel{f_l'\times\frac{\partial u_l}{dx}}}}_{\text{注意没有这一项}}+\cdots+f_n'\times\frac{\partial u_n}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\times\frac{\partial u_1}{\partial y}+f_2'\times\frac{\partial u_2}{\partial y}+\cdots+f_j'+\cdots+f_l'\times\frac{\mathrm{d}u_l}{\mathrm{d}y}+\cdots\underbrace{\boxed{\cancel{f_i'\times\frac{\partial u_i}{\partial y}}}}_{\text{注意没有这一项}}+\cdots+\underbrace{\boxed{\cancel{f_k'\times\frac{\partial u_k}{dy}}}}_{\text{注意没有这一项}}+\cdots+f_n'\times\frac{\partial u_n}{\partial y}$$

例. 设$z=f(a,b,c,x,y)$，$a=\varphi(x,y)$，$b=\psi(x)$，$c=g(y)$，求z关于x的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$以及$z$关于$y$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解：我们先来看看本题属不属于“抽象函数求偏导”的题。

对于本题而言，由于“$z=$”的后面明显写着函数法则“f”这个英文字母，并且让求$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$，所以本题属于“抽象函数求偏导”的题。

再来看看本题属不属于“情况 4”。

对于本题而言，$z=f(a,b,c,x,y)$。

我们先来看“f”后面的括号里有没有出现 x 或 y，“f”后面的括号里出现了 a、b、c、x、y，x 和 y 在其中。

再来看“f”后面的括号里除了 x、y 之外剩下的变量（也就是 a、b、c）。“$a=\varphi(x,y)$”的意思是“a 是关于 x、y 的函数”，也就是说 a 既与 x 有关又与 y 有关。“$b=\psi(x)$”的意思是“b 是关于 x 的函数”，也就是说 b 只与 x 有关。“$c=g(y)$”的意思是“c 是关于 y 的函数”，也就是说 c 只与 y 有关。

所以本题属于“情况 4”，应该按照“情况 4”的解题方法来做。即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\times\frac{\partial a}{\partial x}+f_2'\times\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+f_4'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\times\frac{\partial a}{\partial y}+f_3'\times\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}+f_5'$$

6.8 二元函数的极值、最值、条件极值

本节分为三个小节，第一小节给大家讲二元函数的极值，第二小节给大家讲二元函数的最值，第三小节给大家讲条件极值。

6.8.1 二元函数的极值

正如同一元函数可以求极值一样，二元函数也可以求极值。那么求二元函数的极值的方法是什么呢？马上就给大家讲。

二元函数的极值的求解方法。

当给定二元函数 $z=f(x,y)$ 时，我们采用如下方法来求它的极值：

第一步. 求出二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域。

第二步. 求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

第三步. 求三种点。第一种点是使 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 成立的点，第二种点是 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 没有定义的点，第三种点是 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 没有定义的点。

第四步. 求出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

第五步. 对于第三步求出的每一个点 (x_0,y_0)，计算 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}$、$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$、$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}$。记 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}=A$，$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=B$，$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}=C$。

若 $AC-B^2>0$，说明点 (x_0,y_0) 是极值点，并且有：当 $A>0$ 时点 (x_0,y_0) 是极小值点，当 $A<0$ 时点 (x_0,y_0) 是极大值点。

若 $AC-B^2<0$，说明点 (x_0,y_0) 不是极值点。

若 $AC-B^2=0$，说明点 (x_0,y_0) 有可能是极值点也有可能不是极值点，还需另做讨论（考研数学一般不会涉及这样的题）。

第六步. 对第五步找出的每个极值点计算各自的极值就可以了。

例. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值。

解： 由于本题属于求二元函数的极值的题，所以我们应该用本节所讲的方法来求解。

第一步. 求出二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域。

对于本题而言，很明显定义域是“$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$”。

第二步．求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ **和** $\frac{\partial z}{\partial y}$ **。**

对于本题而言，用 6.5.1 节所讲的方法去求就可以了。

由于 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+6x-9$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-3y^2+6y$$

第三步．求三种点。第一种点是使 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ **成立的点，第二种点是** $\frac{\partial z}{\partial x}$ **没有定义的点，第三种点是** $\frac{\partial z}{\partial y}$ **没有定义的点。**

先求第一种点。

令 $\begin{cases}3x^2+6x-9=0\\ -3y^2+6y=0\end{cases}$，一共解出四个点，分别是 $(1,0)$，$(1,2)$，$(-3,0)$，$(-3,2)$。

再求第二种点。

由于 $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+6x-9$，所以在定义域“$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$”上 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 处处有定义，第二种点没有。

再求第三种点。

由于 $\frac{\partial z}{\partial y}=-3y^2+6y$，所以在定义域“$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$”上 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 处处有定义，第三种点没有。

综上所述，第三步一共求出了四个点，分别是 $(1,0)$，$(1,2)$，$(-3,0)$，$(-3,2)$。

第四步．求出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ **。**

由于 $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+6x-9$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-3y^2+6y$，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x}=\frac{d(3x^2+6x-9)}{dx}=6x+6$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y}=\frac{d(3x^2+6x-9)}{dy}=0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial y}=\frac{d(-3y^2+6y)}{dy}=-6y+6$$

第五步．对于第三步求出的每一个点 (x_0,y_0) **，计算** $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}$ **、** $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ **、** $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}$ **。记** $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}=A$ **，** $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=B$ **，** $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}=C$ **。**

若 $AC-B^2>0$，说明点 (x_0,y_0) 是极值点。并且有：当 $A>0$ 时点 (x_0,y_0) 是极小值点，当 $A<0$ 时点 (x_0,y_0) 是极大值点。

若 $AC-B^2<0$，说明点 (x_0,y_0) 不是极值点。

若 $AC-B^2=0$，说明点 (x_0,y_0) 有可能是极值点也有可能不是极值点，还需另做讨论（考研数学一般不会涉及这样的题）。

先来验证点 $(1,0)$。由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x+6$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y + 6$$

所以

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,0)} = 6 + 6 = 12，即 A = 12。$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1,0)} = 0，即 B = 0。$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(1,0)} = -6 \times 0 + 6 = 6，即 C = 6。$$

由于 $AC - B^2 = 72 > 0$，说明点 $(1,0)$ 是极值点。又因为 $A = 12 > 0$，所以点 $(1,0)$ 是极小值点。

再来验证点 $(1,2)$。由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 6$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y + 6$$

所以

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,2)} = 6 + 6 = 12，即 A = 12。$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1,2)} = 0，即 B = 0。$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(1,2)} = -6 \times 2 + 6 = -6，即 C = -6。$$

由于 $AC - B^2 = -72 < 0$，说明点 $(1,2)$ 不是极值点。

再来验证点 $(-3,0)$。由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 6$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y + 6$$

所以

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-3,0)} = 6 \times (-3) + 6 = -12，即 A = -12。$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(-3,0)} = 0，即 B = 0。$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-3,0)} = -6 \times 0 + 6 = 6，即 C = 6。$$

由于 $AC - B^2 = -72 < 0$，说明点 $(-3,0)$ 不是极值点。

最后来验证点 $(-3,2)$。由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 6$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y + 6$

所以

$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-3,2)} = 6 \times (-3) + 6 = -12$，即 $A = -12$。

$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(-3,2)} = 0$，即 $B = 0$。

$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-3,2)} = -6 \times 2 + 6 = -6$，即 $C = -6$。

由于 $AC - B^2 = 72 > 0$，说明点 $(-3,2)$ 是极值点。又因为 $A = -12 < 0$，所以点 $(-3,2)$ 是极大值点。

第六步. 对第五步找出的每个极值点计算各自的极值就可以了。

对于本题而言，第五步我们一共找出了两个极值点，分别是极小值点 $(1,0)$ 和极大值点 $(-3,2)$。

现在就针对这两个极值点算一下极值。

由于本题所给的二元函数是 $f(x,y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，所以极小值点 $(1,0)$ 所对应的极小值为 $f(1,0) = 1 - 0 + 3 + 0 - 9 = -5$，极大值点 $(-3,2)$ 所对应的极大值为 $f(-3,2) = -27 - 8 + 27 + 12 + 27 = 31$。

6.8.2 二元函数的最值

正如同一元函数可以求最值一样，二元函数也可以求最值。那么求二元函数的最值的方法是什么呢？马上就给大家讲。

二元函数的最值的求解方法。

第一步. 画出题中所给的区域。

第二步. 按上一节所讲的方法求出二元函数 $z = f(x,y)$ 的极值，然后只取在第一步画出的区域内的极值点所对应的极值，其他极值忽略。

第三步. 将这个二元函数转化为一元函数，然后求一元函数的最值。

第四步. 用第二步取的极值与第三步算出的最值进行比较，其中最大的数即为最大值，最小的数即为最小值。

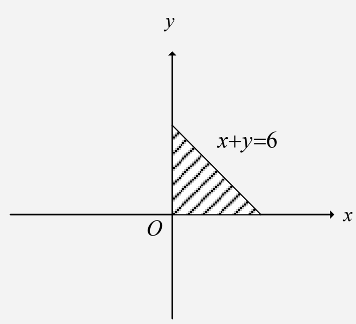
我们来看相应的例题。

例. 求函数 $z = x^2 y(4 - x - y)$ 在由直线 $x + y = 6$、x 轴和 y 轴所围成的区域上的最大值和最小值。

解： 由于本题问的是二元函数的最值，所以我们应该用本节所讲的方法来求解。

第一步. 画出题中所给的区域。

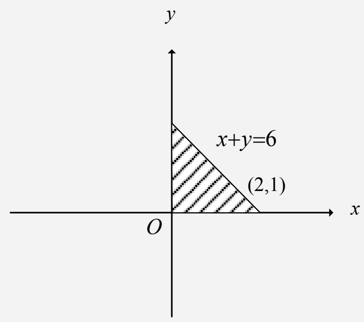
对于本题而言，本题所给的区域是“由直线 $x + y = 6$、x 轴和 y 轴所围成的区域”。好，那现在就在笛卡儿 10 坐标系上把该区域画出来。



第二步. 按上一节所讲的方法求出二元函数 $z = f(x,y)$ 的极值，然后只取在第一步画出的区域内的极值点所对应的极值，其他极值忽略。

对于本题而言，按上一节所讲的方法求出的二元函数 $z = x^2 y(4 - x - y)$ 的极值是 4，这个 4 是极值点 $(2,1)$ 所

对应的极值（计算过程省略）。我们现在看看点 (2,1) 在不在第一步画出的区域内。很明显在，看下面这个图就明白了。



第三步. 将这个二元函数转化为一元函数，然后求一元函数的最值。

本题所给的二元函数是 $z=x^2y(4-x-y)$，我们怎么将它转化成一元函数呢？大家记住，第一步我们画的图由几条线围成，现在就要把这个二元函数转化为几个一元函数。

很明显第一步我们画的图由三条线围成，这三条线分别是

$y=0$，$0\leqslant x\leqslant 6$

$x=0$，$0\leqslant y\leqslant 6$

$y=6-x$，$0\leqslant x\leqslant 6$（或 $x=6-y$，$0\leqslant x\leqslant 6$）

所以我们要将本题所给的二元函数 $z=x^2y(4-x-y)$ 转化为三个一元函数。

转化为的第一个一元函数是

$z=x^2\times 0\times(4-x-0)=0$，$0\leqslant x\leqslant 6$

我们用第 3 章讲的求一元函数最值的方法求一下一元函数 $z=0$ 在区间 $[0,6]$ 上的最值，答案：最小值为 0，最大值也为 0（其实根本不用非要用第 3 章讲的求一元函数最值的方法按部就班地求，为什么呢？因为 $z=0$ 就是一个常函数，它的最大值、最小值一看就知道都是 0）。

转化为的第二个一元函数是

$z=0^2\times y\times(4-0-y)=0$，$0\leqslant x\leqslant 6$

最值的求法同上，答案是：最小值为 0，最大值也为 0。

转化为的第三个一元函数是

$z=x^2\times(6-x)\times(-2)$，$0\leqslant x\leqslant 6$

我们用第 3 章讲的求一元函数最值的方法求一下一元函数 $z=x^2\times(6-x)\times(-2)$ 在区间 $[0,6]$ 上的最值，答案：最小值为 -64，最大值为 0。

第四步. 用第二步取的极值与第三步算出的最值进行比较，其中最大的数即为最大值，最小的数即为最小值。

第二步取的极值：4。

第三步算出的最值：0，0，0，0，-64，0。

将这七个数比较一下。4 最大，所以函数 $z=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$、x 轴和 y 轴所围成的区域上的最大值为 4；-64 最小，所以函数 $z=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$、x 轴和 y 轴所围成的区域上的最小值为 -64。

6.8.3　条件极值

我们先来看两道求条件极值的题。

例. 求函数 $u=xyz$ 在附加条件 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$ ($a>0$为常数，$x>0,y>0,z>0$) 下的极值。

例. 求函数 $u=xyz$ 在附加条件 $2xy+2yz+2xz=a^2$ (a为常数) 下的极值。

以上两道题都属于求条件极值的题，现在大家应该知道求条件极值的题是什么样了吧。好，现在我要给大家讲的是求解条件极值的题的方法。

求解条件极值的题的方法。

第一步. 把题中所给的附加条件整理为一侧为 0 的形式。

第二步. 作拉格朗日函数 $L=$题中让求极值的那个式子的等式右侧$+\lambda\times$(第一步整理完的不为 0 的那一侧)。

第三步． **L 分别对题中让求极值的那个式子的等式右侧中出现的每一个变量求偏导。**

第四步．令第三步求出的每一个偏导数为 0，再加上题中所给的条件，这些方程共同组成一个方程组。

第五步．解此方程组即可得极值点。

第六步．算出第五步求得的极值点所对应的极值就可以了。

我们来看相应的例题。

例．求函数 $u = xyz$ 在附加条件 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$ ($a>0$为常数，$x>0, y>0, z>0$) 下的极值。

解：由于本题属于让求条件极值的题，所以我们应该用本节所讲的方法来求解。

第一步．把题中所给的附加条件整理为一侧为 0 的形式。

对于本题而言，题中所给的附加条件是 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$，我们把它整理为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a}=0$ 或者把它整理为 $\frac{1}{a}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$ 都行，就整理成前者吧。

第二步．作拉格朗日函数 $L=$ 题中让求极值的那个式子的等式右侧 $+\lambda\times$（第一步整理完的不为 0 的那一侧）。

对于本题而言，由于题中让求极值的那个式子的等式右侧是 xyz，且第一步整理完的不为 0 的那一侧是 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a}$，所以拉格朗日函数为

$$L(x,y,z)=xyz+\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right)$$

第三步． **L 分别对题中让求极值的那个式子的等式右侧中出现的每一个变量求偏导。**

对于本题而言，由于题中让求极值的那个式子的等式右侧是 xyz，也就是说，让求极值的那个式子的等式右侧出现了变量 x、y、z。所以我们将 L 分别对 x、y、z 求偏导（就利用 6.5 节中所讲的公式来求就可以），即

$$\frac{\partial L}{\partial x}=yz-\frac{\lambda}{x^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=xz-\frac{\lambda}{y^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=xy-\frac{\lambda}{z^2}$$

第四步．令第三步求出的每一个偏导数为 0，再加上题中所给的附加条件，这些方程共同组成一个方程组。

对于本题而言，令第三步求出的每一个偏导数为 0，即

$$yz-\frac{\lambda}{x^2}=0$$

$$xz-\frac{\lambda}{y^2}=0$$

$$xy-\frac{\lambda}{z^2}=0$$

题中所给的附加条件是 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$，所以有方程组

$$\begin{cases} yz-\frac{\lambda}{x^2}=0 \\ xz-\frac{\lambda}{y^2}=0 \\ xy-\frac{\lambda}{z^2}=0 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a} \end{cases}$$

第五步．解此方程组即可得极值点。

对于本题而言，就是要解方程组 $\begin{cases} yz-\dfrac{\lambda}{x^2}=0 \\ xz-\dfrac{\lambda}{y^2}=0 \\ xy-\dfrac{\lambda}{z^2}=0 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a} \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=3a \\ y=3a \\ z=3a \\ \lambda=81a^4 \end{cases}$

所以点 $(3a,3a,3a)$ 为极值点。

第六步. 算出第五步求得的极值点所对应的极值就可以了。

对于本题而言，由于让算的是 $u=xyz$ 的极值，所以极值为 $3a\times 3a\times 3a=27a^3$。

例. 求函数 $u=xyz$ 在附加条件 $2xy+2yz+2xz=a^2$ (a为常数) 下的极值。

解： 由于本题属于让求条件极值的题，所以我们应该用本节所讲的方法来求解。

第一步. 把题中所给的附加条件整理为一侧为 0 的形式。

对于本题而言，题中所给的附加条件是 $2xy+2yz+2xz=a^2$，我们把它整理为 $2xy+2yz+2xz-a^2=0$ 或者把它整理为 $a^2-2xy-2yz-2xz=0$ 都行，就整理成前者吧。

第二步. 作拉格朗日函数 $L=$ 题中让求极值的那个式子的等式右侧 $+\lambda\times$ (第一步整理完的不为 0 的那一侧)。

对于本题而言，由于题中让求极值的那个式子的等式右侧是 xyz，且第一步整理完的不为 0 的那一侧是 $2xy+2yz+2xz-a^2$，所以拉格朗日函数为

$$L(x,y,z)=xyz+\lambda(2xy+2yz+2xz-a^2)$$

第三步. L 分别对题中让求极值的那个式子的等式右侧中出现的每一个变量求偏导。

对于本题而言，由于题中让求极值的那个式子的等式右侧是 xyz，也就是说，让求极值的那个式子的等式右侧出现了变量 x、y、z。所以我们将 L 分别对 x、y、z 求偏导（就利用 6.5 节中所讲的公式来求就可以），即

$$\frac{\partial L}{\partial x}=yz+2\lambda(y+z)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=xz+2\lambda(x+z)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=xy+2\lambda(y+x)$$

第四步. 令第三步求出的每一个偏导数为 0，再加上题中所给的附加条件，这些方程共同组成一个方程组。

对于本题而言，令第三步求出的每一个偏导数为 0，即

$$yz+2\lambda(y+z)=0$$

$$xz+2\lambda(x+z)=0$$

$$xy+2\lambda(y+x)=0$$

题中所给的附加条件是 $2xy+2yz+2xz=a^2$，所以有方程组

$$\begin{cases} yz+2\lambda(y+z)=0 \\ xz+2\lambda(x+z)=0 \\ xy+2\lambda(y+x)=0 \\ 2xy+2yz+2xz=a^2 \end{cases}$$

第五步. 解此方程组即可得极值点。

对于本题而言，就是要解方程组 $\begin{cases} yz+2\lambda(y+z)=0 \\ xz+2\lambda(x+z)=0 \\ xy+2\lambda(y+x)=0 \\ 2xy+2yz+2xz=a^2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{6}}{6}a \\ y=\dfrac{\sqrt{6}}{6}a \\ z=\dfrac{\sqrt{6}}{6}a \\ \lambda=-\dfrac{\sqrt{6}}{24}a \end{cases}$

所以点 $(\frac{\sqrt{6}}{6}a,\frac{\sqrt{6}}{6}a,\frac{\sqrt{6}}{6}a)$ 为极值点。

第六步. 算出第五步求得的极值点所对应的极值就可以了。

对于本题而言，由于让算的是 $u=xyz$ 的极值，所以极值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}a\times\frac{\sqrt{6}}{6}a\times\frac{\sqrt{6}}{6}a=\frac{\sqrt{6}}{36}a^3$ 。

6.9 求空间曲线的切线与法平面以及求曲面的法线与切平面

本节分为两小节，第一小节给大家讲求空间曲线的切线与法平面的方法，第二小节给大家讲求曲面的法线与切平面的方法。

6.9.1 求空间曲线的切线与法平面

求空间曲线的切线与法平面的题可以分为三类。

题型 1：空间曲线是以 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\z=w(t)\end{cases}$ 的形式给出的，求该空间曲线在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线与法平面。

题型 1 的解题方法：

第一步. 求出 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$、$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 。

第二步. $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\z=w(t)\end{cases}$ 与点 (x_0,y_0,z_0) 相结合解出 t_0 。

第三步. 求出 $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}$、$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}$、$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}$ 。

第四步. 该空间曲线在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线方程为 $\frac{x-x_0}{\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}}$ 。

第五步. 该空间曲线在点 (x_0,y_0,z_0) 处的法平面方程为

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\times(x-x_0)+\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\times(y-y_0)+\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\times(z-z_0)=0$$

我们来看相应的例题。

例. 求曲线 $x=t$， $y=t^2$， $z=t^3$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程。

解： 由于本题问的是曲线的切线及法平面方程，并且曲线的形式是以 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\z=w(t)\end{cases}$ 的形式给出的，所以本题属于题型 1，我们应该用题型 1 的解题方法来求解本题。

第一步. 求出 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$、$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 。

对于本题而言

由于 $x=t$，所以 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1$。

由于 $y=t^2$，所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2t$ 。

由于 $z=t^3$，所以 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=3t^2$ 。

第二步. $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=w(t) \end{cases}$ 与点 (x_0,y_0,z_0) 相结合解出 t_0。

对于本题而言，由于 $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$，所以 $\begin{cases} x_0=t_0 \\ y_0={t_0}^2 \\ z_0={t_0}^3 \end{cases}$。而本题所给的 (x_0,y_0,z_0) 是 $(1,1,1)$，所以有 $\begin{cases} 1=t_0 \\ 1={t_0}^2 \\ 1={t_0}^3 \end{cases}$，所以解得 $t_0=1$。

第三步. 求出 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}$、$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}$、$\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}$。

对于本题而言

由于第一步已经算出了 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1$，所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=1$。

由于第一步已经算出了 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2t$，所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=2\times1=2$。

由于第一步已经算出了 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=3t^2$，所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=3\times1^2=3$。

第四步. 该空间曲线在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}}=\dfrac{y-y_0}{\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}}=\dfrac{z-z_0}{\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}}$。

对于本题而言，所给的 (x_0,y_0,z_0) 是 $(1,1,1)$，而刚才在第三步我们也算出了 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=1$、$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=2$、$\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=3$，所以切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$。

第五步. 该空间曲线在点 (x_0,y_0,z_0) 处的法平面方程为 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\times(x-x_0)+\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\times(y-y_0)+\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\times(z-z_0)=0$。

对于本题而言，所给的 (x_0,y_0,z_0) 是 $(1,1,1)$，而刚才在第三步我们也算出了 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=1$、$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=2$、$\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=3$，所以法平面方程为

$$1\times(x-1)+2\times(y-1)+3\times(z-1)=0$$

化简得

$$x+2y+3z=6$$

题型 2： 空间曲线是以 $\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$ 的形式给出的，求该空间曲线在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线与法平面。

题型 2 的解题方法：

第一步. 求出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$。

第二步. 求出 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$、$\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$。

第三步. 该空间曲线在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}}=\dfrac{z-z_0}{\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}}$。

第四步. 该空间曲线在点 (x_0,y_0,z_0) 处的法平面方程为

$$1\times(x-x_0)+\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\times(y-y_0)+\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\times(z-z_0)=0。$$

我们来看相应的例题。

例. 求曲线 $y=x^2$，$z=x^3$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程。

解： 由于本题问的是曲线的切线及法平面方程，并且曲线的形式是以 $\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$ 的形式给出的，所以本题属于

题型 2，我们应该用题型 2 的解题方法来求解本题。

第一步. 求出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$。

对于本题而言

由于 $y=x^2$，所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$。

由于 $z=x^3$，所以 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=3x^2$。

第二步. 求出 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$、$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$。

对于本题而言，所给的 (x_0,y_0,z_0) 是 $(1,1,1)$，也就是说 $x_0=1$，所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=2\times1=2$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=3\times1^2=3$$

第三步. 该空间曲线在点 (x_0,y_0,z_0) **处的切线方程为** $\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}}$。

对于本题而言，所给的 (x_0,y_0,z_0) 是 $(1,1,1)$，而刚才在第三步我们也算出了 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$=2、$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$=3，所以切线方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$。

第四步. 该空间曲线在点 (x_0,y_0,z_0) **处的法平面方程为** $1\times(x-x_0)+\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\times(y-y_0)+\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\times(z-z_0)=0$。

对于本题而言，所给的 (x_0,y_0,z_0) 是 $(1,1,1)$，而刚才在第二步我们也算出了 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$=2、$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$=3，所以法平面方程为 $1\times(x-1)+2\times(y-1)+3\times(z-1)=0$

化简得

$x+2y+3z=6$

题型 3：空间曲线是以 $\begin{cases}f(x,y,z)=0\\g(x,y,z)=0\end{cases}$ **的形式给出的，求该空间曲线在点** (x_0,y_0,z_0) **处的切线与法平面。**

题型 3 的解题方法：

第一步. 求出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$**。怎么求呢？这不就是 2.5 节（很重要的四个知识点）中的第二个知识点嘛。我给大家复习一下吧：如果给的关系式是含两个方程的方程组** $\begin{cases}f(x,y,z)=0\\g(x,y,z)=0\end{cases}$**，让求** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$**，那就让这两个等式的等式两侧同时对** x **求导（当然，0 的那一侧求完导肯定还是 0），但是要记住，对因变量求导时后面必须要乘以** $\frac{\mathrm{d}\text{因变量}}{\mathrm{d}\text{自变量}}$**。**

第二步. 求出 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$、$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$。

第三步. 该空间曲线在点 (x_0,y_0,z_0) **处的切线方程为** $\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}}=\frac{z-z_0}{-1}$。

第四步. 该空间曲线在点 (x_0,y_0,z_0) **处的法平面方程为** $1\times(x-x_0)+\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\times(y-y_0)+\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\times(z-z_0)=0$。

我们来看相应的例题。

例. 求曲线 $x^2+y^2+z^2-6=0$，$x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程。

解：由于本题问的是曲线的切线及法平面方程，并且曲线的形式是以$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$的形式给出的，所以本题属于题型 3，我们应该用题型 3 的解题方法来求解本题。

第一步. 求出$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$。

对于本题而言，$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-6=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，所以 x 为自变量，y、z 为因变量。因而$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \\ 1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \end{cases}$，解得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{z-x}{y-z}$，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y}{y-z}$。

第二步. 求出$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$、$\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$。

对于本题而言，所给的(x_0,y_0,z_0)是$(1,-2,1)$，所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,-2,1)}=\frac{1-1}{-2-1}=0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,-2,1)}=\frac{1-(-2)}{-2-1}=-1$$

第三步. 该空间曲线在点(x_0,y_0,z_0)**处的切线方程为**$\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}}=\dfrac{z-z_0}{\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}}$。

对于本题而言，所给的(x_0,y_0,z_0)是$(1,-2,1)$，而刚才在第二步我们也算出了$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,-2,1)}$=0、$\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,-2,1)}=-1$，所以切线方程为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$

第四步. 该空间曲线在点(x_0,y_0,z_0)**处的法平面方程为**$1\times(x-x_0)+\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\times(y-y_0)+\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\times(z-z_0)=0$。

对于本题而言，所给的(x_0,y_0,z_0)是(1,−2,1)，而刚才在第二步我们也算出了$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,-2,1)}$、$\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,-2,1)}=-1$，所以法平面方程为

$$1\times(x-1)+0\times(y+2)+(-1)\times(z-1)=0$$

化简得

$$x-z=0$$

6.9.2　求曲面的法线与切平面

求曲面的法线与切平面的题可以分为两类。

题型 1：曲面是以$z=f(x,y)$**的形式给出的，求该曲面在点**(x_0,y_0,z_0)**处的法线与切平面。**

题型 1 的解题方法：

第一步. 求出$\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。**怎么求呢？这不就是 6.5 节（利用公式求**$\dfrac{\partial \Delta}{\partial □}$**）中的第一小节（当“Δ”是单一的字母时**$\dfrac{\partial \Delta}{\partial □}$**的求法）中的情况 1 嘛。我给大家复习一下吧：如果题中给的关系式是：Δ = 某某某（注意：某某某中不含 Δ），让求**$\dfrac{\partial \Delta}{\partial □}$**，那就直接套第 2 章所讲的导数公式即可。不过要注意一点：其他自变量就当成常数。**

第二步. 求出$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$、$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$。

第三步. 该曲面在点(x_0,y_0,z_0)**处的法线方程为**$\dfrac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}}=\dfrac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}}=\dfrac{z-z_0}{-1}$。

第四步．该曲面在点(x_0,y_0,z_0)处的切平面方程为$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\times(x-x_0)+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\times(y-y_0)+(-1)\times\ (z-z_0)=0$。

我们来看相应的例题。

例．求曲面$z=x^2+y^2-1$在点$(2,1,4)$处的法线及切平面方程。

解：由于本题问的是曲面的法线及切平面方程，并且曲面的形式是以$z=f(x,y)$的形式给出的，所以本题属于题型1，我们应该用题型1的解题方法来求解本题。

第一步．求出$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$。

对于本题而言，由于$z=x^2+y^2-1$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y$$

第二步．求出$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$、$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$。

对于本题而言，给出的(x_0,y_0,z_0)是$(2,1,4)$，所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1,4)}=2\times2=4$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1,4)}=2\times1=2$$

第三步．该曲面在点(x_0,y_0,z_0)处的法线方程为$\dfrac{x-x_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}}=\dfrac{y-y_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}}=\dfrac{z-z_0}{-1}$。

对于本题而言，所给的(x_0,y_0,z_0)是$(2,1,4)$，而刚才在第二步我们也算出了$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1,4)}=4$、$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1,4)}=2$，所以法线方程为$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}$

第四步．该曲面在点(x_0,y_0,z_0)处的切平面方程为$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\times(x-x_0)+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\times(y-y_0)+(-1)\times(z-z_0)=0$。

对于本题而言，所给的(x_0,y_0,z_0)是$(2,1,4)$，而刚才在第二步我们也算出了$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1,4)}=4$、$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1,4)}=2$，所以切平面方程为

$$4\times(x-2)+2\times(y-1)+(-1)\times(z-4)=0$$

化简得

$$4x+2y-z-6=0$$

题型2：曲面是以$f(x,y,z)=0$的形式给出的，求该曲面在点(x_0,y_0,z_0)处的法线与切平面。

题型2的解题方法：

第一步．设$u=f(x,y,z)$。

第二步．求出$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial u}{\partial z}$。怎么求呢？这不就是**6.5**节（利用公式求$\frac{\partial \Delta}{\partial □}$）中的第一小节（当“Δ”是单一的字母时$\frac{\partial \Delta}{\partial □}$的求法）中的情况**1**嘛。我给大家复习一下吧：如果题中给的关系式是：Δ=某某某（注意：某某某中不含Δ），让求$\frac{\partial \Delta}{\partial □}$，那就直接套第**2**章所讲的导数公式即可。不过要注意一点：其他自变量就当成常数。

第三步．求出$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$、$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$、$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$。

第四步．该曲面在点 (x_0, y_0, z_0) 处的法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}} = \dfrac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}} = \dfrac{z-z_0}{\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}}$。

第五步．该曲面在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \times (x-x_0) + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \times (y-y_0) + \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \times (z-z_0) = 0$。

我们来看相应的例题。

例．求曲面 $x^2+y^2+z^2-14=0$ 在点 $(1,2,3)$ 处的法线及切平面方程。

解：由于本题问的是曲面的法线及切平面方程，并且曲面的形式是以 $f(x,y,z)=0$ 的形式给出的，所以本题属于题型 2，我们应该用题型 2 的解题方法来求解本题。

第一步．设 $u = f(x,y,z)$。

对于本题而言，由于 $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-14$，所以我们设 $u = x^2+y^2+z^2-14$。

第二步．求出 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$\dfrac{\partial u}{\partial y}$、$\dfrac{\partial u}{\partial z}$。

对于本题而言，由于 $u = x^2+y^2+z^2-14$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z$$

第三步．求出 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$、$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$、$\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$。

对于本题而言，(x_0, y_0, z_0) 是 $(1,2,3)$，所以

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,3)} = 2\times 1 = 2$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,2,3)} = 2\times 2 = 4$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,2,3)} = 2\times 3 = 6$$

第四步．该曲面在点 (x_0, y_0, z_0) 处的法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}} = \dfrac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}} = \dfrac{z-z_0}{\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}}$。

对于本题而言，所给的 (x_0, y_0, z_0) 是 $(1,2,3)$，而刚才在第三步我们也算出了 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,3)} = 2$、$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,2,3)} = 4$、$\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,2,3)} = 6$，所以法线方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6}$$

化简得

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

第五步．该曲面在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \times (x-x_0) + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \times (y-y_0) + \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \times$

$(z-z_0)=0$。

对于本题而言，所给的 (x_0,y_0,z_0) 是 $(1,2,3)$，而刚才在第三步我们也算出了 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,3)}=2$、$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,2,3)}=4$、$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,2,3)}=6$，所以切平面方程为 $2\times(x-1)+4\times(y-2)+6\times(z-3)=0$

化简得

$x+2y+3z-14=0$

第7章

二 重 积 分

7.1 二重积分的形式

本节我并不给大家讲二重积分的定义，而是要告诉大家二重积分的形式。

二重积分的形式：

$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ **或** $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$

其中“ D ”称为积分区域，“ $f(x,y)$ ”称为被积函数。

我们来看几个例子。

例. “ $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$ ，其中 D 是由 $y=1$ 、 $x=2$ 、 $y=x$ 所围成的闭区域”就是一个二重积分，此二重积分的积分区域为“由直线 $y=1$ 、 $x=2$ 、 $y=x$ 所围成的闭区域”，此二重积分的被积函数为“ xy ”。

大家一定要注意两点。

第一点是：有的同学问我“积分区域”是不是由“被积函数”推出来？这个问题我觉得很可笑，大家记住，我们由被积函数完全推不出积分区域，由积分区域也完全推不出被积函数，积分区域和被积函数都是题里告诉我们的。就拿本题来说吧，积分区域“由 $y=1$ 、 $x=2$ 、 $y=x$ 所围成的闭区域”和被积函数“ xy ”都是题里明确告诉我们的。

第二点是：“ $\mathrm{d}\sigma$ ”和“ $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ”是一个意思，它们可以互换。例如，本题所给的二重积分“ $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$ ，其中 D 是由 $y=1$ 、 $x=2$ 、 $y=x$ 所围成的闭区域”与二重积分“ $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 D 是由 $y=1$ 、 $x=2$ 、 $y=x$ 所围成的闭区域”实际上是同一个二重积分。

例. “ $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$ ，其中 D 是由 $y^2=x$ 、 $y=x-2$ 所围成的闭区域”就是一个二重积分，此二重积分的积分区域为“由 $y^2=x$ 、 $y=x-2$ 所围成的闭区域”，此二重积分的被积函数为“ xy ”。

例. “ $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x_2-y_2}\,\mathrm{d}\sigma$ ，其中 D 是由圆心在原点，半径为 a 的圆周所围成的闭区域”就是一个二重积分，此二重积分的积分区域为“由圆心在原点，半径为 a 的圆周所围成的闭区域”，此二重积分的被积函数为“ $\mathrm{e}^{-x_2-y_2}$ ”。

例. “ $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 D 是由 x 轴、 y 轴以及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域”就是一个二重积分，此二重积分的积分区域为“由 x 轴、 y 轴以及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域”，此二重积分的被积函数为“ $\mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}$ ”。

例. “ $\iint\limits_D (3x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 D 是由 x 轴、 y 轴以及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域”就是一个二重积分，此二重积分的积分区域为“由 x 轴、 y 轴以及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域”，此二重积分的被积函数为“ $3x+2y$ ”。

例. “ $\iint\limits_D xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 以及 y 轴所围成的右半闭区域”就是一个二重积分，此二重积分的积分区域为“由圆周 $x^2+y^2=4$ 以及 y 轴所围成的右半闭区域”，此二重积分的被积函数为“ xy^2 ”。

例.“$\iint\limits_D x\sqrt{y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=\sqrt{x}$ 以及 $y=x^2$ 所围成的闭区域”就是一个二重积分，此二重积分的积分区域为“由 $y=\sqrt{x}$ 以及 $y=x^2$ 所围成的闭区域”，此二重积分的被积函数为“$x\sqrt{y}$”。

好，相信通过以上几个例子，所有的同学都应该知道了二重积分的形式。

7.2 当被积函数为 1 时二重积分的意义

通过上一节的讲解，大家不但知道了二重积分的形式，而且还知道了什么叫被积函数、什么叫积分区域。

本节我要给大家讲的是：当被积函数为 1 时二重积分的意义。

其实用一句话就可以把本节的内容讲完，那就是：**当二重积分的被积函数为 1 时，二重积分的值就是积分区域 D 的面积。**

下面我们来练题。

例. 请计算二重积分 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 x 轴、y 轴以及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域。

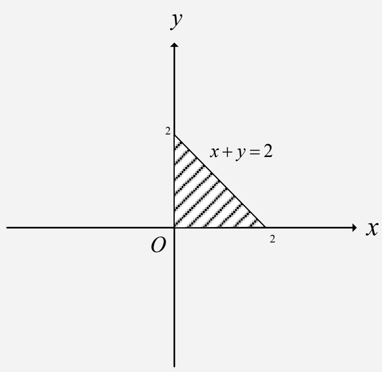
解：本题中出现了“二重积分”这四个字，说明 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是二重积分。

不过，就算题中没有出现“二重积分”这四个字，我们也能判断出 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是二重积分，因为上一节给大家讲过，二重积分的形式就是 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 或 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$。

好，本题让计算这个二重积分，可是二重积分的计算方法我还没有给大家讲啊，那怎么办？不要紧，由于题中让计算的这个二重积分的被积函数是 1，所以我们利用本节所讲的知识点就能计算出这个二重积分。

由本节所讲的知识点可知，$\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 积分区域 D 的面积。

也就是说，算一下积分区域 D 的面积就可以了。积分区域 D 是由 x 轴、y 轴以及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域，我们把图画出来。



很明显，积分区域 D 是一个直角三角形，它的面积是 $\frac{2\times2}{2}=2$，所以 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2$。

例. 请计算二重积分 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域。

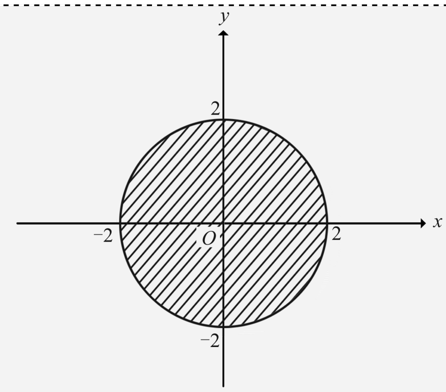
解：本题中出现了“二重积分”这四个字，说明 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是二重积分。

不过，就算题中没有出现“二重积分”这四个字，我们也能判断出 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是二重积分，因为我上一节给大家讲过，二重积分的形式就是 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 或 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$。

好，本题让计算这个二重积分，可是二重积分的计算方法我还没有给大家讲啊，那怎么办？不要紧，由于题中让计算的这个二重积分的被积函数是 1，所以我们利用本节所讲的知识点就能计算出这个二重积分。

由本节所讲的知识点可知，$\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ 积分区域 D 的面积。

也就是说，算一下积分区域 D 的面积就可以了。积分区域 D 是由 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域，我们把图画出来。



很明显，积分区域 D 是一个半径为 2 的圆，它的面积是 $\pi r^2=\pi\times 2^2=4\pi$，所以 $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi$。

例. 请计算二重积分 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 以及 y 轴所围成的右半闭区域。

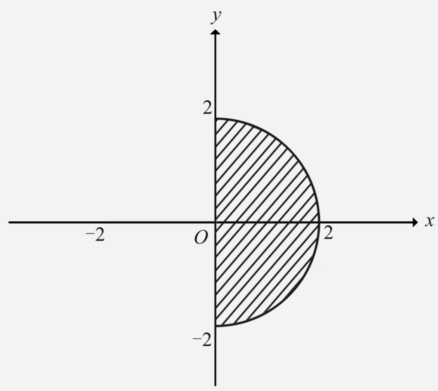
解： 本题中出现了“二重积分”这四个字，说明 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是二重积分。

不过，就算题中没有出现“二重积分”这四个字，我们也能判断出 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是二重积分，因为我上一节给大家讲过，二重积分的形式就是 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 或 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$。

好，本题让计算这个二重积分，可是二重积分的计算方法我还没有给大家讲啊，那怎么办？不要紧，由于题中让计算的这个二重积分的被积函数是 1，所以我们利用本节所讲的知识点就能计算出这个二重积分。

由本节所讲的知识点可知，$\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$积分区域 D 的面积。

也就是说，算一下积分区域 D 的面积就可以了。积分区域 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 以及 y 轴所围成的右半闭区域，我们把图画出来。



很明显，积分区域 D 是一个半径为 2 的半圆，它的面积是 $\frac{\pi r^2}{2}=\frac{\pi\times 2^2}{2}=\frac{4\pi}{2}=2\pi$，所以 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi$。

例. 请计算二重积分 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=x^2$、$y=x$ 所围成的闭区域。

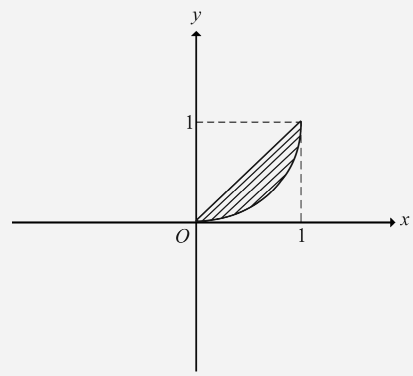
解： 本题中出现了“二重积分”这四个字，说明 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是二重积分。

不过，就算题中没有出现“二重积分”这四个字，我们也能判断出 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是二重积分，因为我上一节给大家讲过，二重积分的形式就是 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 或 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$。

好，本题让计算这个二重积分，可是二重积分的计算方法我还没有给大家讲啊，那怎么办？不要紧，由于题中让计算的这个二重积分的被积函数是 1，所以我们利用本节所讲的知识点就能计算出这个二重积分。

由本节所讲的知识点可知，$\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$积分区域 D 的面积。

也就是说，算一下积分区域 D 的面积就可以了。积分区域 D 是由 $y=x^2$、$y=x$ 所围成的闭区域，我们把图画出来。



这个图形是没有计算公式的，那怎么办？有办法，我们利用第 4 章所讲的定积分来算就可以了。即

D 的面积 $=\int_0^1(x-x^2)\,\mathrm{d}x=\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^1-\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_0^1=(\dfrac{1}{2}-0)-(\dfrac{1}{3}-0)=\dfrac{1}{6}$，所以 $\iint\limits_D 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{6}$。

7.3 二重积分的计算方法

上一节所讲的知识只能让大家算出被积函数为 1 的二重积分，可是在大多数情况下，二重积分的被积函数往往不是 1，这时我们就必须要用本节所讲的方法来计算二重积分了。

二重积分的计算方法 $\begin{cases}\text{直角坐标系法}\\ \text{极坐标系法}\end{cases}$

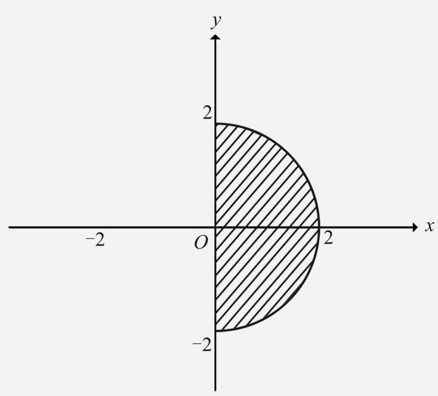
那么，什么时候我们应该利用“直角坐标系法”，什么时候我们应该利用“极坐标系法”来计算二重积分呢？下面我就来给大家总结一下：

在考研数学中，如果题中所给的二重积分的积分区域 D 是圆、半圆或 $\dfrac{1}{4}$ 圆，那么我们就应该用极坐标系法来计算该二重积分，否则我们就应该用直角坐标系法来计算该二重积分。

我们来看几个例子。

例. 请计算二重积分 $\iint\limits_D 2x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 以及 y 轴所围成的右半闭区域。

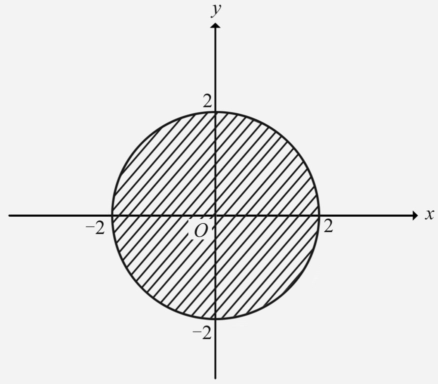
解： 我们画出本题所给的二重积分的积分区域 D 的图。



由于本题所给的二重积分的积分区域 D 是半圆，所以本题所给的二重积分应该用极坐标系法来做。

例. 请计算二重积分 $\iint\limits_D 2x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域。

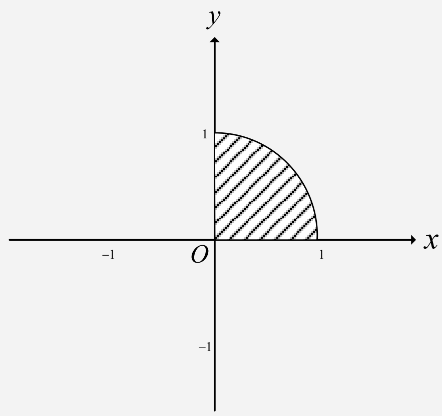
解： 我们画出本题所给的二重积分的积分区域 D 的图。



由于本题所给的二重积分的积分区域 D 是圆，所以本题所给的二重积分应该用极坐标系法来做。

例. 请计算二重积分 $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$、x 轴、y 轴所围成的在第一象限内的闭区域。

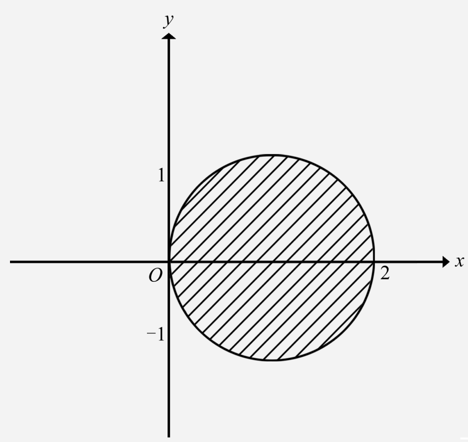
解： 我们画出本题所给的二重积分的积分区域 D 的图。



由于本题所给的二重积分的积分区域 D 是 $\frac{1}{4}$ 圆，所以本题所给的二重积分应该用极坐标系法来做。

例. 请计算二重积分 $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $(x-1)^2+y^2=1$ 所围成的闭区域。

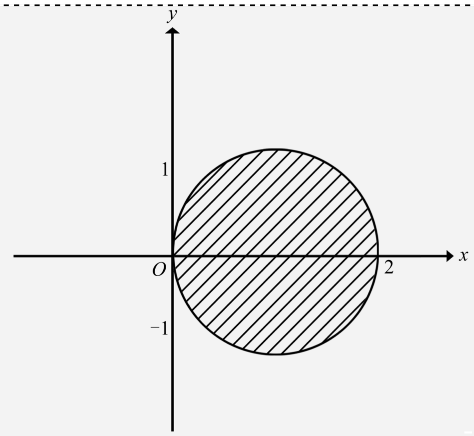
解： 我们画出本题所给的二重积分的积分区域 D 的图。



由于本题所给的二重积分的积分区域 D 是圆，所以本题所给的二重积分应该用极坐标系法来做。

例. 请计算二重积分 $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $(x-1)^2+y^2=1$ 所围成的闭区域。

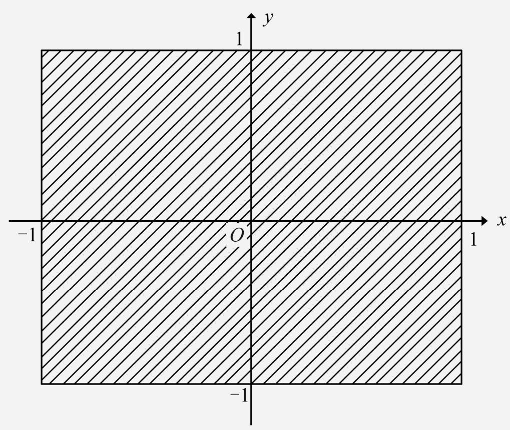
解： 我们画出本题所给的二重积分的积分区域 D 的图。



由于本题所给的二重积分的积分区域 D 是圆，所以本题所给的二重积分应该用极坐标系法来做。

例. 请计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 $D=\{(x,y)\,|\,|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$ 。

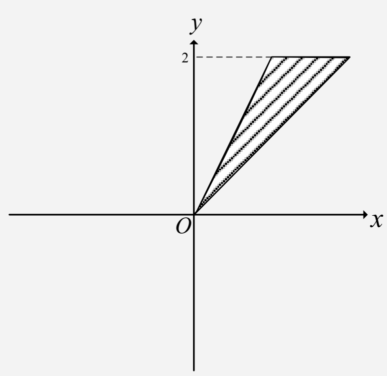
解： 我们画出本题所给的二重积分的积分区域 D 的图。



由于本题所给的二重积分的积分区域 D 是正方形而不是圆、半圆或 $\frac{1}{4}$ 圆，所以本题所给的二重积分应该用直角坐标系法来做。

例. 请计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 D 是由 $y=2$ 、 $y=x$ 、 $y=2x$ 所围成的闭区域。

解： 我们画出本题所给的二重积分的积分区域 D 的图。



由于本题所给的二重积分的积分区域 D 不是圆、半圆或 $\frac{1}{4}$ 圆，所以本题所给的二重积分应该用直角坐标系法来做。

好，截至目前，我只是告诉了大家什么时候应该用直角坐标系法以及什么时候应该用极坐标系法，那么当我们确定某道二重积分的计算题应该用直角坐标系法或者极坐标系法之后，到底应该如何去做呢？这正是接下来我要给大家讲的。

直角坐标系法又分为"先 y 后 x 法"和"先 x 后 y 法"。

"先 y 后 x 法"如下。

第一步. 在平面直角坐标系中把积分区域 D 涂上阴影。

第二步. 将所给的二重积分 $\iint\limits_D (x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写为"$\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$"。

第三步. 确定 a 、b 、c 、d 。具体的确定方法是：看一下第一步画出的阴影区域，阴影区域中横坐标的最小值即为 a，阴影区域中横坐标的最大值即为 b 。然后，画一条与 y 轴平行且与积分区域 D 相交的直线，有无数种画法对吧？但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在积分区域 D 中的部分肯定是一条线段。这条线段上纵坐标的最小值就是 c，这条线段上纵坐标的最大值就是 d 。

第四步. 计算出 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ 即可。这大家应该会算吧？也就是说先算内层的定积分 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$（就利用第 **4** 章所讲的定积分的计算方法来算），算完之后把计算出的结果作为外层的定积分的被积函数再算一下外层的定积分就可以了（同样也是利用第 **4** 章所讲的定积分的计算方法来算）。

"先 x 后 y 法"如下。

第一步. 在平面直角坐标系中把积分区域 D 涂上阴影。

第二步. 将所给的二重积分 $\iint\limits_D (x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写为"$\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$"。

第三步. 确定 a 、b 、c 、d 。具体的确定方法是：看一下第一步画出的阴影区域，阴影区域中纵坐标的最小值即为 a，阴影区域中纵坐标的最大值即为 b 。然后，画一条与 x 轴平行且与积分区域 D 相交的直线，有无数种画法对吧？但无论哪种画法，这条与 x 轴平行的直线在积分区域 D 中的部分肯定是一条线段。这条线段上横坐标的最小值就是 c，这条线段上横坐标的最大值就是 d 。

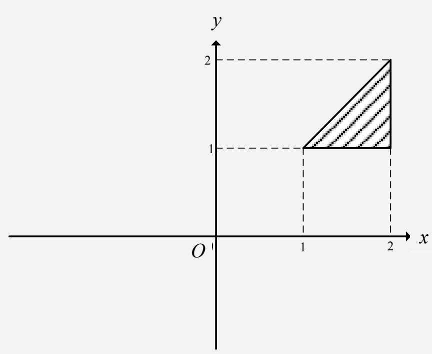
第四步. 计算出 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ 即可。这大家应该会算吧？也就是说先算内层的定积分 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$（就利用第 **4** 章所讲的定积分的计算方法来算），算完之后把计算出的结果作为外层的定积分的被积函数再算一下外层的定积分就可以了（同样也是利用第 **4** 章所讲的定积分的计算方法来算）。

直角坐标系法已经给大家讲完了，下面我们来看相应的例题。

例. 请计算 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=1$ 、$x=2$ 、$y=x$ 所围成的闭区域。

解： 本题让计算的是一个二重积分，我们先来判断一下该二重积分到底是应该用直角坐标系法还是极坐标系法来做。

我们画出该二重积分的积分区域 D 的图。



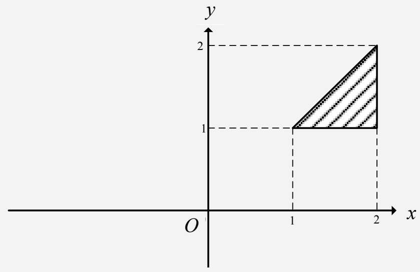
由于该二重积分的积分区域 D 是一个三角形而不是圆、半圆或 $\frac{1}{4}$ 圆，所以该二重积分应该用直角坐标系法来做。

而之前刚刚讲完，直角坐标系法又分"先 y 后 x 法"和"先 x 后 y 法"两种，我们既可以用"先 y 后 x 法"来做，也可以用"先 x 后 y 法"来做。

如果我们采用的是"先 y 后 x 法"的话，则做法如下。

第一步. 在平面直角坐标系中把积分区域 D 涂上阴影。

对于本题而言就是



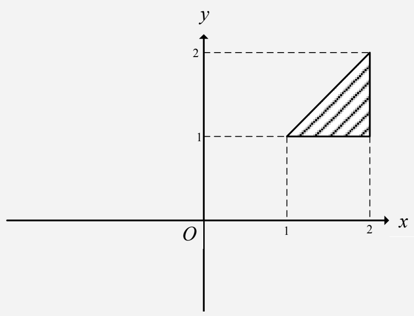
第二步. 将所给的二重积分 $\iint\limits_{D}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写为“$\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$”。

对于本题而言就是

$$\iint\limits_{D} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b[\int_c^d xy\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \qquad \text{（1）式}$$

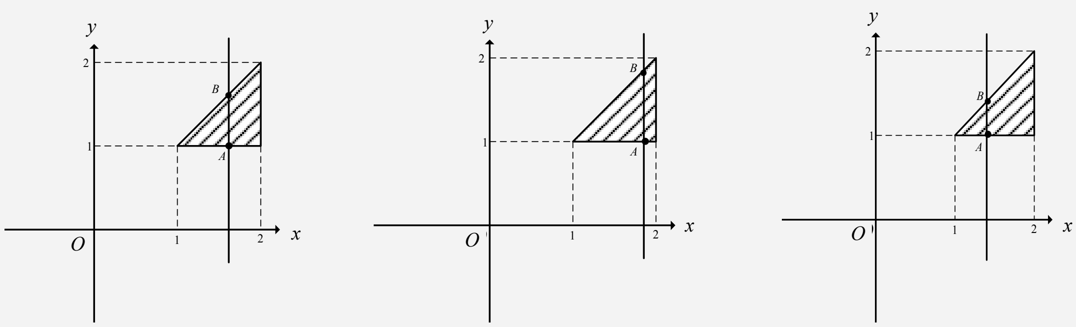
第三步. 确定 a 、b 、c 、d 。具体的确定方法是：看一下第一步画出的阴影区域，阴影区域中横坐标的最小值即为 a，阴影区域中横坐标的最大值即为 b 。然后，画一条与 y 轴平行且与积分区域 D 相交的直线，有无数种画法对吧？但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在积分区域 D 中的部分肯定是一条线段。这条线段上纵坐标的最小值就是 c ，这条线段上纵坐标的最大值就是 d 。

对于本题而言，我们看一下第一步画出的阴影区域



从图中我们可以很明显地看出，阴影区域中横坐标的最小值是 1，阴影区域中横坐标的最大值是 2，所以 $a=1$，$b=2$ 。

好，接着我们画一条与 y 轴平行且与积分区域 D 相交的直线。



大家看见了吧，这条直线有很多种画法。但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。这条线段上纵坐标的最小值肯定是在 A 点取到，这条线段上纵坐标的最大值肯定是在 B 点取到（当然，从图中我们可以很明显地看出：由于这条直线有很多种画法，所以 B 点的纵坐标并不是一个定值）。我们只需求出 A 点和 B 点的纵坐标就可以了。很显然，A 点的纵坐标 $y=1$，B 点的纵坐标 $y=x$ 。所以有 $c=1$， $d=x$ 。

综上所述，有 $a=1$， $b=2$ ， $c=1$， $d=x$，所以

$$\int_a^b[\int_c^d xy\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\int_1^2[\int_1^x xy\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \qquad \text{（2）式}$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\iint\limits_{D} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2[\int_1^x xy\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \qquad \text{（3）式}$$

第四步. 计算出 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ 即可。这大家应该会算吧？也就是说先算内层的定积分 $\int_c^d f(x,y)dy$（就利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算），算完之后把计算出的结果作为外层的定积分的被积函数再算一下外层的定积分就可以了（同样也是利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算）。

对于本题而言，最终就是要计算出 $\int_1^2[\int_1^x xy\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ 。

为了计算出 $\int_1^2[\int_1^x xy\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$，我们先来计算内层的定积分 $\int_1^x xy\mathrm{d}y$ 。大家一定要注意一点，那就是：大家看"$\int_1^x xy\mathrm{d}y$"中的"d"的后面写的是哪个字母？很明显写的是"y"，这说明是对"y"积分。既然是对"y"积分，所以被积函数中的 x 就可以被当成常数。因而有

$$\int_1^x xy\mathrm{d}y = x\times\int_1^x y\mathrm{d}y = x\times\frac{y^2}{2}\bigg|_1^x = x\times(\frac{x^2}{2}-\frac{1^2}{2}) = \frac{x^3}{2}-\frac{x}{2}$$

好，现在我们再来计算外层的定积分，也就是计算 $\int_1^2(\frac{x^3}{2}-\frac{x}{2})\mathrm{d}x$ 。

$$\int_1^2(\frac{x^3}{2}-\frac{x}{2})\mathrm{d}x = \int_1^2\frac{x^3}{2}\mathrm{d}x-\int_1^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 x^3\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_1^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\int_1^2 x^3\mathrm{d}x-\int_1^2 x\mathrm{d}x)$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{x^4}{4}\bigg|_1^2-\frac{x^2}{2}\bigg|_1^2) = \frac{1}{2}\times[(\frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4})-(\frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2})] = \frac{1}{2}\times[\frac{15}{4}-\frac{6}{4}] = \frac{9}{8}$$

综上所述，有

$$\int_1^2[\int_1^x xy\mathrm{d}y]\mathrm{d}x = \frac{9}{8} \qquad \text{（4）式}$$

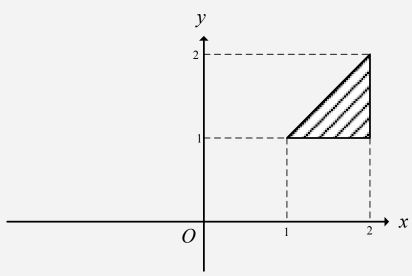
（3）式、（4）式相结合，得

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{9}{8} \qquad \text{（5）式}$$

如果我们采用的是"先 x 后 y 法"的话，则做法如下。

第一步. 在平面直角坐标系中把积分区域 D 涂上阴影。

对于本题而言就是



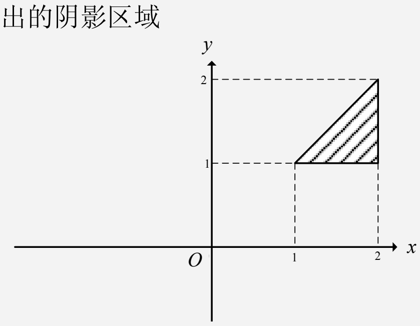
第二步. 将所给的二重积分 $\iint_D(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写为"$\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$"。

对于本题而言就是

$$\iint_D xy\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b[\int_c^d xy\ \mathrm{d}x]\mathrm{d}y \qquad \text{（6）式}$$

第三步. 确定 a、b、c、d 。具体的确定方法是：看一下第一步画出的阴影区域，阴影区域中纵坐标的最小值即为 a，阴影区域中纵坐标的最大值即为 b 。然后，画一条与 x 轴平行且与积分区域 D 相交的直线，有无数种画法对吧？但无论哪种画法，这条与 x 轴平行的直线在积分区域 D 中的部分肯定是一条线段。这条线段上横坐标的最小值就是 c，这条线段上横坐标的最大值就是 d 。

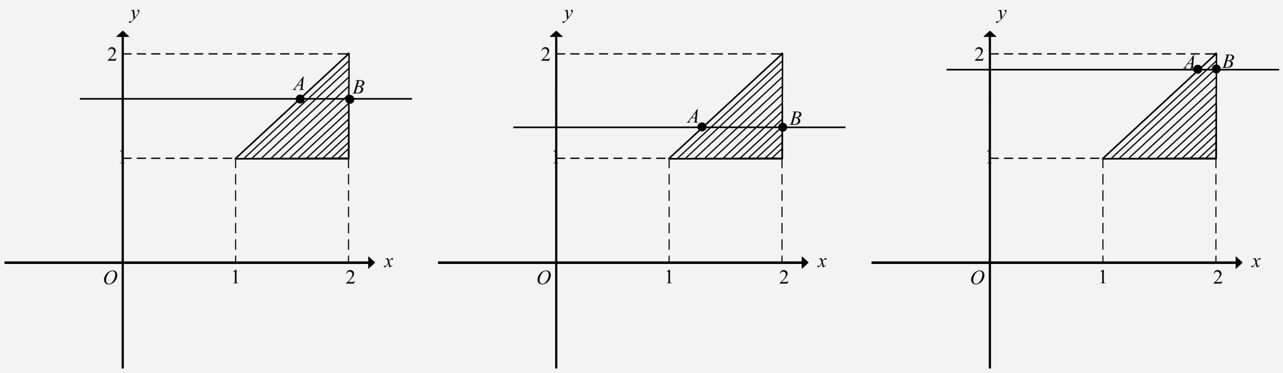
对于本题而言，我们看一下第一步画出的阴影区域



从图中我们可以很明显地看出，阴影区域中纵坐标的最小值是 1，阴影区域中纵坐标的最大值是 2，所以 $a=1$，

$b=2$。

好，接着我们画一条与 x 轴平行且与积分区域 D 相交的直线。



大家看见了吧，这条直线有很多种画法。但无论哪种画法，这条与 x 轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。这条线段上横坐标的最小值肯定是在 A 点取到，这条线段上横坐标的最大值肯定是在 B 点取到（当然，从图中我们可以很明显地看出：由于这条直线有很多种画法，所以 A 点的横坐标并不是一个定值）。我们只需求出 A 点和 B 点的横坐标就可以了。很显然，A 点的横坐标 $x=y$，B 点的横坐标 $x=2$。所以有 $c=y$，$d=2$。

综上所述，有 $a=1$，$b=2$，$c=y$，$d=2$，所以

$$\int_a^b\left[\int_c^d xy\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_1^2\left[\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \qquad （7）式$$

（6）式、（7）式相结合，得

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\left[\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \qquad （8）式$$

第四步. 计算出 $\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$ 即可。这大家应该会算吧？也就是说先算内层的定积分 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x$（就利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算），算完之后把计算出的结果作为外层的定积分的被积函数再算一下外层的定积分就可以了（同样也是利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算）。

对于本题而言，我们最终就是要计算出 $\int_1^2\left[\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$。

为了计算出 $\int_1^2\left[\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$，我们先来计算内层的定积分 $\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x$。大家一定要注意一点，那就是：大家看“$\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x$”中的“d”的后面写的是哪个字母？很明显写的是“x”，这说明是对“x”积分。既然是对“x”积分，所以被积函数中的 y 就可以被当成常数。因而有

$$\int_y^2 xy\mathrm{d}x=y\times\int_y^2 x\mathrm{d}x=y\times\frac{x^2}{2}\Bigg|_y^2=y\times\left(\frac{2^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right)=2y-\frac{y^3}{2}$$

好，现在我们再来计算外层的定积分，也就是计算 $\int_1^2\left(2y-\frac{y^3}{2}\right)\mathrm{d}y$。

$$\int_1^2\left(2y-\frac{y^3}{2}\right)\mathrm{d}y=\int_1^2 2y\mathrm{d}y-\int_1^2\frac{y^3}{2}\mathrm{d}y=2\int_1^2 y\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\int_1^2 y^3\mathrm{d}y=2\times\frac{y^2}{2}\Bigg|_1^2-\frac{1}{2}\times\frac{y^4}{2}\Bigg|_1^2$$

$$=2\times\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\times\left(\frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4}\right)=3-\frac{15}{8}=\frac{24}{8}-\frac{15}{8}=\frac{9}{8}$$

综上所述，有

$$\int_1^2\left[\int_y^2 xy\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\frac{9}{8} \qquad （9）式$$

（8）式、（9）式相结合，得

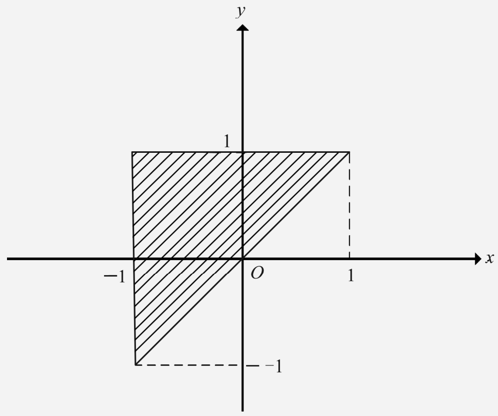
$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{9}{8} \qquad （10）式$$

大家看见了吧，用“先 y 后 x 法”和用“先 x 后 y 法”算出的结果是一样的。

例. 请计算 $\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=x$、$x=-1$、$y=1$ 所围成的闭区域。

解： 本题让计算的是一个二重积分，我们先来判断一下该二重积分到底是应该用直角坐标系法还是极坐标系法来做。

我们画出该二重积分的积分区域 D 的图。



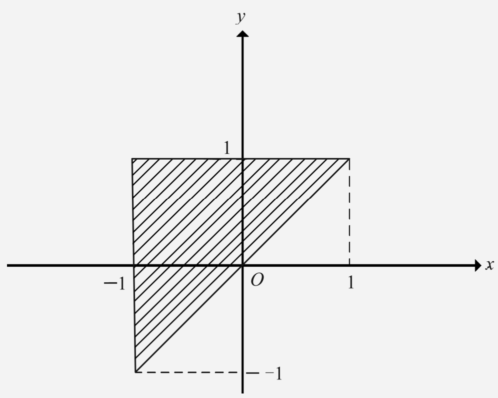
由于该二重积分的积分区域 D 是一个三角形而不是圆、半圆或 $\frac{1}{4}$ 圆，所以该二重积分应该用直角坐标系法来做。

好，现在我们已经确定了该二重积分应该用直角坐标系法来做。之前刚刚讲完，直角坐标系法又分“先 y 后 x 法”和“先 x 后 y 法”两种，我们既可以用“先 y 后 x 法”来做，也可以用“先 x 后 y 法”来做。

如果我们采用的是“先 y 后 x 法”的话，则做法如下。

第一步. 在平面直角坐标系中把积分区域 D 涂上阴影。

对于本题而言就是



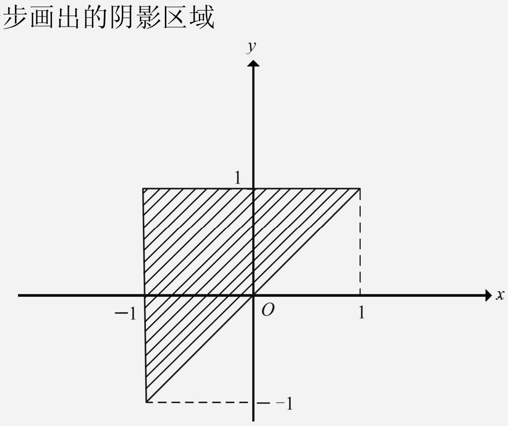
第二步. 将所给的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写为“ $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ ”。

对于本题而言就是

$$\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b[\int_c^d y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \qquad \text{（1）式}$$

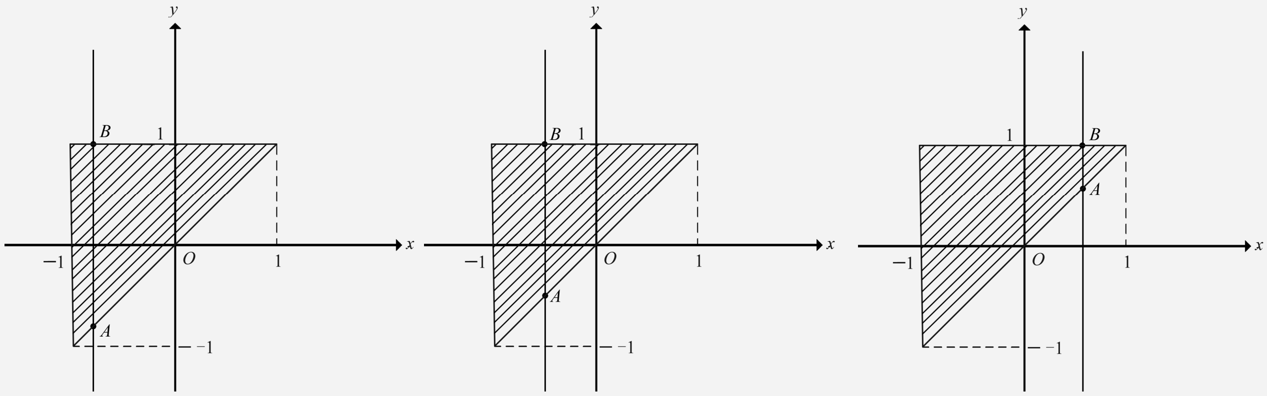
第三步. 确定 a 、 b 、 c 、 d 。具体的确定方法是：看一下第一步画出的阴影区域，阴影区域中横坐标的最小值即为 a，阴影区域中横坐标的最大值即为 b。然后，画一条与 y 轴平行且与积分区域 D 相交的直线，有无数种画法对吧？但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在积分区域 D 中的部分肯定是一条线段。这条线段上纵坐标的最小值就是 c，这条线段上纵坐标的最大值就是 d。

对于本题而言，我们看一下第一步画出的阴影区域



从图中我们可以很明显地看出，阴影区域中横坐标的最小值是 -1，阴影区域中横坐标的最大值是 1，所以 $a=-1$， $b=1$。

好，接着我们画一条与 y 轴平行且与积分区域 D 相交的直线。



大家看见了吧，这条直线有很多种画法。但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。这条线段上纵坐标的最小值肯定是在 A 点取到，这条线段上纵坐标的最大值肯定是在 B 点取到（当然，从图中我们可以很明显地看出：由于这条直线有很多种画法，所以 A 点的纵坐标并不是一个定值）。我们只需求出 A 点和 B 点的纵坐标就可以了。很显然，A 点的纵坐标 $y=x$，B 点的纵坐标 $y=1$。所以有 $c=x$，$d=1$。

综上所述，有 $a=-1$，$b=1$，$c=x$，$d=1$，所以

$$\int_a^b[\int_c^d y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\int_{-1}^1[\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \qquad \text{（2）式}$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1[\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \qquad \text{（3）式}$$

第四步. 计算出 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ 即可。这大家应该会算吧？也就是说先算内层的定积分 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$（就利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算），算完之后把计算出的结果作为外层的定积分的被积函数再算一下外层的定积分就可以了（同样也是利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算）。

对于本题而言，最终就是要计算出 $\int_{-1}^1[\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$。

为了计算出 $\int_{-1}^1[\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$，我们先来计算内层的定积分 $\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}y$。大家一定要注意一点，那就是：大家看“$\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}y$”中的“d”的后面写的是哪个字母？很明显写的是“$y$”，这说明是对“$y$”积分。既然是对“$y$”积分，所以被积函数中的 x 就可以被当成常数。因而有

$$\begin{aligned}
&\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\\
&=\int_x^1\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}(\frac{y^2}{2})\\
&=\frac{1}{2}\int_x^1\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}(y^2)\\
&=-\frac{1}{2}\int_x^1\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}(-y^2)\\
&=-\frac{1}{2}\int_x^1\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}(-y^2+x^2+1)\\
&=-\frac{1}{2}\int_x^1(1+x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1+x^2-y^2)\\
&=-\frac{1}{2}\times\frac{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_x^1\\
&=-\frac{1}{2}\times[\frac{(1+x^2-1^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{(1+x^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}]\\
&=-\frac{1}{3}\times(|x|^3-1)
\end{aligned}$$

注意：$(x^2)^{\frac{3}{2}}=|x|^3$ 。

好，现在我们再来计算外层的定积分，也就是计算 $\int_{-1}^{1}[-\frac{1}{3}\times(|x|^3-1)]\mathrm{d}x$ 。

该定积分的被积函数中含有绝对值，大家还记得我在第 4 章给大家讲过的处理被积函数中含有绝对值的定积分的方法吧？那就是令绝对值里面的部分等于 0 ，然后解出 x ，最后用解出的 x 来分段。针对本题而言，绝对值里面的部分就是 x ，所以我们令 $x=0$ ，这本身相当于已经解出了 x ，即 $x=0$ 。我们以 0 来分段，即

$$\int_{-1}^{1}[-\frac{1}{3}\times(|x|^3-1)]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}[-\frac{1}{3}\times(|x|^3-1)]\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}[-\frac{1}{3}\times(|x|^3-1)]\mathrm{d}x$$

好，也就是说我们现在要做的就是计算一下定积分 $\int_{-1}^{0}[-\frac{1}{3}\times(|x|^3-1)]\mathrm{d}x$ 和定积分 $\int_{0}^{1}[-\frac{1}{3}\times(|x|^3-1)]\mathrm{d}x$ 。

先来计算定积分 $\int_{-1}^{0}[-\frac{1}{3}\times(|x|^3-1)]\mathrm{d}x$ 。

由于积分下限是 -1 ，积分上限是 0，说明 $[-\frac{1}{3}\times(|x|^3-1)]$ 中的 x 的取值范围是 $[-1,0]$ ，所以有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}[-\frac{1}{3}\times(|x|^3-1)]\mathrm{d}x&=\int_{-1}^{0}[-\frac{1}{3}\times(-x^3-1)]\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\times\int_{-1}^{0}(-x^3-1)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\times\int_{-1}^{0}-x^3\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}1\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}\times(\int_{-1}^{0}-x^3\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}1\mathrm{d}x)=\frac{1}{3}\times(\int_{-1}^{0}x^3\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}1\mathrm{d}x)=\frac{1}{3}\times(\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0}+x\Big|_{-1}^{0})\\&=\frac{1}{3}\times[-\frac{1}{4}+1]=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

再来计算定积分 $\int_{0}^{1}[-\frac{1}{3}\times(|x|^3-1)]\mathrm{d}x$。

由于积分下限是 0 ，积分上限是 1 ，说明 $[-\frac{1}{3}\times(|x|^3-1)]$ 中的 x 的取值范围是 $[0,1]$ ，所以有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}[-\frac{1}{3}\times(|x|^3-1)]\mathrm{d}x&=\int_{0}^{1}[-\frac{1}{3}\times(x^3-1)]\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\times\int_{0}^{1}(x^3-1)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\times\int_{0}^{1}x^3\mathrm{d}x-\int_{0}^{1}1\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}\times(\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{1}+x\Big|_{0}^{1})\\&=\frac{1}{3}\times(-\frac{3}{4})=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

综上所述，有

$$\int_{-1}^{1}[-\frac{1}{3}\times(|x|^3-1)]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}[-\frac{1}{3}\times(|x|^3-1)]\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}[-\frac{1}{3}\times(|x|^3-1)]\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

所以

$$\int_{-1}^{1}[\int_{x}^{1}y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\frac{1}{2} \qquad （4）式$$

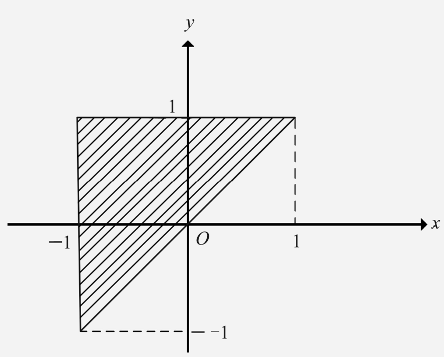
（3）式、（4）式相结合，得

$$\iint\limits_{D}y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2} \qquad （5）式$$

如果我们采用的是“先 x 后 y 法”的话，则做法如下。

第一步. 在平面直角坐标系中把积分区域 D 涂上阴影。

对于本题而言就是



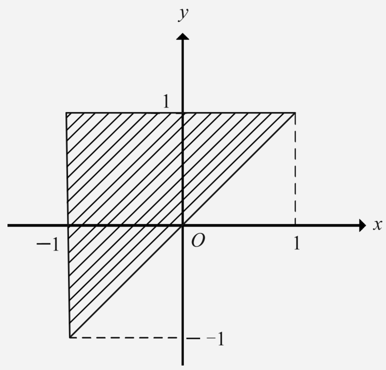
第二步. 将所给的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ **写为"** $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ **"。**

对于本题而言就是

$$\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b[\int_c^d y\sqrt{1+x^2-y^2}\ \mathrm{d}x]\mathrm{d}y \qquad \text{（6）式}$$

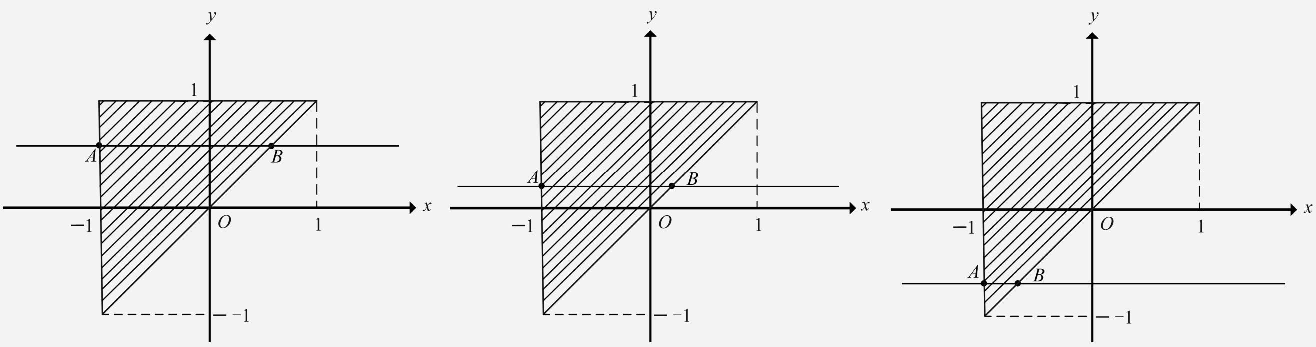
第三步. 确定 a **、** b **、** c **、** d **。具体的确定方法是：看一下第一步画出的阴影区域，阴影区域中纵坐标的最小值即为** a **，阴影区域中纵坐标的最大值即为** b **。然后，画一条与** x **轴平行且与积分区域** D **相交的直线，有无数种画法对吧？但无论哪种画法，这条与** x **轴平行的直线在积分区域** D **中的部分肯定是一条线段。这条线段上横坐标的最小值就是** c **，这条线段上横坐标的最大值就是** d **。**

对于本题而言，我们看一下第一步画出的阴影区域



从图中我们可以很明显地看出，阴影区域中纵坐标的最小值是 -1，阴影区域中纵坐标的最大值是 1，所以 $a=-1$， $b=1$。

好，接着我们画一条与 x 轴平行且与积分区域 D 相交的直线。



大家看见了吧，这条直线有很多种画法。但无论哪种画法，这条与 x 轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。这条线段上横坐标的最小值肯定是在 A 点取到，这条线段上横坐标的最大值肯定是在 B 点取到（当然，从图中我们可以很明显地看出：由于这条直线有很多种画法，所以 B 点的横坐标并不是一个定值）。我们只需求出 A 点和 B 点的横坐标就可以了。很显然，A 点的横坐标 $x=-1$，B 点的横坐标 $x=y$ 。所以有 $c=-1$， $d=y$ 。

综上所述，有 $a=-1$， $b=1$， $c=-1$， $d=y$，所以

$$\int_a^b[\int_c^d y\sqrt{1+x^2-y^2}\ \mathrm{d}x]\mathrm{d}y=\int_{-1}^1[\int_{-1}^y y\sqrt{1+x^2-y^2}\ \mathrm{d}x]\mathrm{d}y \qquad \text{（7）式}$$

（6）式、（7）式相结合，得

$$\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1[\int_{-1}^y y\sqrt{1+x^2-y^2}\ \mathrm{d}x]\mathrm{d}y \qquad \text{（8）式}$$

第四步. 计算出 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ **即可。这大家应该会算吧？也就是说先算内层的定积分** $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x$ **（就利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算），算完之后把计算出的结果作为外层的定积分的被积函数再算一下外层的定积分就可以了（同样也是利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算）。**

对于本题而言，最终就是要计算出 $\int_{-1}^1[\int_{-1}^y y\sqrt{1+x^2-y^2}\ \mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 。

为了计算出 $\int_{-1}^1[\int_{-1}^y y\sqrt{1+x^2-y^2}\ \mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ ，我们先来计算内层的定积分 $\int_{-1}^y y\sqrt{1+x^2-y^2}\ \mathrm{d}x$ 。大家一定要注意一点，那就是：大家看" $\int_{-1}^y y\sqrt{1+x^2-y^2}\ \mathrm{d}x$ "中的"d"的后面写的是哪个字母？很明显写的是" x "，这说明是对" x "积分。既然是对" x "积分，所以被积函数中的 y 就可以被当成常数。

此计算过程非常复杂，我就不写出来了，最后的计算结果为

$$\int_{-1}^{1}[\int_{-1}^{y} y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$$　（9）式

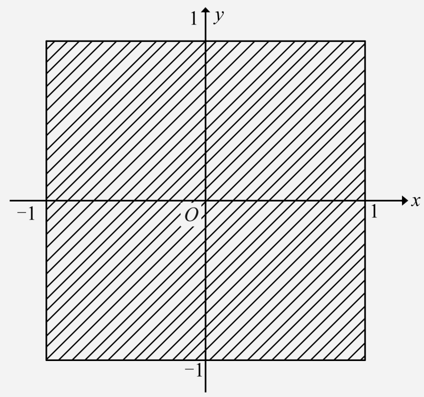
（8）式、（9）式相结合，得

$$\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$$　（10）式

大家看见了吧，用“先 y 后 x 法”和用“先 x 后 y 法”算出的结果是一样的。虽然答案是一样的，但是对于本题而言，用“先 y 后 x 法”会简单一些。

例. 请计算二重积分 $\iint\limits_D f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$。

解： 我们画出本题所给的二重积分的积分区域 D 的图。



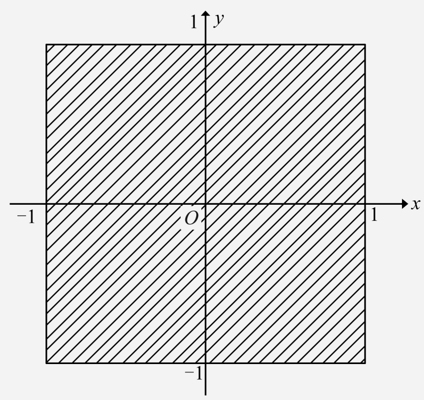
由于本题所给的二重积分的积分区域 D 是正方形而不是圆、半圆或 $\frac{1}{4}$ 圆，所以本题所给的二重积分应该用直角坐标系法来做。

好，现在我们已经确定了该二重积分应该用直角坐标系法来做。之前刚刚讲完，直角坐标系法又分“先 y 后 x 法”和“先 x 后 y 法”两种，我们既可以用“先 y 后 x 法”来做，也可以用“先 x 后 y 法”来做。

如果我们采用的是“先 y 后 x 法”的话，则做法如下。

第一步. 在平面直角坐标系中把积分区域 D 涂上阴影。

对于本题而言就是



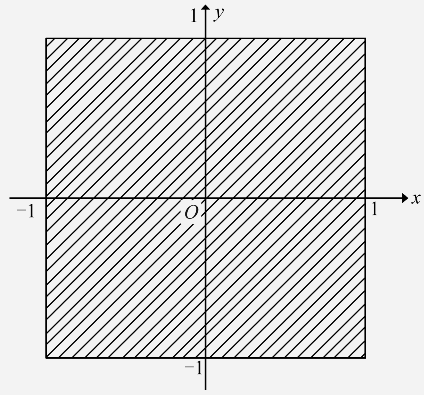
第二步. 将所给的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写为“$\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$”。

对于本题而言就是

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b[\int_c^d (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$$　（1）式

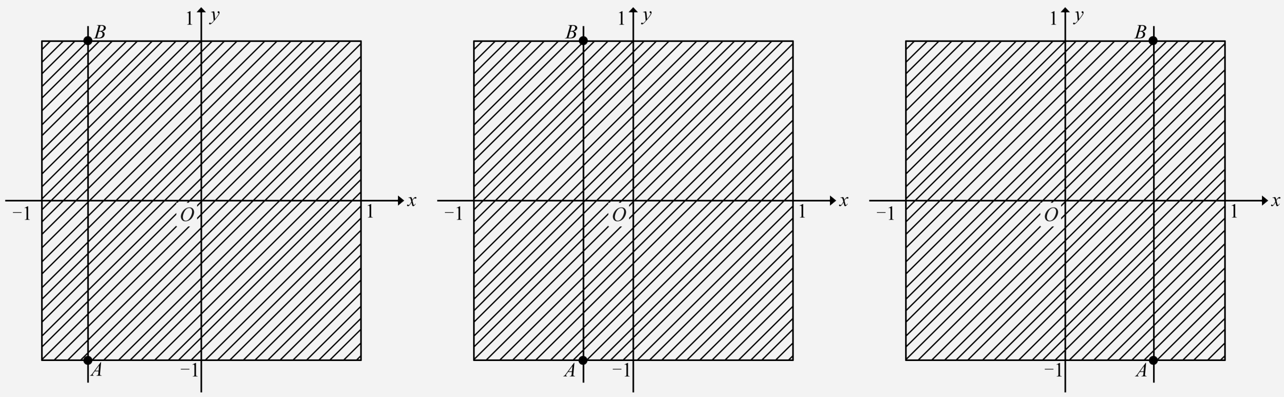
第三步. 确定 a、b、c、d。具体的确定方法是：看一下第一步画出的阴影区域，阴影区域中横坐标的最小值即为 a，阴影区域中横坐标的最大值即为 b。然后，画一条与 y 轴平行且与积分区域 D 相交的直线，有无数种画法对吧？但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在积分区域 D 中的部分肯定是一条线段。这条线段上纵坐标的最小值就是 c，这条线段上纵坐标的最大值就是 d。

对于本题而言，我们看一下第一步画出的阴影区域



从图中我们可以很明显地看出，阴影区域中横坐标的最小值是 -1，阴影区域中横坐标的最大值是 1，所以 $a=-1$，$b=1$。

好，接着我们画一条与 y 轴平行且与积分区域 D 相交的直线。



大家看见了吧，这条直线有很多种画法。但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。这条线段上纵坐标的最小值肯定是在 A 点取到，这条线段上纵坐标的最大值肯定是在 B 点取到。我们只需求出 A 点和 B 点的纵坐标就可以了。很显然，A 点的纵坐标 $y=-1$，B 点的纵坐标 $y=1$。所以有 $c=-1$，$d=1$。

综上所述，有 $a=-1$，$b=1$，$c=-1$，$d=1$，所以

$$\int_a^b[\int_c^d(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\int_{-1}^1[\int_{-1}^1(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\iint\limits_D y(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1[\int_{-1}^1(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \qquad （3）式$$

第四步. 计算出 $\int_a^b[\int_c^d(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ 即可。这大家应该会算吧？也就是说先算内层的定积分 $\int_c^d f(x,y)dy$（就利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算），算完之后把计算出的结果作为外层的定积分的被积函数再算一下外层的定积分就可以了（同样也是利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算）。

对于本题而言，最终就是要计算出 $\int_{-1}^1[\int_{-1}^1(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$。

为了计算出 $\int_{-1}^1[\int_{-1}^1(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$，我们先来计算内层的定积分 $\int_{-1}^1(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$。大家一定要注意一点，那就是：大家看"$\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}\mathrm{d}y$"中的"d"的后面写的是哪个字母？很明显写的是"$y$"，这说明是对"$y$"积分。既然是对"$y$"积分，所以被积函数中的 x 就可以被当成常数。因而有

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\\
&=\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}y+\int_{-1}^1 y^2\mathrm{d}y\\
&=x^2\times\int_{-1}^1 1\mathrm{d}y+\int_{-1}^1 y^2\mathrm{d}y\\
&=x^2\times y\Big|_{-1}^1+\int_{-1}^1 y^2\mathrm{d}y\\
&=2x^2+\int_{-1}^1 y^2\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$=2x^2+\frac{y^3}{3}\bigg|_{-1}^{1}$$

$$=2x^2+[\frac{1^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}]$$

$$=2x^2+\frac{2}{3}$$

好，现在我们再来计算外层的定积分，也就是计算 $\int_{-1}^{1}(2x^2+\frac{2}{3})\,\mathrm{d}y$ 。

$$\int_{-1}^{1}(2x^2+\frac{2}{3})\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}2x^2\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}\mathrm{d}x=2\times\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{1}+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

综上所述，有

$$\int_{-1}^{1}[\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\frac{8}{3} \qquad \text{（4）式}$$

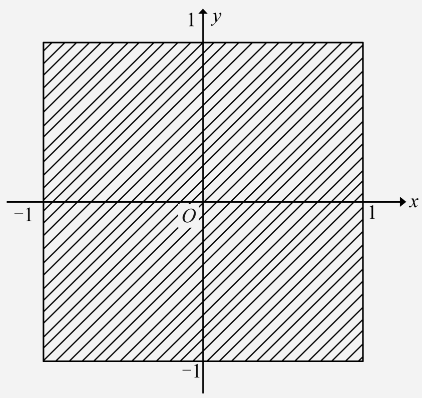
（3）式、（4）式相结合，得

$$\int_{-1}^{1}[\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\frac{8}{3} \qquad \text{（5）式}$$

如果我们采用的是“先 x 后 y 法”的话，则做法如下。

第一步. 在平面直角坐标系中把积分区域 D 涂上阴影。

对于本题而言就是



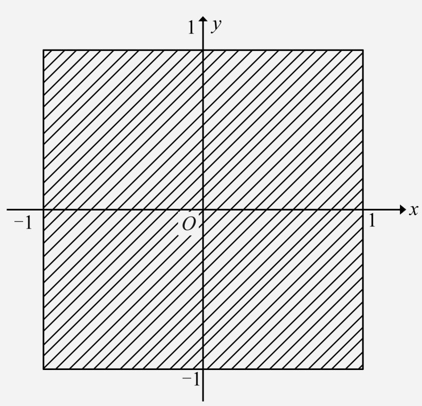
第二步. 将所给的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写为“ $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ ”。

对于本题而言就是

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b[\int_c^d(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \qquad \text{（6）式}$$

第三步. 确定 a 、 b 、 c 、 d 。具体的确定方法是：看一下第一步画出的阴影区域，阴影区域中纵坐标的最小值即为 a ，阴影区域中纵坐标的最大值即为 b 。然后，画一条与 x 轴平行且与积分区域 D 相交的直线，有无数种画法对吧？但无论哪种画法，这条与 x 轴平行的直线在积分区域 D 中的部分肯定是一条线段。这条线段上横坐标的最小值就是 c ，这条线段上横坐标的最大值就是 d 。

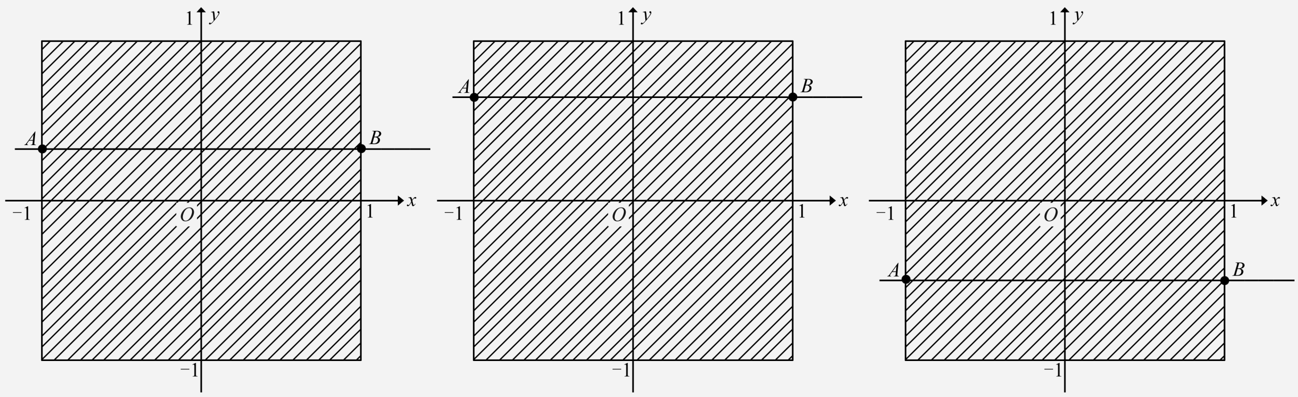
对于本题而言，我们看一下第一步画出的阴影区域。



从图中我们可以很明显地看出，阴影区域中纵坐标的最小值是 -1，阴影区域中纵坐标的最大值是 1，所以

$a=-1$，$b=1$。

好，接着我们画一条与 x 轴平行且与积分区域 D 相交的直线。



大家看见了吧，这条直线有很多种画法。但无论哪种画法，这条与 x 轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。这条线段上横坐标的最小值肯定是在 A 点取到，这条线段上横坐标的最大值肯定是在 B 点取到。我们只需求出 A 点和 B 点的横坐标就可以了。很显然，A 点的横坐标 $x=-1$，B 点的横坐标 $x=1$。所以有 $c=-1$，$d=1$。

综上所述，有 $a=-1$，$b=1$，$c=-1$，$d=1$，所以

$$\int_a^b[\int_c^d(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\int_{-1}^1[\int_{-1}^1(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y \qquad （7）式$$

（6）式、（7）式相结合，得

$$\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1[\int_{-1}^1(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y \qquad （8）式$$

第四步．计算出 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 即可。这大家应该会算吧？也就是说先算内层的定积分 $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x$（就利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算），算完之后把计算出的结果作为外层的定积分的被积函数再算一下外层的定积分就可以了（同样也是利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算）。

对于本题而言，最终就是要计算出 $\int_{-1}^1[\int_{-1}^1(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$。

为了计算出 $\int_{-1}^1[\int_{-1}^1(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$，我们先来计算内层的定积分 $\int_{-1}^1(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x$。大家一定要注意一点，那就是：大家看“$\int_{-1}^1(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x$”中的“d”的后面写的是哪个字母？很明显写的是“$x$”，这说明是对“$x$”积分。既然是对“$x$”积分，所以被积函数中的 y 就可以被当成常数。因而有

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^1(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\\=&\int_{-1}^1x^2\mathrm{d}y+\int_{-1}^1y^2\mathrm{d}y\\=&\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^1+\int_{-1}^1y^2\mathrm{d}y\\=&\frac{2}{3}+y^2\times[1-(-1)]\\=&\frac{2}{3}+2y^2\end{aligned}$$

好，现在我们再来计算外层的定积分，也就是计算 $\int_{-1}^1(\frac{2}{3}+2y^2)\mathrm{d}y$。

$$\int_{-1}^1(\frac{2}{3}+2y^2)\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 2y^2\mathrm{d}y+\int_{-1}^1\frac{2}{3}\mathrm{d}y=2\times\left.\frac{y^3}{3}\right|_{-1}^1+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

综上所述，有

$$\int_{-1}^1[\int_{-1}^1(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y=\frac{8}{3} \qquad （9）式$$

（8）式、（9）式相结合，得

$$\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{8}{3} \qquad （10）式$$

大家看见了吧，用“先 y 后 x 法”和用“先 x 后 y 法”算出的结果是一样的。

例. 请计算 $\int_1^2 \mathrm{d}x\int_1^x xy\mathrm{d}y$ 。

解： 有不少同学第一眼看见这道题后，把 $\int_1^2 \mathrm{d}x\int_1^x xy\mathrm{d}y$ 理解为了定积分 $\int_1^2 1\,\mathrm{d}x$ 乘以定积分 $\int_1^x xy\mathrm{d}y$ ，这种理解是完全错误的。为什么呢？大家听我解释。

如果本题改为“请计算 $\int_1^2 1\mathrm{d}x\int_1^x xy\mathrm{d}y$ ”的话，那的确是定积分 $\int_1^2 1\mathrm{d}x$ 乘以定积分 $\int_1^x xy\,\mathrm{d}y$ 。可实际上，大家仔细看看，“ $\int_1^2$ ”与“ $\mathrm{d}x$ ”之间什么都没写。大家记住，以后碰到这种题千万别理解成两个定积分相乘，**而要理解成：题中所给的积分其实就是已经对某个二重积分用完直角坐标系法的四个步骤中的前三个步骤之后得到的，写在后面的那个积分其实就是用完第三步之后内层的那个定积分。**

例如，本题让计算 $\int_1^2 \mathrm{d}x\int_1^x xy\mathrm{d}y$ ，其实就是让计算 $\int_1^2 (\int_1^x xy\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$ ，现在大家明白了吧。

这道题最后的答案是 $\dfrac{9}{8}$ ，计算过程我就不给出来了，相信所有同学都应该会。我出本题的目的就在于：让大家以后看见类似本题所给的这种积分时，千万别理解成两个定积分相乘。

好，相信大家现在对于“利用直角坐标系法计算二重积分”这个知识点已经完全掌握了，接下来我们讲新的内容，即利用极坐标系法计算二重积分。

在讲之前，先带大家复习一下之前讲过的一个很基础的知识点，那就是：什么时候用直角坐标系法，什么时候用极坐标系法。

在考研数学中，如果题中所给的二重积分的积分区域 D 是圆、半圆或 $\dfrac{1}{4}$ 圆，那么我们就应该用极坐标系法来计算该二重积分，否则就应该用直角坐标系法来计算该二重积分。

接下来，正式开始给大家讲极坐标系法。

极坐标系法。

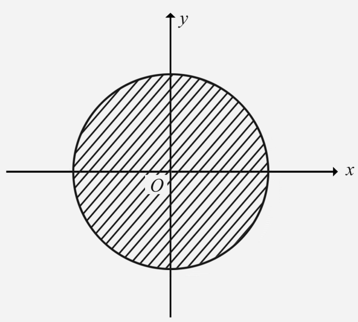
第一步. 在平面直角坐标系中把积分区域 D 涂上阴影。

第二步. 将所给的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写为“ $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\rho\,\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta$ ”（注意：被积函数中要乘以一个“ ρ ”，别忘了）。

第三步. 确定 a 、b 、c 、d 。具体的确定方法如下。

a 、b 的确定方法：当我们在阴影区域的边界上取一点 A_i 时， x 轴的正半轴这条线与 OA_i 这条线之间最小的角度就是 a ，最大的角度就是 b 。我们来看几个例子。

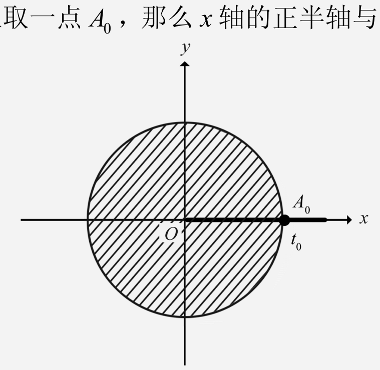
第一个例子.例如第一步画出的阴影区域为



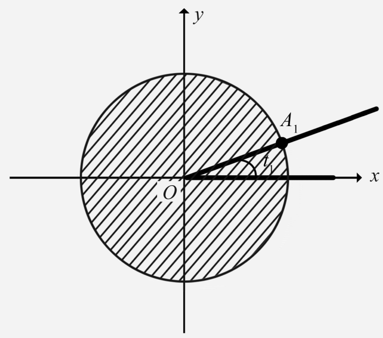
那么 a 就是 0， b 就是 2π 。

这是因为：

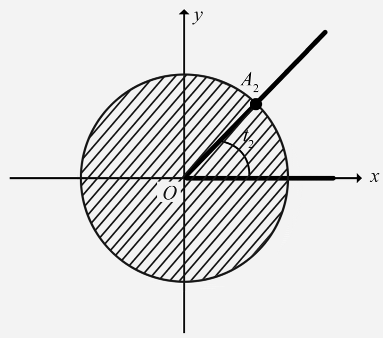
在阴影区域的边界曲线（也就是圆）上取一点 A_0 ，那么 x 轴的正半轴与 OA_0 这条线之间的角度 t_0 一看就是 $0°$ 。



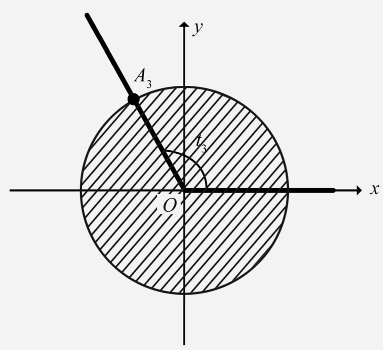
在阴影区域的边界曲线（也就是圆）上取一点 A_1，那么 x 轴的正半轴与 OA_1 这条线之间的角度 t_1 一看就是在 0° ～ 90° （$\frac{\pi}{2}$）之间，大概是 30° （从 x 轴的正半轴出发逆时针转）。



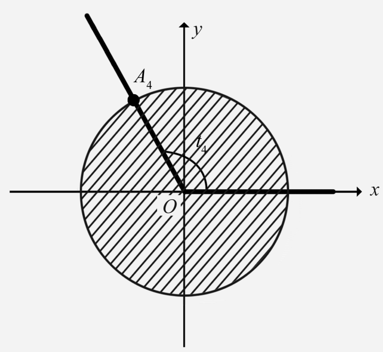
在阴影区域的边界曲线（也就是圆）上取一点 A_2，那么 x 轴的正半轴与 OA_2 这条线之间的角度 t_2 一看就是在 0° ～90° （$\frac{\pi}{2}$）之间，大概是 45° （从 x 轴的正半轴出发逆时针转）。



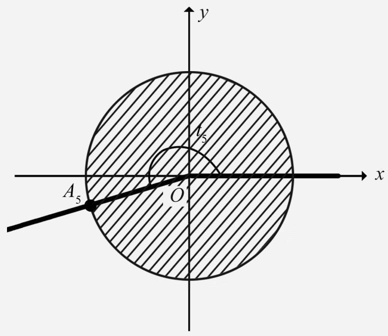
在阴影区域的边界曲线（也就是圆）上取一点 A_3，那么 x 轴的正半轴与 OA_3 这条线之间的角度 t_3 一看就是在 90° （$\frac{\pi}{2}$）～180° （π）之间，大概是 120° （从 x 轴的正半轴出发逆时针转）。



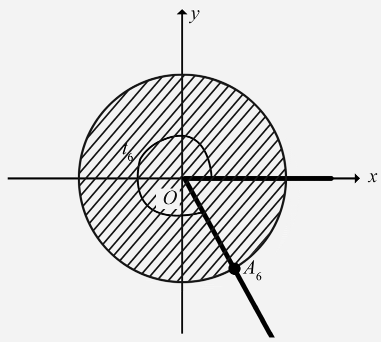
在阴影区域的边界曲线（也就是圆）上取一点 A_4，那么 x 轴的正半轴与 OA_4 这条线之间的角度 t_4 一看就是在 90° （$\frac{\pi}{2}$）～180° （π）之间，大概是 120° （从 x 轴的正半轴出发逆时针转）。



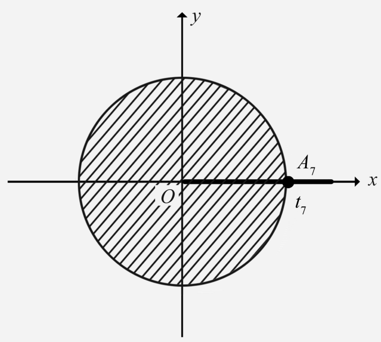
在阴影区域的边界曲线（也就是圆）上取一点 A_5，那么 x 轴的正半轴与 OA_5 这条线之间的角度 t_5 一看就是在 180° （π）～270° （$\frac{3}{2}\pi$）之间，大概是 200° （从 x 轴的正半轴出发逆时针转）。



在阴影区域的边界曲线（也就是圆）上取一点 A_6，那么 x 轴的正半轴与 OA_6 这条线之间的角度 t_6 一看就是在 270°（$\frac{3}{2}\pi$）～360°（2π）之间，大概是 300°（从 x 轴的正半轴出发逆时针转）。

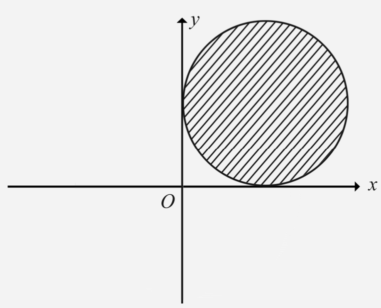


在阴影区域的边界曲线（也就是圆）上取一点 A_7（A_7 其实就是 A_0，只不过是转了一周之后的），那么 x 轴的正半轴与 OA_7 这条线之间的角度 t_7 一看就是 360°（2π）。



综上所述，当我们在阴影区域的边界上取一点 A_i 时，x 轴的正半轴与 OA_i 这条线之间的角度最小是 0，最大是 2π。所以对于本题来说，有 $a=0$，$b=2\pi$。

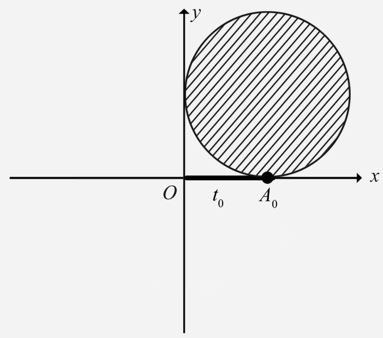
第二个例子. 例如第一步画出的阴影区域为



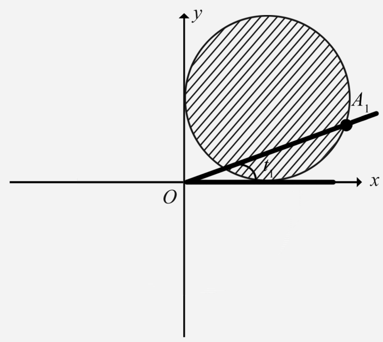
那么 a 就是 0，b 就是 $\frac{\pi}{2}$。

这是因为：

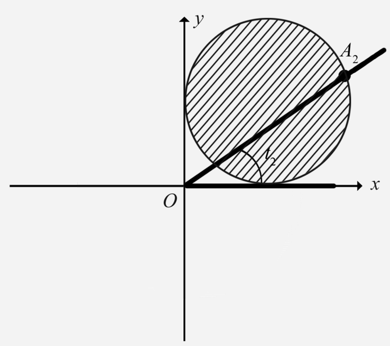
在阴影区域的边界曲线（也就是圆）上取一点 A_0，那么 x 轴的正半轴与 OA_0 这条线之间的角度 t_0 一看就是 0°。



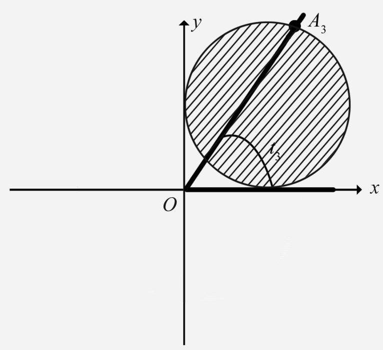
在阴影区域的边界曲线（也就是圆）上取一点 A_1，那么 x 轴的正半轴与 OA_1 这条线之间的角度 t_1 一看就是在 0°～90°（$\frac{\pi}{2}$）之间，大概是 30°（从 x 轴的正半轴出发逆时针转）。



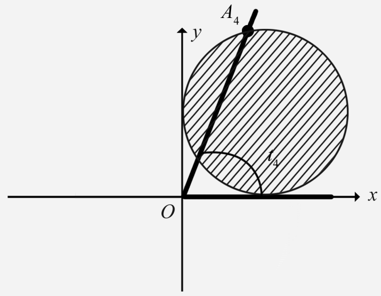
在阴影区域的边界曲线（也就是圆）上取一点 A_2，那么 x 轴的正半轴与 OA_2 这条线之间的角度 t_2 一看就是在 0° 到 90°（$\frac{\pi}{2}$）之间，大概是 45°（从 x 轴的正半轴出发逆时针转）。



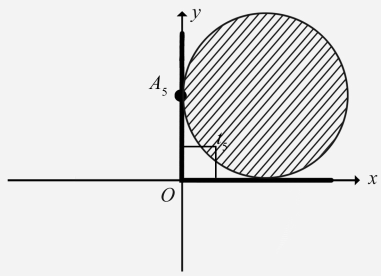
在阴影区域的边界曲线（也就是圆）上取一点 A_3，那么 x 轴的正半轴与 OA_3 这条线之间的角度 t_3 一看就是在 0°～90°（$\frac{\pi}{2}$）之间，大概是 60°（从 x 轴的正半轴出发逆时针转）。



在阴影区域的边界曲线（也就是圆）上取一点 A_4，那么 x 轴的正半轴与 OA_4 这条线之间的角度 t_4 一看就是在 0°～90°（$\frac{\pi}{2}$）之间，大概是 75°（从 x 轴的正半轴出发逆时针转）。

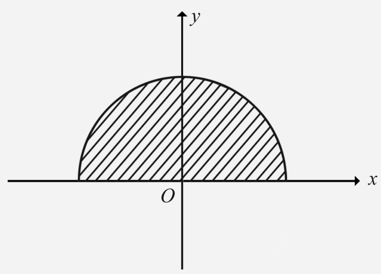


在阴影区域的边界曲线（也就是圆）上取一点 A_5，那么 x 轴的正半轴与 OA_5 这条线之间的角度 t_5 一看就是 $90°$（$\frac{\pi}{2}$）。



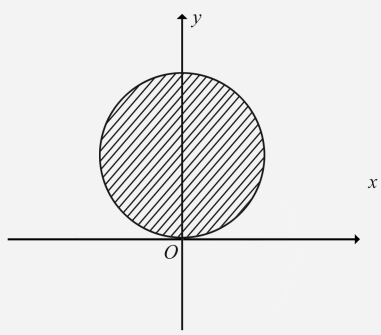
综上所述，当我们在阴影区域的边界上取一点 A_i 时，x 轴的正半轴与 OA_i 这条线之间的角度最小是 0，最大是 $\frac{\pi}{2}$。所以对于本题来说，有 $a=0$，$b=\frac{\pi}{2}$。

第三个例子.例如第一步画出的阴影区域为



那么 $a=0$，$b=\pi$（不做过多解释了）。

第四个例子. 例如第一步画出的阴影区域为

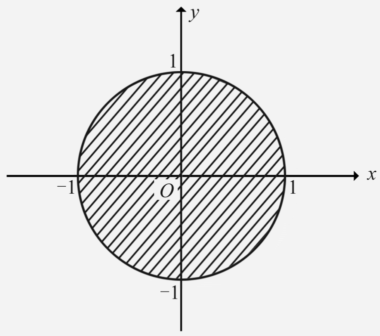


那么 $a=0$，$b=\pi$（不做过多解释了）。

好，相信大家现在已经非常清楚 a、b 的确定方法了。

c、d 的确定方法：画一条过原点且与阴影区域相交的直线，这条直线与阴影区域的公共部分肯定是一条线段。找出这条线段上离原点距离最近的点，该点到原点的距离就是 c；找出这条线段上离原点距离最远的点，该点到原点的距离就是 d。我们来看几个例子。

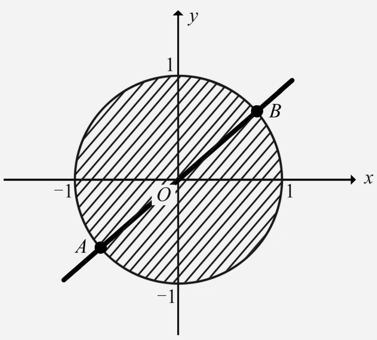
第一个例子.例如第一步画出的阴影区域为

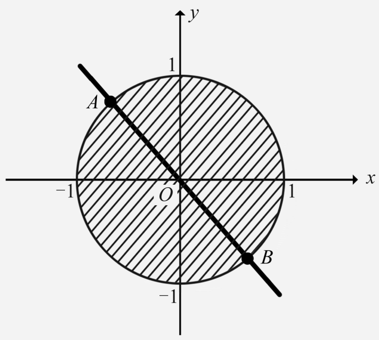


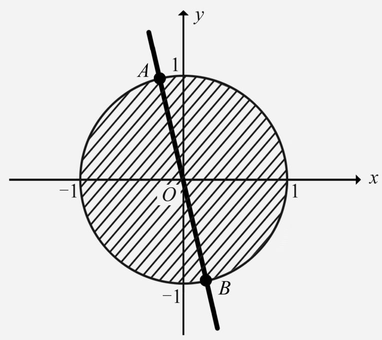
那么 c 就是 0，d 就是1。

这是因为：

过原点画一条与阴影区域相交的直线，肯定有无数种画法，例如



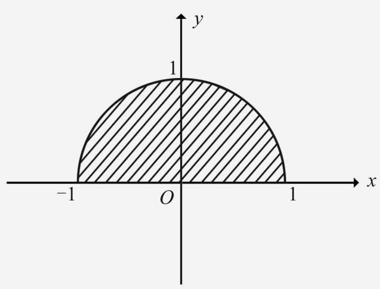




等等。

虽然这条直线有无数种画法，但是这条直线与阴影区域的公共部分肯定是线段 AB。线段 AB 上有无数个点，我们现在就看看线段 AB 上的无数个点中哪个点离原点距离最近，显然是原点本身离原点最近。所以 $c=0$。我们再看看线段 AB 上的无数个点中哪个点离原点距离最远，显然是 A 点或 B 点。A 点或 B 点到原点的距离显然是半径 1，所以 $d=1$。

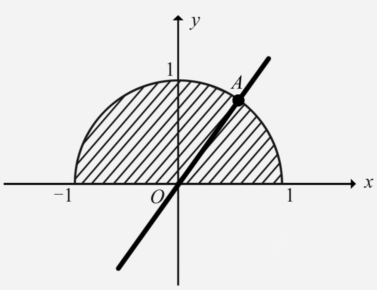
第二个例子.例如第一步画出的阴影区域为

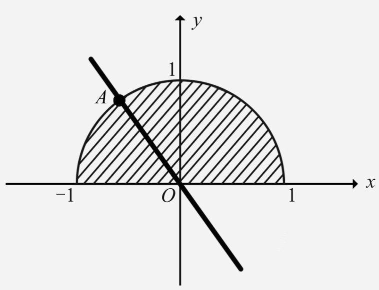


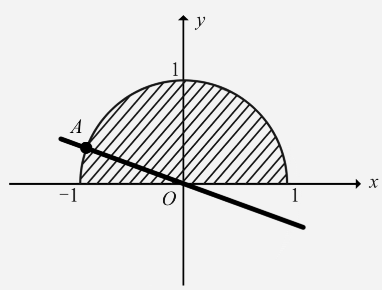
那么 c 就是 0，d 就是1。

这是因为：

过原点画一条与阴影区域相交的直线，肯定有无数种画法，例如



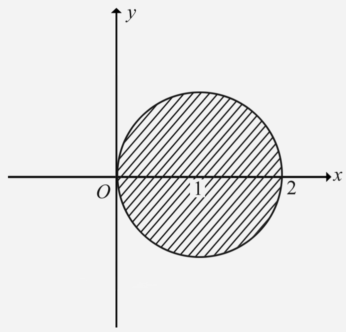




等等。

虽然这条直线有无数种画法，但是这条直线与阴影区域的公共部分肯定是线段 OA 。线段 OA 上有无数个点，那么，我们现在就看看线段 OA 上的无数个点中哪个点离原点距离最近，显然是原点本身离原点最近。所以 $c=0$ 。我们再看看线段 OA 上的无数个点中哪个点离原点距离最远，显然是 A 点。 A 点到原点的距离显然是半径 1，所以 $d=1$ 。

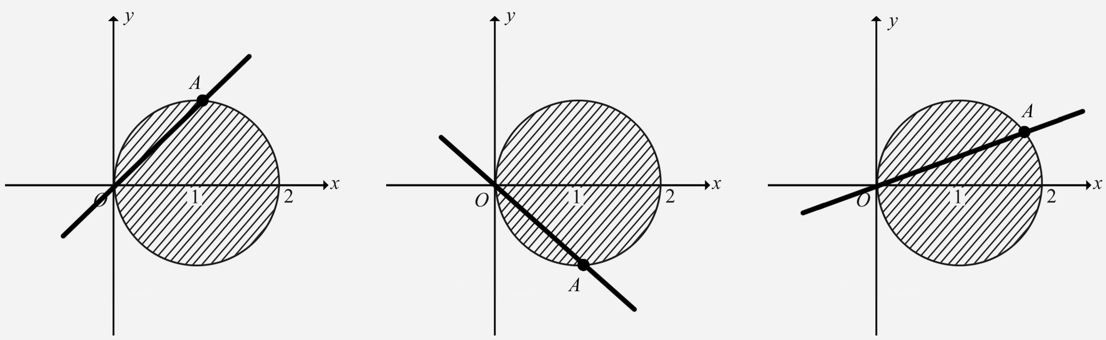
第三个例子. 例如第一步画出的阴影区域为



那么 c 就是 0， d 就是 $2\cos\theta$ 。

这是因为：

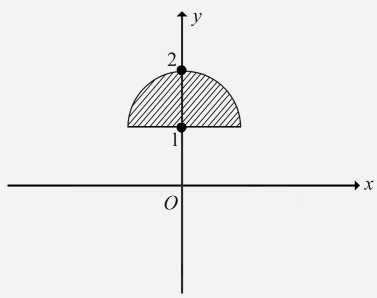
过原点画一条与阴影区域相交的直线，肯定有无数种画法，例如



等等。

虽然这条直线有无数种画法，但是这条直线与阴影区域的公共部分肯定是线段 OA 。线段 OA 上有无数个点，我们现在就看看线段 OA 上的无数个点中哪个点离原点距离最近，显然是原点本身离原点最近。所以 $c=0$ 。我们再看看线段 OA 上的无数个点中哪个点离原点距离最远，显然是 A 点。那么 A 点到原点的距离是多少？从图中可以很明显地看出， A 点到原点的距离并不是一个定值，但是 A 点肯定是处于 $(x-1)^2+y^2=1$ 上。大家记住，以后凡是遇到这种情况，就把 $x=\rho\cos\theta$ ， $y=\rho\sin\theta$ 代入该点处于的那个方程中，解出 ρ 即可（ $\rho>0$ ）。那么针对本题而言，就是把 $x=\rho\cos\theta$ ，$y=\rho\sin\theta$ 代入 $(x-1)^2+y^2=1$ 中，得 $(\rho\cos\theta-1)^2+\rho^2\sin^2\theta=1$，整理得 $\rho^2\cos^2\theta-2\rho\cos\theta+1+\rho^2\sin^2\theta=1$，再整理得 $\rho^2-2\rho\cos\theta=0$ ，解得 $\rho=0$ 或 $\rho=2\cos\theta$ ，舍去 $\rho=0$ ，取 $\rho=2\cos\theta$ ，所以 $d=2\cos\theta$ 。

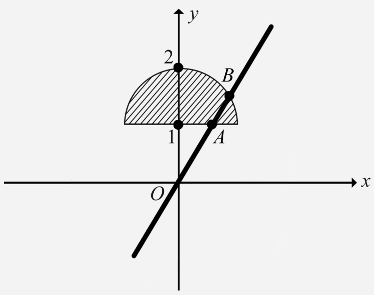
第四个例子. 例如第一步画出的阴影区域为

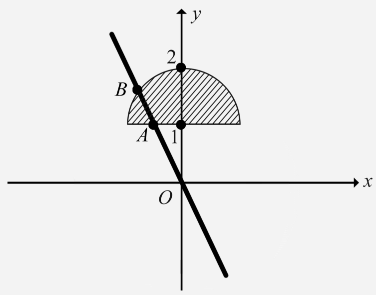


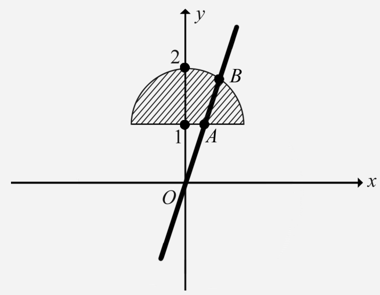
那么 c 就是 $\dfrac{1}{\sin\theta}$， d 就是 $2\sin\theta$ 。

这是因为：

过原点画一条与阴影区域相交的直线，肯定有无数种画法，例如







等等。

虽然这条直线有无数种画法，但是这条直线与阴影区域的公共部分肯定是线段 AB 。线段 AB 上有无数个点，我们现在就看看线段 AB 上的无数个点中哪个点离原点距离最近，显然是 A 点离原点最近。那么 A 点到原点的距离是多少？从图中可以很明显地看出， A 点到原点的距离并不是一个定值，但是 A 点肯定是处于 $y=1$ 上。所以我们就把 $x=\rho\cos\theta$ ， $y=\rho\sin\theta$ 代入 $y=1$ 中，得 $\rho\sin\theta=1$ ，解得 $\rho=\dfrac{1}{\sin\theta}$ ，因而 $c=\dfrac{1}{\sin\theta}$ 。我们再看看线段 AB 上的无数个点中哪个点离原点距离最远，显然是 B 点。那么 B 点到原点的距离是多少？从图中可以很明显地看出，B 点到原点的距离并不是一个定值，但是 B 点肯定是处于 $x^2+(y-1)^2=1$ 上。所以我们就把 $x=\rho\cos\theta$ ，$y=\rho\sin\theta$ 代入 $x^2+(y-1)^2=1$ 中，得 $\rho^2\cos^2\theta+(\rho\sin\theta-1)^2=1$ ，整理得 $\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta-2\rho\sin\theta+1=1$ ，再整理得 $\rho^2-2\rho\sin\theta=0$ ，解得 $\rho=0$ 或 $\rho=2\sin\theta$ ，舍去 $\rho=0$ ，取 $\rho=2\sin\theta$ ，因而 $d=2\sin\theta$ 。

好，相信大家现在已经非常清楚 c 、 d 的确定方法了。

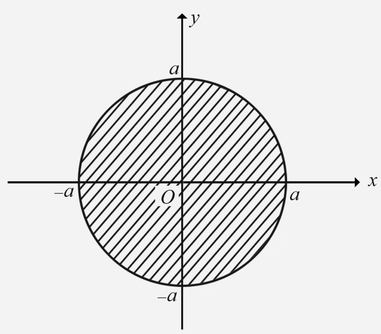
第四步. 设 $x=\rho\cos\theta$ ， $y=\rho\sin\theta$ ，并将 $x=\rho\cos\theta$ ， $y=\rho\sin\theta$ 代入被积函数中。

第五步. 计算出 $\int_a^b[\int_c^d f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta$ **即可。这大家应该会算吧？也就是说先算内层的定积分** $\int_c^d f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\mathrm{d}\rho$ **（就利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算），算完之后把计算出的结果作为外层的定积分的被积函数再算一下外层的定积分就可以了（同样也是利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算）。**

好，极坐标法我已经给大家讲完了，接下来我们来看相应的例题。

例. 请计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 D 是由中心在原点、半径为 a 的圆周所围成的闭区域。

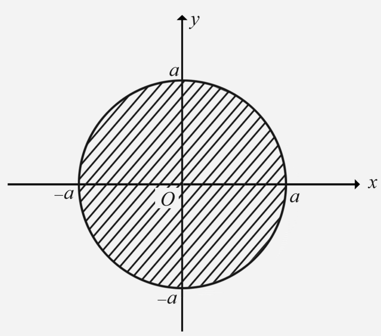
解：我们画出本题所给的二重积分的积分区域 D 的图。



由于本题所给的二重积分的积分区域 D 是圆，所以本题所给的二重积分应该用极坐标系法来做。

第一步. 在平面直角坐标系中把积分区域 D 涂上阴影。

对于本题而言，就是



第二步．将所给的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写为“$\int_a^b[\int_c^d(x,y)\ \rho\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta$”（注意：被积函数中要乘以一个“$\rho$”，别忘了）。

对于本题而言，就是

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b[\int_c^d(\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\times\rho)\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta \qquad （1）式$$

第三步．确定 a、b、c、d。

前面我已经用大量篇幅介绍过了 a、b、c、d 的确定方法，这里就不再赘述了。对于本题而言，有 $a=0$，$b=2\pi$，$c=0$，$d=a$。

所以有

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}[\int_0^a(\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\times\rho)\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta \qquad （2）式$$

第四步．设 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，并将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入被积函数中。

对于本题而言，我们把 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入被积函数 $(\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\times\rho)$ 中，得

$$\int_0^{2\pi}[\int_0^a(\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\times\rho)\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}[\int_0^a(\mathrm{e}^{-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta}\times\rho)\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta \qquad （3）式$$

（2）式、（3）式相结合，得

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}[\int_0^a(\mathrm{e}^{-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta}\times\rho)\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta \qquad （4）式$$

第五步．计算出 $\int_a^b[\int_c^d f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\ \rho\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta$ 即可。这大家应该会算吧？也就是说先算内层的定积分 $\int_c^d f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$（就利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算），算完之后把计算出的结果作为外层的定积分的被积函数再算一下外层的定积分就可以了（同样也是利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算）。

对于本题而言，就是要计算出 $\int_0^{2\pi}[\int_0^a(\mathrm{e}^{-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta}\times\rho)\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta$。为了能计算出 $\int_0^{2\pi}[\int_0^a(\mathrm{e}^{-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta}\times\rho)\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta$，就要先来计算内层的定积分 $\int_0^a(\mathrm{e}^{-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta}\times\rho)\mathrm{d}\rho$。大家一定要注意，由于内层的定积分“d”的后面是 ρ，所以被积函数中的 θ 就要当成常数来处理（不过对于本题而言不用考虑这个，因为一会儿大家就知道了，被积函数中的 θ 可以消去，相当于被积函数中没有 θ）。

$$\begin{aligned}
&\int_0^a(\mathrm{e}^{-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta}\times\rho)\mathrm{d}\rho\\
=&\int_0^a(\mathrm{e}^{-(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)}\times\rho)\mathrm{d}\rho\\
=&\int_0^a(\mathrm{e}^{-\rho^2}\times\rho)\mathrm{d}\rho\\
=&\int_0^a\mathrm{e}^{-\rho^2}\ \mathrm{d}(\frac{\rho^2}{2})\\
=&\frac{1}{2}\int_0^a\mathrm{e}^{-\rho^2}\ \mathrm{d}(\rho^2)\\
=&-\frac{1}{2}\int_0^a\mathrm{e}^{-\rho^2}\ \mathrm{d}(-\rho^2)\\
=&-\frac{1}{2}\times\mathrm{e}^{-\rho^2}\Big|_0^a\\
=&-\frac{1}{2}\times(\mathrm{e}^{-a^2}-1)\\
=&\frac{1}{2}\times(1-\mathrm{e}^{-a^2})
\end{aligned}$$

再来算外层的定积分 $\int_0^{2\pi}[\frac{1}{2}\times(1-\mathrm{e}^{-a^2})]\mathrm{d}\theta$。

$$\int_0^{2\pi}[\frac{1}{2}\times(1-\mathrm{e}^{-a^2})]\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\times(1-\mathrm{e}^{-a^2})\times\int_0^{2\pi}1\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\times(1-\mathrm{e}^{-a^2})\times2\pi=\pi(1-\mathrm{e}^{-a^2})$$

综上所述，有

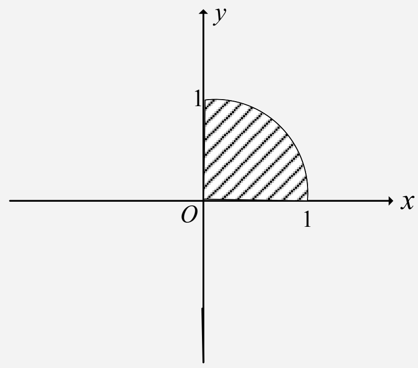
$$\int_0^{2\pi}[\int_0^a(\mathrm{e}^{-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta}\times\rho)\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta=\pi(1-\mathrm{e}^{-a^2}) \qquad （5）式$$

（4）式、（5）式相结合，得

$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \pi(1-e^{-a^2})$ （6）式

例. 请计算二重积分 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,dxdy$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$、x 轴、y 轴所围成的在第一象限内的闭区域。

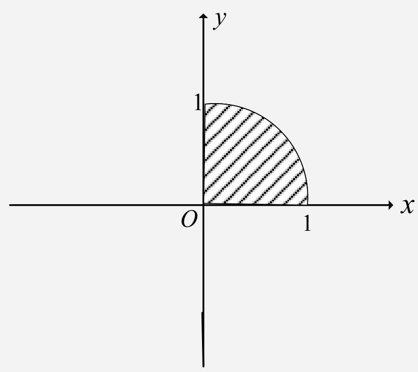
解： 我们画出本题所给的二重积分的积分区域 D 的图。



由于本题所给的二重积分的积分区域 D 是 $\frac{1}{4}$ 圆，所以本题所给的二重积分应该用极坐标系法来做。

第一步. 在平面直角坐标系中把积分区域 D 涂上阴影。

对于本题而言，就是



第二步. 将所给的二重积分 $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ 写为“$\int_a^b[\int_c^d(x,y)\ \rho d\rho]d\theta$”（注意：被积函数中要乘以一个“$\rho$”，别忘了）。

对于本题而言，就是

$\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,dxdy = \int_a^b[\int_c^d(\ln(1+x^2+y^2)\times\rho)\ d\rho]d\theta$ （1）式

第三步. 确定 a、b、c、d。

前面我已经用大量篇幅介绍过了 a、b、c、d 的确定方法，这里就不再赘述了。对于本题而言，有 $a=0$，$b=\frac{\pi}{2}$，$c=0$，$d=1$。

所以有

$\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1(\ln(1+x^2+y^2)\times\rho)\ d\rho]d\theta$ （2）式

第四步. 设 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，并将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入被积函数中。

对于本题而言，我们把 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入被积函数 $(\ln(1+x^2+y^2)\times\rho)$ 中，得

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1(\ln(1+x^2+y^2)\times\rho)d\rho]d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1(\ln(1+\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)\times\rho)d\rho]d\theta$ （3）式

（2）式、（3）式相结合，得

$\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1(\ln(1+\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)\times\rho)\ d\rho]d\theta$ （4）式

第五步. 计算出 $\int_a^b[\int_c^d f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta$ 即可。这大家应该会算吧？也就是说，先算内层的定积分 $\int_c^d f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\mathrm{d}\rho$（就利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算），算完之后把计算出的结果作为外层的定积分的被积函数再算一下外层的定积分就可以了（同样也是利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算）。

对于本题而言，就是要计算出 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1(\ln(1+\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)\times\rho)\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta$。为了能计算出 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1(\ln(1+\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)\times\rho)\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta$，就要先来计算内层的定积分 $\int_0^1(\ln(1+\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)\times\rho)\,\mathrm{d}\rho$。大家一定要注意，由于内层的定积分“d”的后面是 ρ，所以被积函数中的 θ 就要当成常数来处理（不过对于本题而言不用考虑这个，因为一会儿大家就知道了，被积函数中的 θ 可以消去，相当于被积函数中没有 θ）。

$$\begin{aligned}
\int_0^1[\ln(1+\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)\times\rho]\mathrm{d}\rho &= \int_0^1[\ln(1+\rho^2)\times\rho]\mathrm{d}\rho=\int_0^1\ln(1+\rho^2)\,\mathrm{d}(\frac{\rho^2}{2})\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+\rho^2)\,\mathrm{d}(\rho^2)=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+\rho^2)\,\mathrm{d}(1+\rho^2)\\
&=\frac{1}{2}\times\{[\ln(1+\rho^2)\times(1+\rho^2)]\Big|_0^1-\int_0^1(1+\rho^2)\mathrm{d}[\ln(1+\rho^2)]\}\\
&=\frac{1}{2}\times(2\ln 2-\int_0^1\frac{2\rho(1+\rho^2)}{(1+\rho^2)}\mathrm{d}\rho)=\frac{1}{2}\times(2\ln 2-\int_0^1 2\rho\mathrm{d}\rho)\\
&=\frac{1}{2}\times(2\ln 2-2\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho)=\frac{1}{2}\times(2\ln 2-2\times\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^1)\\
&=\frac{1}{2}\times(2\ln 2-1)
\end{aligned}$$

再来算外层的定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{1}{2}\times(2\ln 2-1)]\,\mathrm{d}\theta$。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{1}{2}\times(2\ln 2-1)]\mathrm{d}\theta=[\frac{1}{2}\times(2\ln 2-1)]\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}\theta=[\frac{1}{2}\times(2\ln 2-1)]\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1)$$

综上所述，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1(\ln(1+\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)\times\rho)\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\times(2\ln 2-1) \qquad \text{（5）式}$$

（4）式、（5）式相结合，得

$$\iint_D\ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\times(2\ln 2-1) \qquad \text{（6）式}$$

7.4　二重积分的三条性质

性质 1. 设 a 为常数，则 $\iint_D a\times f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\times\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

例. 无论积分区域 D 是什么区域，都有 $\iint_D 3\sin^2 x\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\times\iint_D\sin^2 x\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

例. 无论积分区域 D 是什么区域，都有 $\iint_D 9xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=9\times\iint_D 9xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

性质 2. $\iint_D[f_1(x,y)\pm f_2(x,y)\pm\cdots\pm f_n(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f_1(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\pm\iint_D f_2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\pm\cdots\pm\iint_D f_n(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

例. 无论积分区域 D 是什么区域，都有 $\iint_D(6xy-y\ln x+4x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 6xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D y\ln x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D 4x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

例. 无论积分区域 D 是什么区域，都有
$\iint_D(y\arctan x-\ln x\times\sin y+4x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(y\arctan x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D(\ln x\times\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D 4x\sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

性质 3. 如果区域 D_1 和区域 D_2 共同组成了区域 D，则

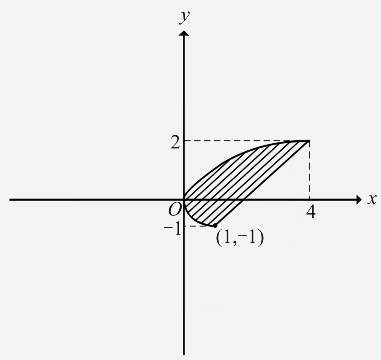
$$\iint\limits_{D} f_1(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} f_1(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} f_1(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{。}$$

性质 2 和性质 3 都是可拆性，性质 2 说的是被积函数的可拆性，性质 3 说的是积分区域的可拆性。

例. 请计算 $\iint\limits_{D} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y^2 = x$、$y = x-2$ 所围成的闭区域。

解： 本题让计算的是一个二重积分。我们现在先来判断一下该二重积分到底是应该用直角坐标系法还是极坐标系法来做。

我们画出该二重积分的积分区域 D 的图。



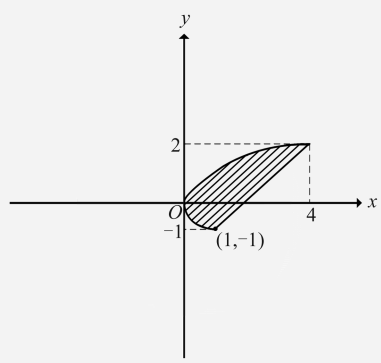
由于该二重积分的积分区域 D 不是圆、半圆或 $\dfrac{1}{4}$ 圆，所以该二重积分应该用直角坐标系法来做。

好，现在我们已经确定了该二重积分应该用直角坐标系法来做。之前刚刚讲完，直角坐标系法又分“先 y 后 x 法”和“先 x 后 y 法”两种，我们既可以用“先 x 后 y 法”来做，也可以用“先 y 后 x 法”来做。

如果我们采用的是“先 x 后 y 法”的话，则做法如下。

第一步. 在平面直角坐标系中把积分区域 D 涂上阴影。

对于本题而言就是



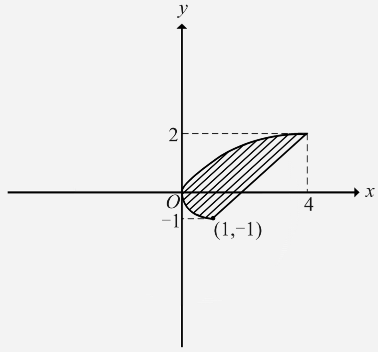
第二步. 将所给的二重积分 $\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写为“$\int_a^b [\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$”。

对于本题而言就是

$$\iint\limits_{D} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b [\int_c^d xy\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y \qquad \text{（1）式}$$

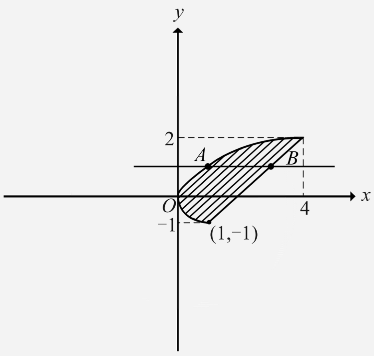
第三步. 确定 a、b、c、d。具体的确定方法是：看一下第一步画出的阴影区域，阴影区域中纵坐标的最小值即 a，阴影区域中纵坐标的最大值即 b。然后，画一条与 x 轴平行且与积分区域 D 相交的直线，有无数种画法对吧？但无论哪种画法，这条与 x 轴平行的直线在积分区域 D 中的部分肯定是一条线段。这条线段上横坐标的最小值就是 c，这条线段上横坐标的最大值就是 d。

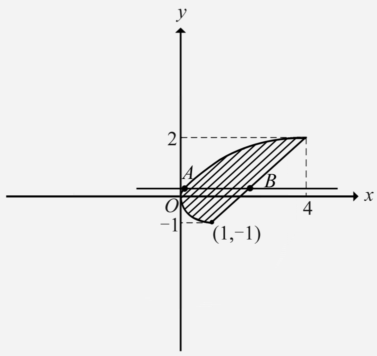
对于本题而言，我们看一下第一步画出的阴影区域

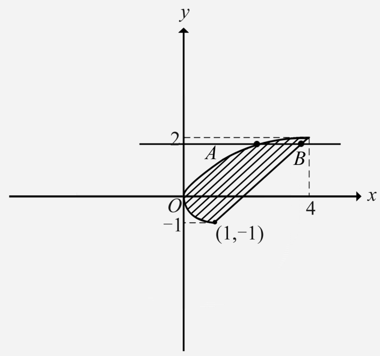


从图中我们可以很明显地看出，阴影区域中纵坐标的最小值是 -1，阴影区域中纵坐标的最大值是 2，所以 $a=-1$，$b=2$。

好，接着我们画一条与 x 轴平行且与积分区域 D 相交的直线。







大家看见了吧，这条直线有很多种画法。但无论哪种画法，这条与 x 轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。这条线段上横坐标的最小值肯定是在 A 点取到，这条线段上横坐标的最大值肯定是在 B 点取到（当然，从图中我们可以很明显地看出：由于这条直线有很多种画法，所以 A 点的横坐标、B 点的横坐标都不是定值）。我们只需求出 A 点和 B 点的横坐标就可以了。很显然，A 点的横坐标 $x=y^2$，B 点的横坐标 $x=y+2$。所以有 $c=y^2$，$d=y+2$。

综上所述，有 $a=-1$，$b=2$，$c=y^2$，$d=y+2$，所以

$$\int_a^b[\int_c^d xy\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y=\int_{-1}^2[\int_{y^2}^{y+2} xy\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^2[\int_{y^2}^{y+2} xy\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y \qquad （3）式$$

第四步．计算出 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 即可。这大家应该会算吧？也就是说先算内层的定积分 $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x$（就利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算），算完之后把计算出的结果作为外层的定积分的被积函数再算一下外层的定积分就可以了（同样也是利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算）。

对于本题而言，最终就是要计算出 $\int_{-1}^2[\int_{y^2}^{y+2} xy\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$。

为了计算出 $\int_{-1}^2[\int_{y^2}^{y+2} xy\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$，我们先来计算内层的定积分 $\int_{y^2}^{y+2} xy\,\mathrm{d}x$。大家一定要注意一点，那就是：大家看“$\int_{y^2}^{y+2} xy\,\mathrm{d}x$”中的“d”的后面写的是哪个字母？很明显写的是“$x$”，这说明是对“$x$”积分。既然是对“$x$”积分，所以被积函数中的 y 就可以被当成常数。通过计算可得

$$\int_{y^2}^{y+2} xy\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[y(y+2)^2-y^5]$$

好，现在我们再来计算外层的定积分，也就是计算 $\int_{-1}^2\frac{1}{2}[y(y+2)^2-y^5]\,\mathrm{d}y$。

通过计算可得

$$\int_{-1}^2\frac{1}{2}[y(y+2)^2-y^5]\mathrm{d}y=\frac{45}{8}$$

综上所述，有

$$\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}[\int_{y^2}^{y+2}xy\mathrm{d}x]\mathrm{d}y=\frac{45}{8} \qquad (4)式$$

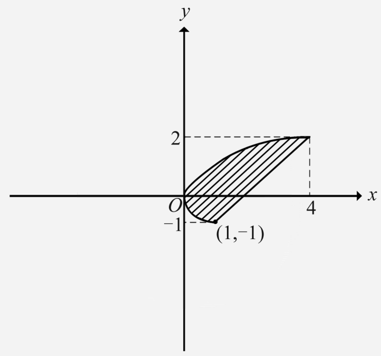
（3）式、（4）式相结合，得

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{45}{8} \qquad (5)式$$

如果我们采用的是“先 y 后 x 法”的话，则做法如下。

第一步. 在平面直角坐标系中把积分区域 D 涂上阴影。

对于本题而言就是



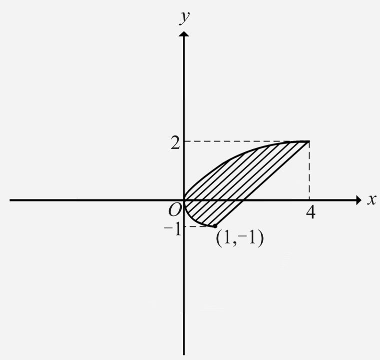
第二步. 将所给的二重积分 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写为“$\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$”。

对于本题而言就是

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b[\int_c^d xy\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \qquad (6)式$$

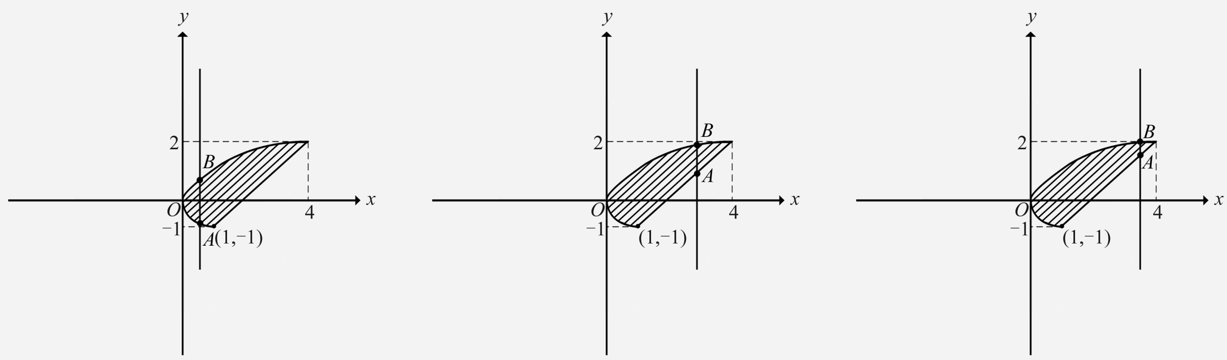
第三步. 确定 a、b、c、d。具体的确定方法是：看一下第一步画出的阴影区域，阴影区域中横坐标的最小值即为 a，阴影区域中横坐标的最大值即为 b。然后，画一条与 y 轴平行且与积分区域 D 相交的直线，有无数种画法对吧？但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在积分区域 D 中的部分肯定是一条线段。这条线段上纵坐标的最小值就是 c，这条线段上纵坐标的最大值就是 d。

对于本题而言，我们看一下第一步画出的阴影区域



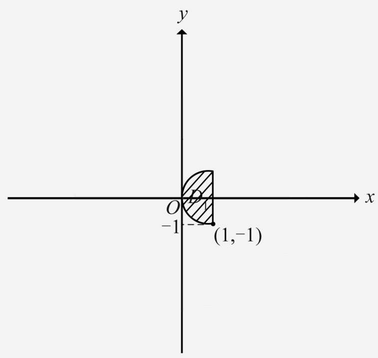
从图中我们可以很明显地看出，阴影区域中横坐标的最小值是 0，阴影区域中横坐标的最大值是 4，所以 $a=0$，$b=4$。

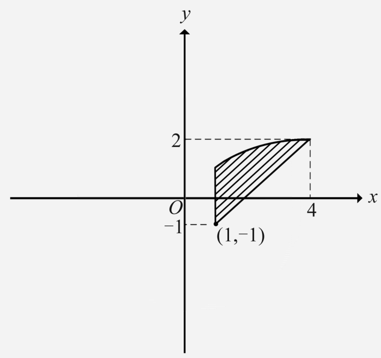
好，接着我们画一条与 y 轴平行且与积分区域 D 相交的直线。



大家看见了吧，这条直线有很多种画法。但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。这条线段上纵坐标的最小值肯定是在 A 点取到，这条线段上纵坐标的最大值肯定是在 B 点取到（当然，从图中我们可以很明显地看出：由于这条直线有很多种画法，所以 A 点、B 点的纵坐标并不是一个定值）。我们只需求出 A 点和 B 点的纵坐标就可以了。

可是，问题来了。之前咱们做的那些题，虽然也不是定值，但是那个点却始终是在一条线上，可是现在不行了。具体来说就是：B 点的确是始终在一条线（$x=y^2$）上，可 A 点就不是了，A 点有可能在 $x=y^2$ 上，也有可能在 $y=x-2$ 上。难道说这题就没法用“先 y 后 x 法”做了吗？当然能做。怎么做？就利用本节所讲的性质 3 来做，即我们把积分区域 D 分为 D_1 和 D_2 两块（D_1 和 D_2 如下图所示），这样的话刚刚的问题就不存在了。这样一来，本题的问题“请计算 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$”就变成了“请计算 $\iint\limits_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$”，然后我们就可以用“先 y 后 x 法”分别算一下这两个积分，最后加起来就可以了。





下面是计算过程，我就略写了，大家应该都会。

$$\begin{aligned}\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_0^1\Big[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x+\int_1^4\Big[\int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x\\ &=\frac{45}{8}\end{aligned}$$

7.5　二重积分是一个数

大家一定要知道，二重积分是一个数。别看这么简单的一个知识点，也能出考题。我们现在就来看一道题。

例. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，且满足 $3+\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(x,y)$，其中 D 是由 x 轴、y 轴、$x+y=2$ 所围成的闭区域。

解： 由于二重积分是一个数，所以我们设 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$（$A$ 为数）。因而有

$3+A=f(x,y)$　　　　（1）式

我们将（1）式的等式左右两侧同时在区域 D 上进行二重积分，得

$\iint\limits_D (3+A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　　　（2）式

由于 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$，所以结合（2）式有

$\iint\limits_D (3+A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$　　　　（3）式

根据 7.4 节中所讲的性质 2 可得

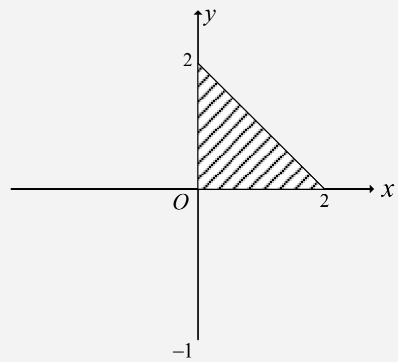
$\iint\limits_D 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D A\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$　　　　（4）式

由于 3 是常数，A 也是常数，根据 7.4 节中所讲的性质 1 可得

$3\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y+A\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$　　　　（5）式

我们现在来计算一下 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，怎么计算呢？我在 7.2 节中给大家讲过，当二重积分的被积函数为 1 时，二重积分的值就是积分区域 D 的面积。

所以我们现在在平面直角坐标系中画出积分区域 D，即



由上图可以很明显地看出来，积分区域 D 的面积 $=\dfrac{2\times2}{2}=2$，所以 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2$。现在将 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2$ 代入（5）式，得

$6+2A=A$ （6）式

由（6）式解得 $A=-6$。

将 $A=-6$ 代入（1）式可得

$f(x,y)=3+(-6)=3-6=-3$

7.6 求解被积函数中含绝对值的二重积分

在考研数学中，经常能遇到含绝对值的二重积分，那么这种二重积分应该如何去计算呢？本节要给大家讲的就是求解被积函数中含绝对值的二重积分的方法。

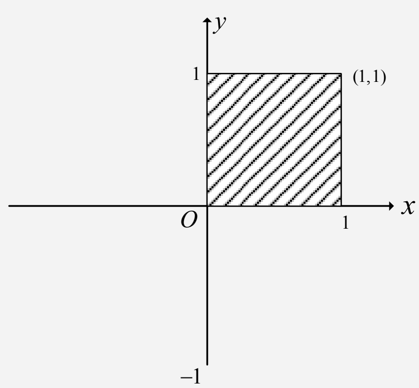
求解被积函数中含绝对值的二重积分的方法很简单，那就是：**利用 7.4 节中所讲的性质 3 将积分区域拆了即可。那么到底如何拆呢？就令绝对值里面的部分等于 0 就可以了。**

我们来看相应的例题。

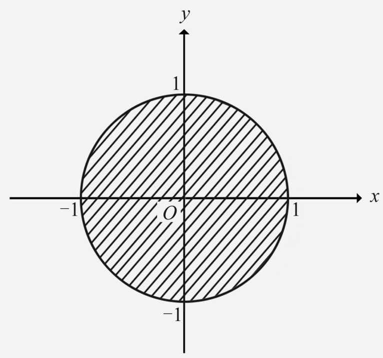
例. 计算二重积分 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 D 是由 $x=0$、$x=1$、$y=0$、$y=1$ 所围成的闭区域。

解： 由于本题让计算的二重积分中含有绝对值，所以我们应该用本节所讲的方法来求解，也就是说我们要利用 7.4 节中所讲的性质 3 将积分区域拆开，那么到底怎么拆呢？

我们先在平面直角坐标系中画出积分区域 D。即

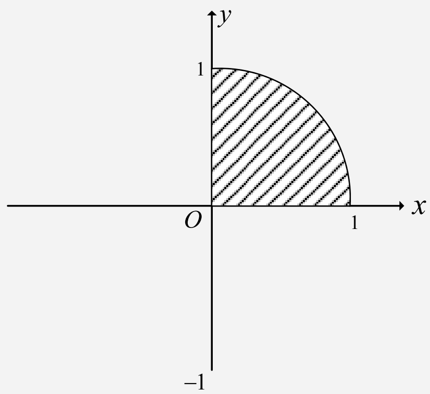


好，我们现在令绝对值里面的部分等于 0。针对本题而言，就是令 $x^2+y^2-1=0$，解得 $x^2+y^2=1$。由此可知，当 $x^2+y^2<1$ 时，$|x^2+y^2-1|=1-(x^2+y^2)$；当 $x^2+y^2>1$ 时，$|x^2+y^2-1|=(x^2+y^2)-1$。画个图就是

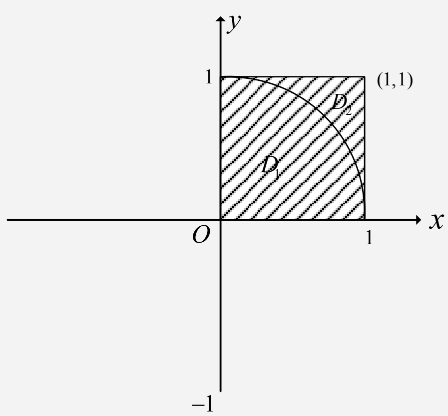


大家看，当 x 、 y 在阴影区域内取值时（阴影区域内属于 $x^2+y^2<1$），$\left|x^2+y^2-1\right|=1-(x^2+y^2)$；当 x 、 y 在阴影区域外取值时（阴影区域外属于 $x^2+y^2>1$），$\left|x^2+y^2-1\right|=(x^2+y^2)-1$ 。

好，现在来看看刚刚画的这个图与阴影区域 D 的公共部分是哪个区域。很明显公共部分是



所以说，本题所给的积分区域 D 应该拆为如下两个区域。



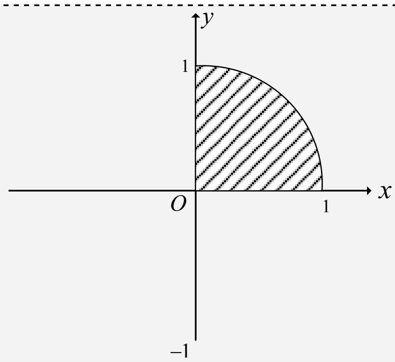
也就是说

$$\iint\limits_{D}\left|x^2+y^2-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

好，这样绝对值就没了。现在我们只需计算一下 $\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 和 $\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，然后把这两者加起来就可以了（注意：本节所讲的知识点到目前为止就用完了，接下来就是计算，用到的知识点就是以前讲的了）。

我们先来计算 $\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 。

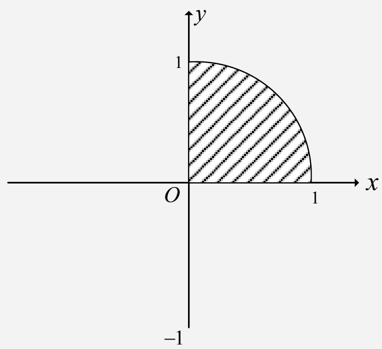
画出积分区域 D_1 的图。



由于积分区域 D_1 是 $\frac{1}{4}$ 圆，所以该二重积分应该用极坐标系法来做。

第一步．在平面直角坐标系中把积分区域 D 涂上阴影。

对于本题而言，就是



第二步．将所给的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写为“$\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\ \rho\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta$”（注意：被积函数中要乘以一个“$\rho$”，别忘了）。

对于本题而言，就是

$$\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b[\int_c^d[(1-x^2-y^2)\times\rho]\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta \qquad (1)式$$

第三步．确定 a、b、c、d。

前面我已经用大量篇幅介绍过了 a、b、c、d 的确定方法，这里就不再赘述了。对于本题而言，有 $a=0$，$b=\frac{\pi}{2}$，$c=0$，$d=1$。

所以有

$$\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1[(1-x^2-y^2)\times\rho]\ \mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta \qquad (2)式$$

第四步．设 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，并将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入被积函数中。

对于本题而言，我们把 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入被积函数 $[(1-x^2-y^2)\times\rho]$ 中，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1[(1-x^2-y^2)\times\rho]\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1[(1-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta)\times\rho]\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta \qquad (3)式$$

（2）式、（3）式相结合，得

$$\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1[(1-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta)\times\rho]\ \mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta \qquad (4)式$$

第五步．计算出 $\int_a^b[\int_c^d f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\ \rho\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta$ 即可。这大家应该会算吧？也就是说先算内层的定积分 $\int_c^d f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\mathrm{d}\rho$（就利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算），算完之后把计算出的结果作为外层的定积分的被积函数再算一下外层的定积分就可以了（同样也是利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算）。

对于本题而言，就是要计算出 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1[(1-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta)\times\rho]\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta$。为了能计算出 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1[(1-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta)\times\rho]\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta$，就要先来计算内层的定积分 $\int_0^1[(1-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta)\times\rho]\mathrm{d}\rho$。大家一定要注意，由于内层的定积分“d”的后面是 ρ，所以被积函数中的 θ 就要当成常数来处理（不过对于本题而言不用考虑这个，因为一会儿

大家就知道了，被积函数中的θ可以消去，相当于被积函数中没有θ）。

$$\int_0^1[(1-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta)\times\rho]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^1[(1-\rho^2)\times\rho]\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^1[(\rho-\rho^3)\ \mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho-\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^1-\frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}$$

再来算外层的定积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\mathrm{d}\theta$。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\times(\frac{\pi}{2}-0)=\frac{\pi}{8}$$

综上所述，有

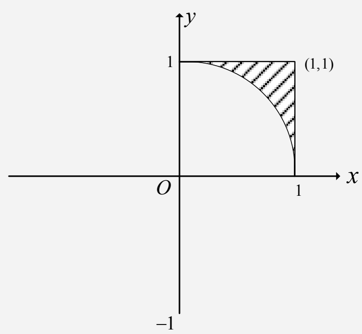
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1[(1-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta)\times\rho]\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{8} \qquad （5）式$$

（4）式、（5）式相结合，得

$$\iint\limits_D(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{8} \qquad （6）式$$

我们再来计算$\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

画出积分区域D_2的图。

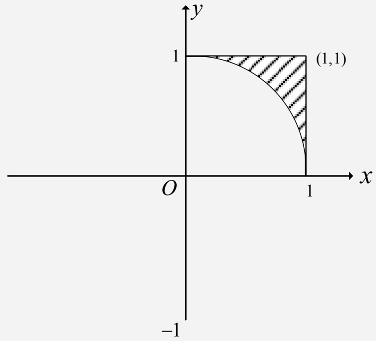


由于积分区域D_2不是圆、半圆或$\frac{1}{4}$圆，所以该二重积分应该用直角坐标系法来做。

好，现在我们已经确定了该二重积分应该用直角坐标系法来做。直角坐标系法又分“先y后x法”和“先x后y法”两种，我们既可以用“先y后x法”来做，也可以用“先x后y法”来做。对于本题而言，我们就用“先y后x法”来做吧。

第一步．在平面直角坐标系中把积分区域D涂上阴影。

对于本题而言就是



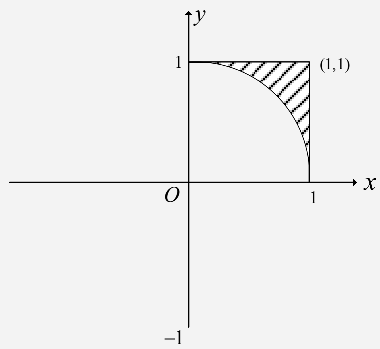
第二步. 将所给的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写为“$\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$”。

对于本题而言就是

$$\iint\limits_D (x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b[\int_c^d (x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \qquad （7）式$$

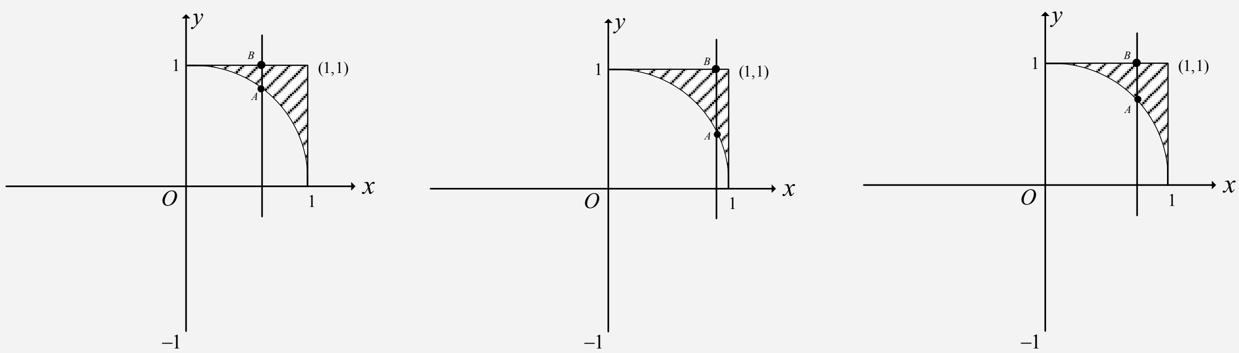
第三步. 确定 a、b、c、d。具体的确定方法是：看一下第一步画出的阴影区域，阴影区域中横坐标的最小值即为 a，阴影区域中横坐标的最大值即为 b。然后，画一条与 y 轴平行且与积分区域 D 相交的直线，有无数种画法对吧？但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在积分区域 D 中的部分肯定是一条线段。这条线段上纵坐标的最小值就是 c，这条线段上纵坐标的最大值就是 d。

对于本题而言，我们看一下第一步画出的阴影区域



从图中我们可以很明显地看出，阴影区域中横坐标的最小值是 0，阴影区域中横坐标的最大值是 1，所以 $a=0$，$b=1$。

好，接着我们画一条与 y 轴平行且与积分区域 D 相交的直线。



大家看见了吧，这条直线有很多种画法。但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。这条线段上纵坐标的最小值肯定是在 A 点取到，这条线段上纵坐标的最大值肯定是在 B 点取到（当然，从图中我们可以很明显地看出：由于这条直线有很多种画法，所以 A 点的纵坐标并不是一个定值）。我们只需求出 A 点和 B 点的纵坐标就可以了。很显然，A 点的纵坐标 $y=\sqrt{1-x^2}$，B 点的纵坐标 $y=1$。所以有 $c=\sqrt{1-x^2}$，$d=1$。

综上所述，有 $a=0$，$b=1$，$c=\sqrt{1-x^2}$，$d=1$，所以

$$\int_a^b[\int_c^d (x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\int_0^1[\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 (x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \qquad （8）式$$

（7）式、（8）式相结合，得

$$\iint\limits_D (x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1[\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 (x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \qquad （9）式$$

第四步. 计算出 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ 即可。这大家应该会算吧？也就是说先算内层的定积分 $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$（就利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算），算完之后把计算出的结果作为外层的定积分的被积函数再算一下外层的定积分就可以了（同样也是利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算）。

对于本题而言，最终就是要计算出 $\int_0^1[\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 (x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$。

为了计算出 $\int_0^1[\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 (x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$，我们先来计算内层的定积分 $\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 (x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}y$。大家一定要注意一点，那就是：大家看“$\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 (x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}y$”中的“d”的后面写的是哪个字母？很明显写的是“$y$”，这说明是对“$y$”

积分。既然是对“y”积分，所以被积函数中的x就可以被当成常数。因而有

$$\int_{\sqrt{1-x^2}}^{1}(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_{\sqrt{1-x^2}}^{1}(x^2-1)\,\mathrm{d}y+\int_{\sqrt{1-x^2}}^{1}y^2\,\mathrm{d}y$$
$$=(x^2-1)\times(1-\sqrt{1-x^2})+\frac{y^3}{3}\bigg|_{\sqrt{1-x^2}}^{1}$$
$$=(x^2-1)\times(1-\sqrt{1-x^2})+\frac{y^3}{3}\bigg|_{\sqrt{1-x^2}}^{1}$$
$$=(x^2-1)\times(1-\sqrt{1-x^2})+\frac{1}{3}-\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

好，现在我们再来计算外层的定积分，也就是计算$\int_0^1[(x^2-1)\times(1-\sqrt{1-x^2})+\frac{1}{3}-\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}]\,\mathrm{d}x$。

$$\int_1^2(\frac{x^3}{2}-\frac{x}{2})\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{x^3}{2}\mathrm{d}x-\int_1^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2x^3\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_1^2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\int_1^2x^3\mathrm{d}x-\int_1^2x\mathrm{d}x)$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{x^4}{4}\bigg|_1^2-\frac{x^2}{2}\bigg|_1^2)=\frac{1}{2}\times[(\frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4})-(\frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2})]=\frac{1}{2}\times[\frac{15}{4}-\frac{6}{4}]=\frac{9}{8}$$

通过计算可知

$$\int_0^1[(x^2-1)\times(1-\sqrt{1-x^2})+\frac{1}{3}-\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}]\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}$$

综上所述，有

$$\int_0^1[\int_{\sqrt{1-x^2}}^1(x^2+y^2-1)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8} \qquad \text{（10）式}$$

（9）式、（10）式相结合，得

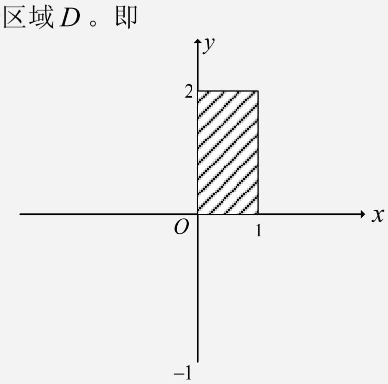
$$\iint_D(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8} \qquad \text{（11）式}$$

好，现在我们已经算出了$\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{8}$和$\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}$，所以本题最终的答案为$\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$。

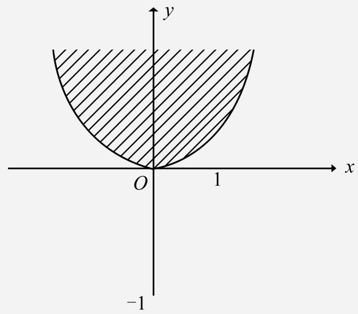
例. 计算二重积分$\iint_D\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域$D$是由$x=0$、$x=1$、$y=0$、$y=2$所围成的闭区域。

解： 由于本题让计算的二重积分中含有绝对值，所以我们应该用本节所讲的方法来求解，也就是说要利用 7.4 节中所讲的性质 3 将积分区域拆开，那么到底怎么拆呢？

我们先在平面直角坐标系中画出积分区域D。即

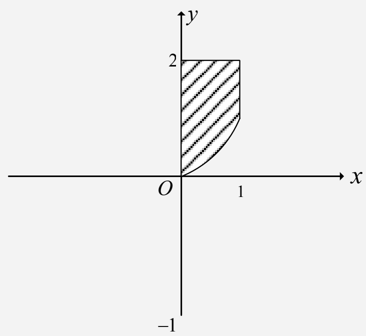


好，我们现在令绝对值里面的部分等于 0。针对本题而言，就是令$y-x^2=0$，解得$y=x^2$。由此可知，当$y>x^2$时，$|y-x^2|=y-x^2$；当$y<x^2$时，$|y-x^2|=x^2-y$。画个图就是

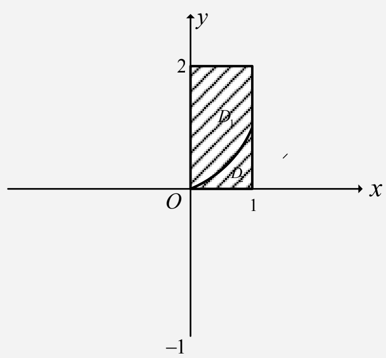


大家看，当 x 、y 在阴影区域内取值时（阴影区域内属于 $y > x^2$，阴影区域无限大），$\left|y-x^2\right| = y-x^2$；当 x 、y 在阴影区域外取值时（阴影区域外属于 $y < x^2$），$\left|y-x^2\right| = x^2-y$ 。

好，现在来看看刚刚画的这个图与阴影区域 D 的公共部分是哪个区域。很明显公共部分是



所以说，本题所给的积分区域 D 应该拆为如下两个区域。



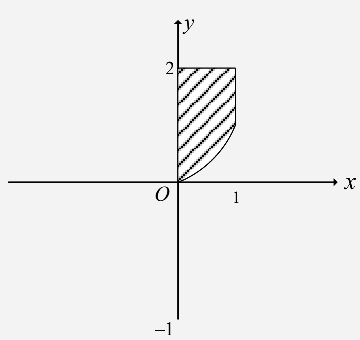
也就是说

$$\iint\limits_{D}\sqrt{\left|y-x^2\right|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

好，这样绝对值就没了。现在我们只需计算一下 $\iint\limits_{D_1}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 和 $\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，然后把这两者加起来就可以了（注意：本节所讲的知识点到目前为止就用完了，接下来就是计算，用到的知识点就是以前讲的了）。

我们先来计算 $\iint\limits_{D_1}\sqrt{y-x^2}dxdy$ 。

画出积分区域 D_1 的图。

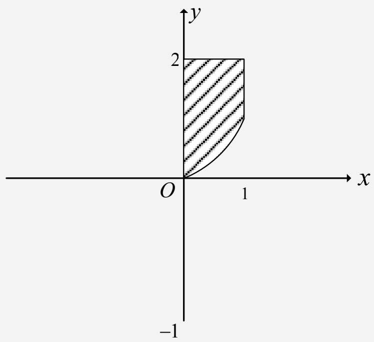


由于积分区域 D_1 不是圆、半圆或 $\frac{1}{4}$ 圆，所以该二重积分应该用直角坐标系法来做。

好，现在我们已经确定了该二重积分应该用直角坐标系法来做，直角坐标系法又分“先 y 后 x 法”和“先 x 后 y 法”两种，我们既可以用“先 y 后 x 法”来做，也可以用“先 x 后 y 法”来做。对于本题而言，我们就用“先 y 后 x 法”来做吧。

第一步．在平面直角坐标系中把积分区域 D 涂上阴影。

对于本题而言就是



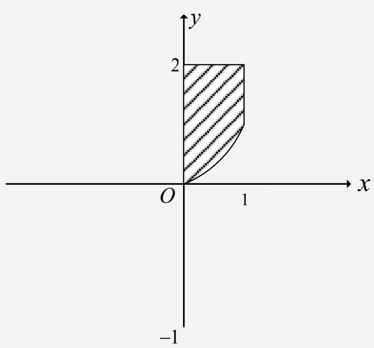
第二步．将所给的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写为“$\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$”。

对于本题而言就是

$$\iint\limits_{D_1}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b[\int_c^d\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \qquad \text{（1）式}$$

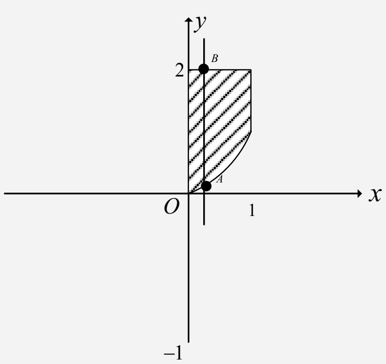
第三步．确定 a、b、c、d。具体的确定方法是：看一下第一步画出的阴影区域，阴影区域中横坐标的最小值即为 a，阴影区域中横坐标的最大值即为 b。然后，画一条与 y 轴平行且与积分区域 D 相交的直线，有无数种画法对吧？但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在积分区域 D 中的部分肯定是一条线段。这条线段上纵坐标的最小值就是 c，这条线段上纵坐标的最大值就是 d。

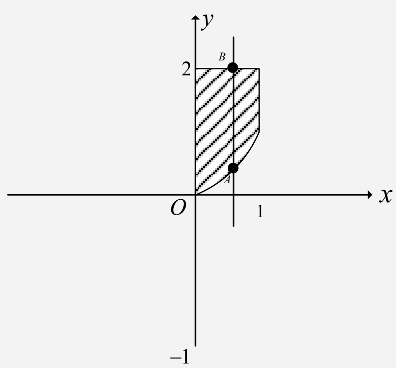
对于本题而言，我们看一下第一步画出的阴影区域

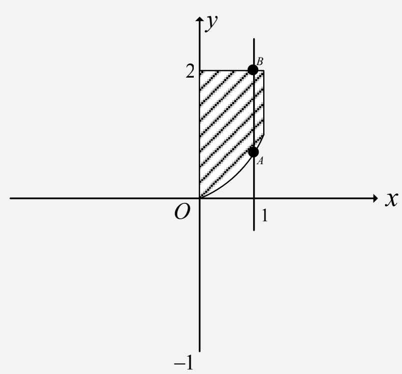


从图中我们可以很明显地看出，阴影区域中横坐标的最小值是 0，阴影区域中横坐标的最大值是 1，所以 $a=0$，$b=1$。

好，接着我们画一条与 y 轴平行且与积分区域 D 相交的直线。







大家看见了吧，这条直线有很多种画法。但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。这条线段上纵坐标的最小值肯定是在 A 点取到，这条线段上纵坐标的最大值肯定是在 B 点取到（当然，

从图中我们可以很明显地看出：由于这条直线有很多种画法，所以 A 点的纵坐标并不是一个定值）。我们只需求出 A 点和 B 点的纵坐标就可以了。很显然，A 点的纵坐标 $y=x^2$，B 点的纵坐标 $y=2$。所以有 $c=x^2$，$d=2$。

综上所述，有 $a=0$，$b=1$ $c=x^2$，$d=2$，所以

$$\int_a^b[\int_c^d\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\int_0^1[\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\iint\limits_{D_1}\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1[\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \qquad （3）式$$

第四步. 计算出 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ 即可。这大家应该会算吧？也就是说先算内层的定积分 $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$（就利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算），算完之后把计算出的结果作为外层的定积分的被积函数再算一下外层的定积分就可以了（同样也是利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算）。

对于本题而言，最终就是要计算出 $\int_0^1[\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$。

为了计算出 $\int_0^1[\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$，我们先来计算内层的定积分 $\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}y$。大家一定要注意一点，那就是：大家看"$\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}y$"中的"d"的后面写的是哪个字母？很明显写的是"$y$"，这说明是对"$y$"积分。既然是对"$y$"积分，所以被积函数中的 x 就可以被当成常数。因而有

$$\begin{aligned}&\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}y\\&=\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}(y-x^2)\\&=\int_{x^2}^2(y-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(y-x^2)\\&=\left.\frac{(y-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_{x^2}^2\\&=\frac{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{(x^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\\&=\frac{2}{3}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

好，现在我们再来计算外层的定积分，也就是计算 $\int_0^1\frac{2}{3}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$。

$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{2}{3}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{3}\int_0^1(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

综上所述，有

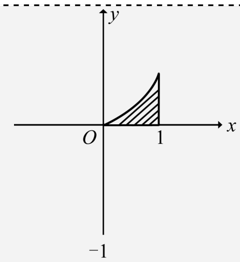
$$\int_0^1[\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3} \qquad （4）式$$

（3）式、（4）式相结合，得

$$\iint\limits_{D_1}\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3} \qquad （5）式$$

我们再来计算 $\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

画出积分区域 D_2 的图。

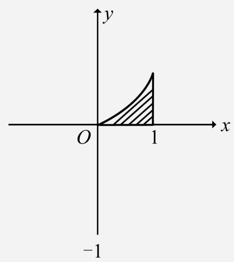


由于积分区域 D_2 不是圆、半圆或 $\dfrac{1}{4}$ 圆，所以该二重积分应该用直角坐标系法来做。

好，现在我们已经确定了该二重积分应该用直角坐标系法来做，直角坐标系法又分“先 y 后 x 法”和“先 x 后 y 法”两种，我们既可以用“先 y 后 x 法”来做，也可以用“先 x 后 y 法”来做。对于本题而言，我们就用“先 y 后 x 法”来做吧。

第一步. 在平面直角坐标系中把积分区域 D 涂上阴影。

对于本题而言就是



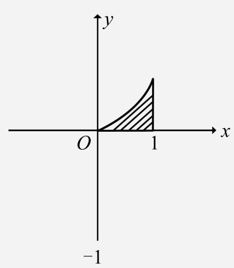
第二步. 将所给的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写为“$\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$”。

对于本题而言就是

$$\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b[\int_c^d\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \qquad （6）式$$

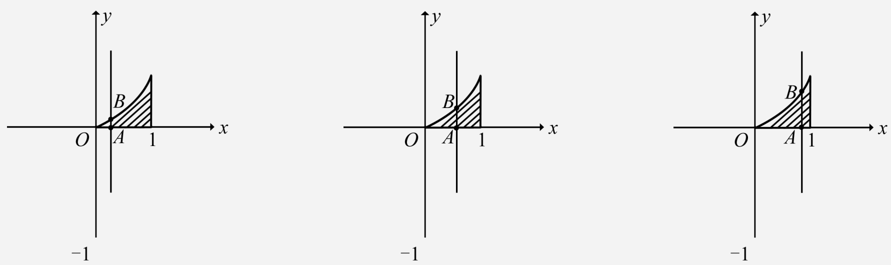
第三步. 确定 a、b、c、d。具体的确定方法是：看一下第一步画出的阴影区域，阴影区域中横坐标的最小值即为 a，阴影区域中横坐标的最大值即为 b。然后，画一条与 y 轴平行且与积分区域 D 相交的直线，有无数种画法对吧？但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在积分区域 D 中的部分肯定是一条线段。这条线段上纵坐标的最小值就是 c，这条线段上纵坐标的最大值就是 d。

对于本题而言，我们看一下第一步画出的阴影区域



从图中我们可以很明显地看出，阴影区域中横坐标的最小值是 0，阴影区域中横坐标的最大值是 1，所以 $a=0$，$b=1$。

好，接着我们画一条与 y 轴平行且与积分区域 D 相交的直线。



大家看见了吧，这条直线有很多种画法。但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。这条线段上纵坐标的最小值肯定是在 A 点取到，这条线段上纵坐标的最大值肯定是在 B 点取到（当然，从图中我们可以很明显地看出：由于这条直线有很多种画法，所以 B 点的纵坐标并不是一个定值）。我们只需求出 A 点和 B 点的纵坐标就可以了。很显然，A 点的纵坐标 $y=0$，B 点的纵坐标 $y=x^2$。所以有 $c=0$，$d=x^2$。

综上所述，有 $a=0$，$b=1$，$c=0$，$d=x^2$，所以

$$\int_a^b[\int_c^d\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\int_0^1[\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \qquad （7）式$$

（6）式、（7）式相结合，得

$$\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1[\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \qquad （8）式$$

第四步．计算出 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ 即可。这大家应该会算吧？也就是说先算内层的定积分 $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$（就利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算），算完之后把计算出的结果作为外层的定积分的被积函数再算一下外层的定积分就可以了（同样也是利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算）。

对于本题而言，最终就是要计算出 $\int_0^1[\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$。

为了计算出 $\int_0^1[\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$，我们先来计算内层的定积分 $\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y$。大家一定要注意一点，那就是：大家看“$\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y$”中的“d”的后面写的是哪个字母？很明显写的是“$y$”，这说明是对“$y$”积分。既然是对“$y$”积分，所以被积函数中的 x 就可以被当成常数。因而有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y\\
=&-\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}(-y)\\
=&-\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}(x^2-y)\\
=&-\int_0^{x^2}(x^2-y)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(x^2-y)\\
=&-\left.\frac{(x^2-y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{x^2}\\
=&-[\frac{(x^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{(x^2-0)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}]\\
=&\frac{2}{3}x^3
\end{aligned}$$

好，现在我们再来计算外层的定积分，也就是计算 $\int_0^1\frac{2}{3}x^3\,\mathrm{d}x$。

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\frac{2}{3}x^3\mathrm{d}x\\
=&\frac{2}{3}\int_0^1x^3\mathrm{d}x\\
=&\frac{2}{3}\times\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1\\
=&\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\\
=&\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

综上所述，有

$$\int_0^1[\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\frac{1}{6} \qquad （9）式$$

（8）式、（9）式相结合，得

$\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{6}$　　　　（10）式

好，现在我们已经算出了 $\iint\limits_{D_1}\sqrt{y^2-x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{3}$ 和 $\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{6}$，所以本题最终的答案为 $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{5}{6}$。

7.7　二重积分的对称性

本节要给大家讲一个二重积分的重要性质，那就是二重积分的对称性。二重积分的对称性如下：

设 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，区域 D 关于 x 轴对称，则

（1）若 $f(x,y)$ 对 y 为奇函数（即 $f(x,-y)=-f(x,y)$），则 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$。

（2）若 $f(x,y)$ 对 y 为偶函数（即 $f(x,-y)=f(x,y)$），则 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（注：区域 D_1 为区域 D 在 x 轴上侧的部分）。

设 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，区域 D 关于 y 轴对称，则

（3）若 $f(x,y)$ 对 x 为奇函数（即 $f(-x,y)=-f(x,y)$），则 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$。

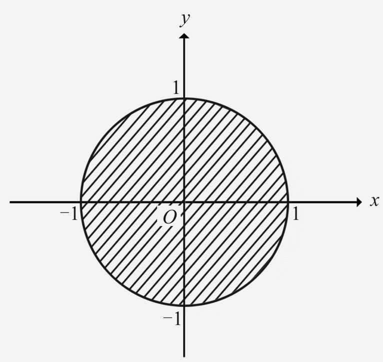
（4）若 $f(x,y)$ 对 x 为偶函数（即 $f(-x,y)=f(x,y)$），则 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（注：区域 D_1 为区域 D 在 y 轴右侧的部分）。

好，二重积分的对称性已经给大家讲完了，我们来看几道例题。

例. 请计算二重积分 $\iint\limits_{D}xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 D 是由 $x^2+y^2=1$ 所围成的闭区域。

解： 如果我没有给大家讲本节的内容的话，那么大家只能用极坐标系法来计算这个二重积分。但是现在我们就可以用本节所讲的知识来做这道题。

先在平面直角坐标系中画出积分区域 D。



从图中我们可以明显地看出来，积分区域 D 是关于 x 轴对称的，也是关于 y 轴对称的。

好，我们现在来看被积函数 $f(x,y)$。

$f(-x,y)=-xy^2$

$-f(x,y)=-xy^2$

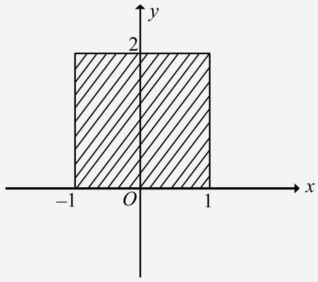
所以有 $f(-x,y)=-f(x,y)$，被积函数 $f(x,y)$ 对 x 为奇函数。

综上所述，由于积分区域 D 关于 y 轴对称，并且被积函数 $f(x,y)$ 对 x 为奇函数，所以有 $\iint\limits_{D}xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$。

例. 请计算二重积分 $\iint\limits_{D}y\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 D 是由 $x=-1$、$x=1$、$y=0$、$y=2$ 所围成的闭区域。

解： 如果我没有给大家讲本节的内容的话，那么大家只能用直角坐标系法来计算这个二重积分。但是现在我们就可以用本节所讲的知识来做这道题。

先在平面直角坐标系中画出积分区域 D。



从图中我们可以明显地看出来，积分区域 D 是关于 y 轴对称的。

好，我们现在来看被积函数 $f(x,y)$ 。

$f(-x,y)=y\sin(-x)=-y\sin x$

$-f(x,y)=-y\sin x$

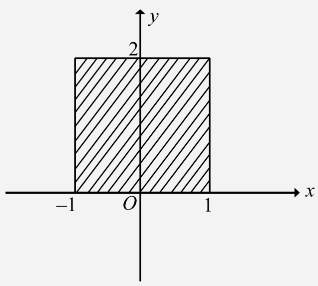
所以有 $f(-x,y)=-f(x,y)$ ，被积函数 $f(x,y)$ 对 x 为奇函数。

综上所述，由于积分区域 D 关于 y 轴对称，并且被积函数 $f(x,y)$ 对 x 为奇函数，所以有 $\iint\limits_D y\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$ 。

例. 请计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中积分区域 D 是由 $x=-1$ 、 $x=1$ 、 $y=0$ 、 $y=2$ 所围成的闭区域。

解：如果我没有给大家讲本节的内容的话，那么大家只能用直角坐标系法来计算这个二重积分。但是现在我们就可以用本节所讲的知识来做这道题。

先在平面直角坐标系中画出积分区域 D 。



从图中我们可以明显地看出来，积分区域 D 是关于 y 轴对称的。

好，我们现在来看被积函数 $f(x,y)$ 。

$f(-x,y)=-xy$

$-f(x,y)=-xy$

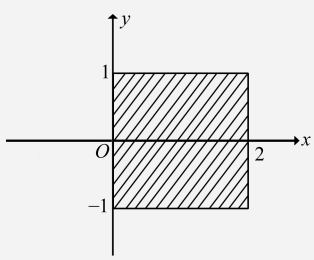
所以有 $f(-x,y)=-f(x,y)$ ，被积函数 $f(x,y)$ 对 x 为奇函数。

综上所述，由于积分区域 D 关于 y 轴对称，并且被积函数 $f(x,y)$ 对 x 为奇函数，所以有 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$。

例. 请计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中积分区域 D 是由 $x=0$ 、 $x=2$ 、 $y=-1$ 、 $y=1$ 所围成的闭区域。

解： 如果我没有给大家讲本节的内容的话，那么大家只能用直角坐标系法来计算这个二重积分。但是现在我们就可以用本节所讲的知识来做这道题。

先在平面直角坐标系中画出积分区域 D 。



从图中我们可以明显地看出来，积分区域 D 是关于 x 轴对称的。

好，我们现在来看被积函数 $f(x,y)$ 。

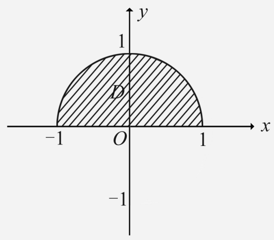
$f(x,-y)=-xy$

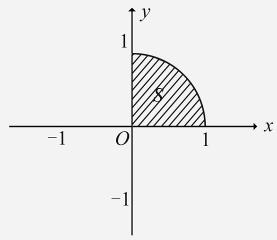
$-f(x,y)=-xy$

所以有 $f(x,-y)=-f(x,y)$，被积函数 $f(x,y)$ 对 y 为奇函数。

综上所述，由于积分区域 D 关于 x 轴对称，并且被积函数 $f(x,y)$ 对 y 为奇函数，所以有 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$。

例. 区域 D 和区域 S 如下图所示，请问 $\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是否等于 $2\iint\limits_S x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。





解： 从图中我们可以很明显地看出，区域 D 是关于 y 轴对称的。现在我们来关注一下被积函数 $f(x,y)=x^2y$。

$f(-x,y)=(-x)^2y=x^2y$

$f(x,y)=x^2y$

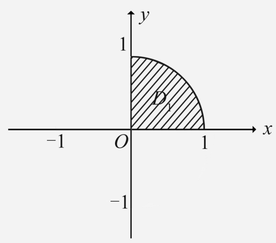
所以 $f(-x,y)=f(x,y)$，被积函数 $f(x,y)=x^2y$ 对 x 为偶函数。

综上所述，由于区域 D 关于 y 轴对称且被积函数 $f(x,y)$ 对 x 为偶函数，所以有

$$\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1} x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad （1）式$$

其中区域 D_1 为区域 D 在 y 轴右侧的部分。

好，也就是说 D_1 为



对比 S 和 D_1 就会发现，S 和 D_1 是同一区域，所以有

$$2\iint\limits_{D_1} x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_S x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad （2）式$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_S x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad （3）式$$

也就是说，$\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于 $2\iint\limits_S x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

例. 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$，$f(x,y)$ 在 D 上连续，D_1 是 D 在第一象限的部分，由选项____所给的条件能够推出 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

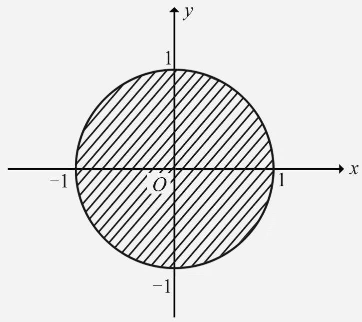
（A） $f(-x,-y)=f(x,y)$

（B） $f(-x,-y)=-f(x,y)$

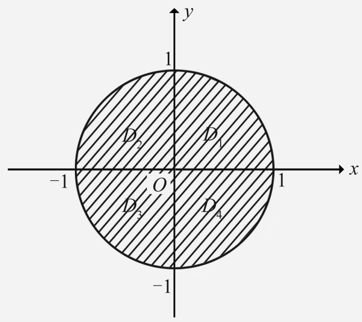
（C） $f(-x,y)=f(x,-y)=f(x,y)$

（D） $f(-x,y)=f(x,-y)=-f(x,y)$

解： 我们先把二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的积分区域 D 在平面直角坐标系中画出来。



题中说 D_1 是 D 在第一象限的部分，为了方便表示，我们不妨设 D_2 是 D 在第二象限的部分，D_3 是 D 在第三象限的部分，D_4 是 D 在第四象限的部分。即



我就直接告诉大家，本题（C）选项为正确选项，接下来我就给大家解释一下原因。（C）选项是 $f(-x,y)=f(x,-y)=f(x,y)$，那我们来看看为何由 $f(-x,y)=f(x,-y)=f(x,y)$ 能推出 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

由于区域 D 关于 x 轴对称且 $f(x,-y)=f(x,y)$，所以根据本节所讲的知识，有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1\cup D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{（1）式}$$

由于区域 $D_1\cup D_2$ 关于 y 轴对称且 $f(-x,y)=f(x,y)$，所以根据本节所讲的知识，有

$$\iint\limits_{D_1\cup D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{（2）式}$$

（1）式、（2）式相结合，得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{（3）式}$$

所以本题选择（C）选项。

例. 请计算 $\iint\limits_D \frac{1+\sin xy+x}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 D 是由 $x=\sqrt{1-y^2}$ 、y 轴所围成的闭区域。

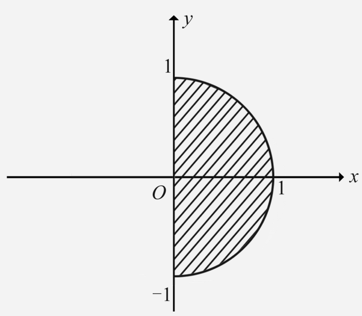
解： 由 7.4 节中所讲的二重积分的性质 2 可得

$$\iint\limits_D \frac{1+\sin xy+x}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \frac{1+x}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D \frac{\sin xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{（1）式}$$

我们现在只需计算出 $\iint\limits_D \frac{1+x}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 和 $\iint\limits_D \frac{\sin xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，然后把它们加起来就可以了。

我们先来计算 $\iint\limits_D \frac{\sin xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

先在平面直角坐标系中画出积分区域 D。



由上图我们可以明显地看出，积分区域 D 是关于 x 轴对称的。

现在我们来关注一下被积函数 $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{1+x^2+y^2}$。

$f(x,-y)=\dfrac{\sin[x\times(-y)]}{1+x^2+(-y)^2}=\dfrac{\sin(-xy)}{1+x^2+y^2}=\dfrac{-\sin xy}{1+x^2+y^2}$　$-f(x,y)=\dfrac{-\sin xy}{1+x^2+y^2}$

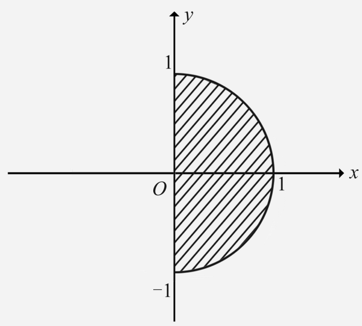
所以有 $f(x,-y)=-f(x,y)$，被积函数 $f(x,y)$ 关于 y 为奇函数。

综上所述，积分区域 D 关于 x 轴对称且被积函数 $f(x,y)$ 关于 y 为奇函数，所以根据本节所讲的知识点有

$$\iint\limits_D \frac{\sin xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \qquad （2）式$$

我们再来计算 $\iint\limits_D \dfrac{1+x}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

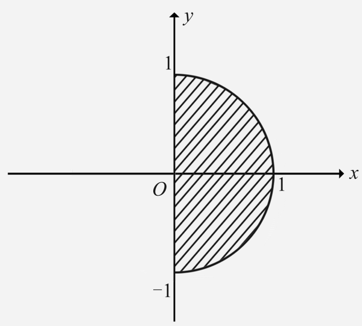
我们画出本题所给的二重积分的积分区域 D 的图。



由于本题所给的二重积分的积分区域 D 是半圆，所以本题所给的二重积分应该用极坐标系法来做。

第一步. 在平面直角坐标系中把积分区域 D 涂上阴影。

对于本题而言，就是



第二步. 将所给的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写为"$\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\ \rho\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta$"（注意：被积函数中要乘以一个"$\rho$"，别忘了）。

对于本题而言，就是

$$\iint\limits_D \frac{1+x}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b[\int_c^d\iint\limits_D(\frac{1+x}{1+x^2+y^2}\times\rho)\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta \qquad （3）式$$

第三步. 确定 a、b、c、d。

前面我已经用大量篇幅介绍过了 a、b、c、d 的确定方法，这里就不再赘述了。对于本题而言，有 $a=-\dfrac{\pi}{2}$，$b=\dfrac{\pi}{2}$，$c=0$，$d=1$。

所以有

$$\iint\limits_D \frac{1+x}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1\iint\limits_D(\frac{1+x}{1+x^2+y^2}\times\rho)\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta \qquad （4）式$$

第四步. 设 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，并将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入被积函数中。

对于本题而言，我们把 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入被积函数 $(\dfrac{1+x}{1+x^2+y^2}\times\rho)$ 中，得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1\iint_D(\frac{1+x}{1+x^2+y^2}\times\rho)\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1\iint_D(\frac{1+\rho\cos\theta}{1+\rho^2}\times\rho)\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta \qquad （5）式$$

（4）式、（5）式相结合，得

$$\iint_D\frac{1+x}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1\iint_D(\frac{1+\rho\cos\theta}{1+\rho^2}\times\rho)\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta \qquad （6）式$$

第五步．计算出 $\int_a^b[\int_c^d\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\ \rho\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta$ **即可。这大家应该会算吧？也就是说，先算内层的定积分** $\int_c^d f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\ \rho\mathrm{d}\rho$**（就利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算），算完之后把计算出的结果作为外层的定积分的被积函数再算一下外层的定积分就可以了（同样也是利用第 4 章所讲的定积分的计算方法来算）。**

对于本题而言，就是要计算出 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1\iint_D(\frac{1+\rho\cos\theta}{1+\rho^2}\times\rho)\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta$。计算过程我就省略了，计算结果是

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1\iint_D(\frac{1+\rho\cos\theta}{1+\rho^2}\times\rho)\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}(\ln2-1)+2 \qquad （7）式$$

好，截至目前，我们已经算出了 $\iint_D\frac{\sin xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$ **和** $\iint_D\frac{1+x}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}(\ln2-1)+2$**，所以本题最终的答案为** $0+\frac{\pi}{2}(\ln2-1)+2=\frac{\pi}{2}(\ln2-1)+2$**。**

7.8 二重积分的轮换对称性

上一节给大家讲的是二重积分的对称性，而本节要给大家讲的是二重积分的轮换对称性。

二重积分的轮换对称性指的是：将积分区域中的 x **、** y **互换，同时将被积函数中的** x **、** y **互换，得到的新的二重积分与原二重积分是相等的。**

二重积分的轮换对称性虽然是“一条”性质，但实际做题的时候，这“一条”性质的使用方法却有“两种”。下面分别介绍。

二重积分的轮换对称性的第一种使用方法：在二重积分还没有化为一里一外的两个定积分之前就使用。

例．由轮换对称性可知，二重积分“$\iint_{D_1}(3x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 D_1 是由 $x=1$、$y=0$、$y=x$ 所围成的闭区域”与二重积分“$\iint_{D_2}(3x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 D_2 是由 $y=1$、$x=0$、$x=y$ 所围成的闭区域”相等（不信的话大家就计算一下，计算完就会发现这两个二重积分的确是相等的）。

例．由轮换对称性可知，二重积分“$\iint_{D_1}\sin^2 x\cos y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 D_1 是由 $x^2+y^2=1$ 所围成的闭区域”与二重积分“$\iint_{D_2}\sin^2 y\cos x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 D_2 是由 $y^2+x^2=1$ 所围成的闭区域”相等（不信的话大家就计算一下，计算完就会发现这两个二重积分的确是相等的）。

顺便提一句，这题很有意思，用轮换对称性之前的积分区域 D_1 与用完轮换对称性之后得到的积分区域 D_2 其实是同一个积分区域，都是圆心在原点，半径为1的圆域。

例．已知区域 D 是由 $|x|+|y|=1$ 所围成的闭区域，请证明 $\iint_D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$。

解：对于本题而言，有的同学说直接计算出来 $\iint_D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$ 不就行了嘛。的确，直接计算出来是一种方法。不过，本题如果用本节所讲的轮换对称性来做的话更为简单。即

由轮换对称性可得，二重积分“$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 D 是由 $|x|+|y|=1$ 所围成的闭区域”与二重积分“$\iint_{D'} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 D' 是由 $|y|+|x|=1$ 所围成的闭区域”相等。即

$$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad （1）式$$

大家现在仔细看一下，积分区域 D 是由 $|x|+|y|=1$ 所围成的闭区域，积分区域 D' 是由 $|y|+|x|=1$ 所围成的闭区域，很明显 D 和 D' 是同一个区域。所以有

$$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad （2）式$$

将（2）式移项，得

$$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \qquad （3）式$$

根据 7.4 节中所讲的性质 2 可得

$$\iint_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \qquad （4）式$$

例. 设 $f(x)$ 连续且恒不为零，求 $\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x^2+y^2=R^2$ 所围成的闭区域。

解： 由轮换对称性可得，二重积分"$\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x^2+y^2=R^2$ 所围成的闭区域"与二重积分"$\iint_{D'} \frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 D' 是由 $y^2+x^2=R^2$ 所围成的闭区域"相等。即

$$\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} \frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad （1）式$$

大家现在仔细看一下，积分区域 D 是由 $x^2+y^2=R^2$ 所围成的闭区域，积分区域 D' 是由 $y^2+x^2=R^2$ 所围成的闭区域，很明显 D 和 D' 是同一个区域。所以有

$$\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D \frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad （2）式$$

我们现在给（2）式的左右两侧同时加上 $\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，得

$$2\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D \frac{(a+b)(f(x)+f(y))}{f(y)+f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad （3）式$$

（3）式可以化简为

$$2\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D (a+b)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad （4）式$$

根据 7.4 节中所讲的性质 1 可得

$$2\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(a+b)\iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad （5）式$$

在 7.2 节中我给大家讲过，当二重积分的被积函数为 1 时，二重积分的值就是积分区域 D 的面积。所以 $\iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=D$ 的面积 $=\pi R^2$，将其代入（5）式得

$$2\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(a+b)\pi R^2 \qquad （6）式$$

将（6）式的左右两侧同时乘以 $\frac{1}{2}$，得

$$\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(a+b)\pi R^2 \qquad （7）式$$

二重积分的轮换对称性的第二种使用方法：在二重积分已经化为一里一外的两个定积分之后使用。

例. 由轮换对称性可知，$\int_1^2[\int_1^x xy\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\int_1^2[\int_1^y yx\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$，大家看见了吧，把所有的 x 都换成 y，把所有的 y 都换成 x（注意：互换的不光是被积函数中的 x 和 y，d 后面的 x 和 y 也要互换，上下限中的 x 和 y 也要互换）。

例. 由轮换对称性可知，$\int_0^1[\int_{x^2}^x x^2y\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\int_0^0[\int_{y^2}^y y^2x\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$，大家看见了吧，把所有的 x 都换成 y，把所有的 y 都换成 x（注意：互换的不光是被积函数中的 x 和 y，d 后面的 x 和 y 也要互换，上下限中的 x 和 y 也要互换）。

7.9 “先 x 后 y 型”二重积分与“先 y 后 x 型”二重积分的相互转化

根据之前的讲解，我们知道直角坐标系法计算二重积分又可分为“先 x 后 y 法”和“先 y 后 x 法”两种，也就是说

$$\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y \Leftarrow \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \Rightarrow \int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$$

那么现在我要告诉大家的是，其实上图可以补充成

$$\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y \Leftrightarrow \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \Leftrightarrow \int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$$

这意味着：不但 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可以化为 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 、 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ ，而且 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 、 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ 也可以化为 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 。

既然如此，那就进一步意味着 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 、 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ 这两者可以相互转化。具体来说就是：

如果要将 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 转化为 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ ，只需先将 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 转化为 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，然后再将 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 转化为 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ 就可以了；

如果要将 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ 转化为 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ ，只需先将 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ 转化为 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，然后再将 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 转化为 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 就可以了。

那么现在问题来了， $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 、 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ 到底应该如何转化为 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 呢？这正是马上要讲的。

$\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y \Rightarrow \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的转化方法：非常简单，D 就是由 $y=a$ 、 $y=b$ 、 $x=c$ 、 $x=d$ 这四条线所围成的闭区域。

$\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \Rightarrow \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的转化方法：非常简单，D 就是由 $x=a$ 、 $x=b$ 、 $y=c$ 、 $y=d$ 这四条线所围成的闭区域。

下面我们来看相应的例题。

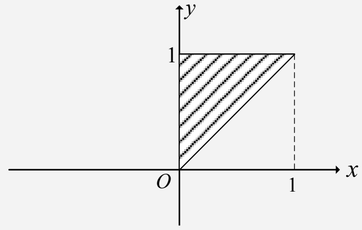
例. 请将 $\int_0^1[\int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 转化为先对 y 积分后对 x 积分的形式。

解： 根据本节的讲解，我们需要先将 $\int_0^1[\int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 转化为 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 。

根据刚刚的讲解， $\int_0^1[\int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 转化成的 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是： $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 D 是由 $y=0$ 、 $y=1$ 、 $x=0$ 、 $x=y$ 所围成的闭区域。

接下来要做的就是将“ $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 D 是由 $y=0$ 、 $y=1$ 、 $x=0$ 、 $x=y$ 所围成的闭区域”转化为“ $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ ”，这就与本节所讲的内容无关了，这早在 7.3 节中就给大家讲过了。

首先我们在平面直角坐标系中画出积分区域 D 。

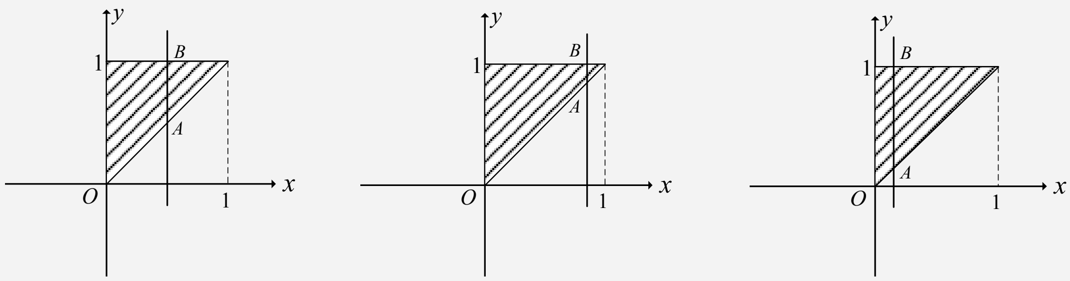


我们先来确定 a 、b 。

从图中我们可以很明显地看出，阴影区域中横坐标的最小值是 0，阴影区域中横坐标的最大值是 1，所以 $a=0$，$b=1$ 。

我们再来确定 c 、d 。

我们画一条与 y 轴平行且与积分区域 D 相交的直线。



大家看见了吧，这条直线有很多种画法。但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。这条线段上纵坐标的最小值肯定是在 A 点取到，这条线段上纵坐标的最大值肯定是在 B 点取到。我们只需求出 A 点和 B 点的纵坐标就可以了。很显然，A 点的纵坐标 $y=x$，B 点的纵坐标 $y=1$。所以有 $c=x$，$d=1$。

综上所述，有 $a=0$，$b=1$，$c=x$，$d=1$，所以 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1[\int_x^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ 。

由于 $\int_0^1[\int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1[\int_x^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$，所以有 $\int_0^1[\int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y=\int_0^1[\int_x^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ 。

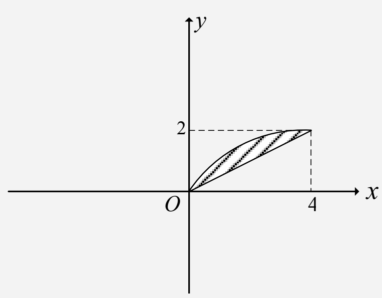
例. 请将 $\int_0^2[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 转化为先对 y 积分后对 x 积分的形式。

解： 根据本节的讲解，我们需要先将 $\int_0^2[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 转化为 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 。

根据刚刚的讲解，$\int_0^2[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 转化成的 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是：$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=0$ 、$y=2$ 、$x=y^2$ 、$x=2y$ 所围成的闭区域。

接下来要做的就是将“$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=0$ 、$y=2$ 、$x=y^2$ 、$x=2y$ 所围成的闭区域”转化为“$\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$”，这就与本节所讲的内容无关了，这早在 7.3 节中就给大家讲过了。

首先我们在平面直角坐标系中画出积分区域 D 。

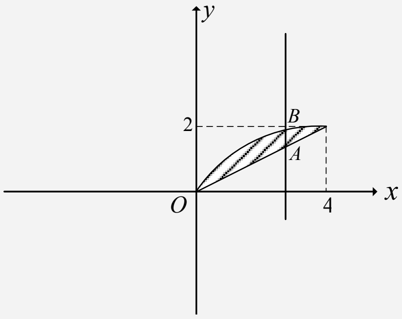


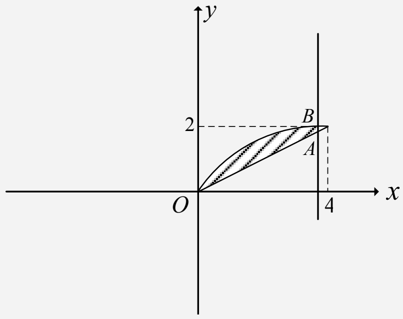
我们先来确定 a 、b 。

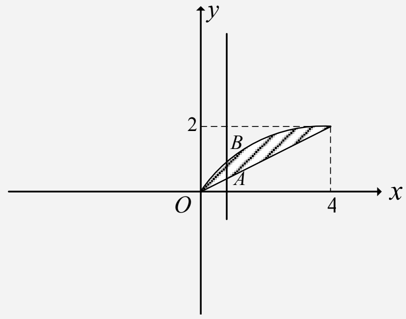
从图中我们可以很明显地看出，阴影区域中横坐标的最小值是 0，阴影区域中横坐标的最大值是 4，所以 $a=0$，$b=4$ 。

我们再来确定 c 、d 。

我们画一条与 y 轴平行且与积分区域 D 相交的直线。







大家看见了吧，这条直线有很多种画法。但无论哪种画法，这条与 y 轴平行的直线在阴影区域中的部分肯定是一条线段。这条线段上纵坐标的最小值肯定是在 A 点取到，这条线段上纵坐标的最大值肯定是在 B 点取到。我们只需求出 A 点和 B 点的纵坐标就可以了。很显然，A 点的纵坐标 $y=\dfrac{x}{2}$，B 点的纵坐标 $y=\sqrt{x}$ 。所以有 $c=\dfrac{x}{2}$，$d=\sqrt{x}$ 。

综上所述，有 $a=0$，$b=4$，$c=\dfrac{x}{2}$，$d=\sqrt{x}$，所以 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^4[\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ 。

由于 $\int_0^2[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^4[\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$，所以有 $\int_0^2[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y=\int_0^4[\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$ 。

7.10 计算二重积分时的一个小技巧

在 7.3 节中，我给大家讲了二重积分的计算方法。二重积分的计算方法分为直角坐标系法（其中又可细分为“先 x 后 y 法”和“先 y 后 x 法”）和极坐标系法，但是无论哪种方法，最终都是将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 转化为了内外两层定积分，也就是说，将内层定积分的计算结果作为外层定积分的被积函数。

那么本节要给大家讲的知识点是计算二重积分时的一个小技巧，**这个小技巧是：设二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 转化为的内外两层定积分为 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$，若 a、b、c、d 均为常数**，并且 $f(x,y)$ **可以写为** $f(x,y)=g(x)p(y)$，**则 $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y=\int_a^b p(y)\mathrm{d}y\times\int_a^b g(x)\mathrm{d}y$ 。**

我们现在来看几个例子。

例. 某道题让计算二重积分 $\iint\limits_D xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，若已知该二重积分采用直角坐标系法中的“先 x 后 y 法”化为了 $\int_1^2[\int_3^4 xy^2\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$，那么现在我们除了可以规规矩矩地按照先算内层的定积分再算外层的定积分来计算 $\int_1^2[\int_3^4 xy^2\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 之外，还可以利用 $\int_1^2[\int_3^4 xy^2\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y=\int_1^2 y^2\,\mathrm{d}y\times\int_3^4 x\mathrm{d}x$（本节所讲的知识点）来计算 $\int_1^2[\int_3^4 xy^2\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$，这就变成两个独立的定积分相乘了，就不存在什么内层外层了。

注： $\int_1^2[\int_3^4 xy^2\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 之所以可以写为 $\int_1^2[\int_3^4 xy^2\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y=\int_1^2 y^2\,\mathrm{d}y\times\int_3^4 x\mathrm{d}x$，是由于以下两点同时满足：第一是 a、b、c、d 均为常数（$a=1$，$b=2$，$c=3$，$d=4$），第二是被积函数 $f(x,y)=xy^2$ 可以写为 $f(x,y)=g(x)p(y)$ 的形式（$g(x)=x$，$p(y)=y^2$）。

例. 某道题让计算二重积分 $\iint\limits_D 3xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，若已知该二重积分采用直角坐标系法中的“先 x 后 y 法”化为了 $\int_1^2[\int_3^4 3xy^2\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$，那么现在我们除了可以规规矩矩地按照先算内层的定积分再算外层的定积分来计算 $\int_1^2[\int_3^4 3xy^2\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 之外，还可以利用 $\int_1^2[\int_3^4 3xy^2\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y=\int_1^2 y^2\,\mathrm{d}y\times\int_3^4 3x\mathrm{d}x$（本节所讲的知识点）来计算 $\int_1^2[\int_3^4 3xy^2\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$，这就变成两个独立的定积分相乘了，就不存在什么内层外层了。

注： $\int_1^2[\int_3^4 3xy^2\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 之所以可以写为 $\int_1^2[\int_3^4 3xy^2\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y=\int_1^2 y^2\,\mathrm{d}y\times\int_3^4 3x\mathrm{d}x$，是由于以下两点同时满足：第一是 a、

b、c、d 均为常数（$a=1$，$b=2$，$c=3$，$d=4$），第二是被积函数 $f(x,y)=3xy^2$ 可以写为 $f(x,y)=g(x)p(y)$ 的形式（$g(x)=3x$，$p(y)=y^2$）。

最后再跟大家说一句，我们也可以把被积函数中的 x 当成 $g(x)$，把被积函数中的 $3y^2$ 当成 $p(y)$，所以 $\int_1^2[\int_3^4 3xy^2\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$ 也可以写为 $\int_1^2[\int_3^4 3xy^2\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y=\int_1^2 3y^2\,\mathrm{d}y\times\int_3^4 x\mathrm{d}x$。

例. 某道题让计算二重积分 $\iint\limits_D xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，若已知该二重积分采用极坐标系法化为了 $\int_0^{2\pi}[\int_0^1\rho^4\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta$，那么现在我们除了可以规规矩矩地按照先算内层的定积分再算外层的定积分来计算 $\int_0^{2\pi}[\int_0^1\rho^4\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta$ 之外，还可以利用 $\int_0^{2\pi}[\int_0^1\rho^4\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\times\int_0^1\rho^4\mathrm{d}\rho$（本节所讲的知识点）来计算 $\int_0^{2\pi}[\int_0^1\rho^4\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta$，这就变成两个独立的定积分相乘了，就不存在什么内层外层了。

注： $\int_0^{2\pi}[\int_0^1\rho^4\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta$ 之所以可以写为 $\int_0^{2\pi}[\int_0^1\rho^4\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\times\int_0^1\rho^4\mathrm{d}\rho$，是由于以下两点同时满足：第一是 a、b、c、d 均为常数（$a=0$，$b=2\pi$，$c=0$，$d=1$），第二是被积函数 $f(\rho,\theta)=\rho^4\sin^2\theta\cos\theta$ 可以写为 $f(\rho,\theta)=g(\rho)p(\theta)$ 的形式（$g(\rho)=\rho^4$，$p(\theta)=\sin^2\theta\cos\theta$）。

7.11　均匀薄片的形心

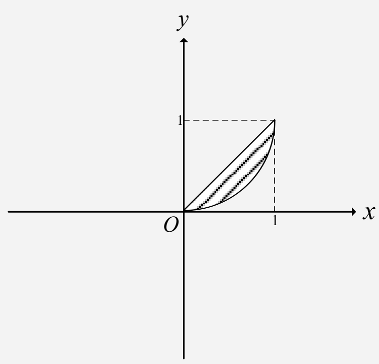
在考研数学中，有时会考到计算均匀薄片的形心的题，本节我就来给大家讲一下计算均匀薄片的形心的方法。

设某均匀薄片的形心为 $(\overline{x},\overline{y})$，则

$\overline{x}=\dfrac{\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$，$\overline{y}=\dfrac{\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$ **（其中积分区域 D 为该均匀薄片所占的闭区域）。**

例. 已知某均匀薄片所占的闭区域 D 由 $y=x^2$、$y=x$ 所围成，求该均匀薄片的形心。

解： 我们先在平面直角坐标系中画出闭区域 D。



设该均匀薄片的形心坐标为 $(\overline{x},\overline{y})$。由本节所讲的知识可知 $\overline{x}=\dfrac{\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$，$\overline{y}=\dfrac{\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$。

我们先来算 $\dfrac{\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$。

先算分母 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ =积分区域 D 的面积。我们利用第 4 章所讲的定积分来算面积就可以了，D 的面积 $=\int_0^1 x-x^2\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1-\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1=(\dfrac{1}{2}-0)-(\dfrac{1}{3}-0)=\dfrac{1}{6}$，所以 $\iint\limits_D 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{6}$。

再算分子 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1[\int_{x^2}^x x\mathrm{d}y]\,\mathrm{d}x=\int_0^1(x^2-x^3)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1-\dfrac{x^4}{4}\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$。

所以 $\dfrac{\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}}=\dfrac{1}{2}$。

我们再来算 $\dfrac{\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$。

先算分母 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$积分区域 D 的面积。我们利用第 4 章所讲的定积分来算面积就可以了，D 的面积 $=\int_0^1 x-x^2\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1-\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1=(\dfrac{1}{2}-0)-(\dfrac{1}{3}-0)=\dfrac{1}{6}$，所以 $\iint\limits_D 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{6}$。

再算分子 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1[\int_{x^2}^x y\mathrm{d}y]\,\mathrm{d}x=\int_0^1(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{2})\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1-\dfrac{x^5}{5}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})=\dfrac{1}{15}$。

所以 $\dfrac{\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{6}}=\dfrac{2}{5}$。

综上所述，该均匀薄片的形心坐标为 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{5})$。

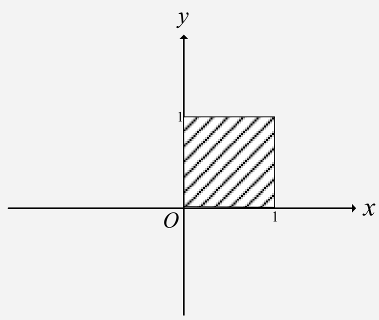
通过这道题，想必大家已经会计算形心了。接下来我要告诉大家两个结论。

结论 1. 均匀的圆形薄片的形心就是圆心。

结论 2. 均匀的正方形薄片的形心就是对角线的交点。

例. 请计算 $\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 D 是由 $x=0$、$x=1$、$y=0$、$y=1$ 所围成的闭区域。

解：我们先在平面直角坐标系中画出积分区域 D。



由刚刚讲完的结论 2 可知，这个图形的形心是 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$。由之前讲过的形心公式可知

$$\frac{\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{1}{2} \qquad \text{（1）式}$$

$$\frac{\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{1}{2} \qquad \text{（2）式}$$

而 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 就等于积分区域 D 的面积，所以 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$。我们现在把 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$ 代入（1）式、（2）式中，解得 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}$，$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}$。

所以

$$\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1。$$

本题就做完了。之前我们做的那道题是利用二重积分求形心，而本题我们则是利用形心来求二重积分。